


Stanford University Libraries

1865

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

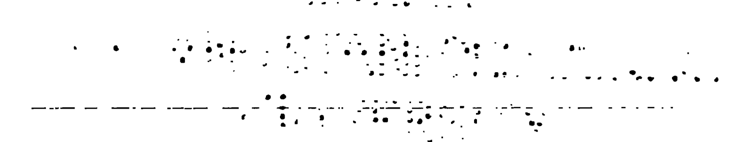
In zwanglosen Heften.

Herausgegeben

von

A. L. Crelle.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preufsischer Behörden.



Ein und vierzigster Band.

In vier Heften.

Mit zwei Figurentafeln.

Berlin, 1851.

Bei G. Reimer.

Et se trouve à Paris chez Mr. Bachelier (successeur de Mme Ve Courcier),
Libraire pour les Mathématiques etc. Quai des Augustins No. 55.

Inhaltsverzeichnifs
des ein und vierzigsten Bandes, nach den Gegenständen.

I. Reine Mathematik.

1. Analysis.

Nr. der Abhandlung. | Heft | Seite.

1. Über die Bedeutung der divergenten unendlichen Reihen, die Bestimmung ihrer Werthe, und über die Zuläfslichkeit ihrer Anwendung bei analytischen Rechnungen. Von Herrn Amtmann *Prehn* zu Ratzeburg im Lauenburgischen. I. 1

22. Berichtigung zu dieser Abhandlung, vom jetzt verstorbenen Verfasser derselben, nebst einigen Nachrichten über dessen Lebenslauf. . . . . IV. 364

2. Summirung der Reihen

$$1+\frac{r+1}{1}\varrho\cos\varphi+\frac{(r+1)(r+2)}{1.2}\varrho^2\cos 2\varphi+\dots+\frac{(r+1)(r+2)\dots(r+n)}{1.2\dots n}\varrho^n\cos n\varphi \text{ und}$$

$$(r+1)\varrho\sin\varphi+\frac{(r+1)(r+2)}{1.2}\varrho^2\sin 2\varphi+\dots+\frac{(r+1)(r+2)\dots(r+n)}{1.2\dots n}\varrho^n\sin n\varphi.$$

Von Herrn Dr. *Dienger* zu Sinsheim bei Heidelberg. . . . . I. 48

3. Über den Werth eines bestimmten Integrals, aus der unbestimmten Integralfunction gezogen, falls dieselbe von der Form $\operatorname{arctang} f(x)$ ist, wo $f(x)$ eine eindeutige Function von x vorstellt. Von dem Herrn Professor *Raabe* in Zürich. (Aus den Mittheilungen der Zürcherischen naturforschenden Gesellschaft.) . . . . I. 54

4. Note sur l'addition des fonctions elliptiques. Par M. *A. Cayley* à Londres. I. 57

7. Note sur la solution de l'équation $x^{257}-1=0$. Par le même. . . . . I. 81

9. Note sur quelques formules qui se rapportent à la multiplication des fonctions elliptiques. Par le même. (Suite de la note tome 39 page 16.) . . . . I. 85

10. Entwicklung der Modular-Integrale oder der elliptischen Transcendenten aller Arten nach Potenzen des Moduls, nach Functionen der Amplitude und nach neuen Functionen des Parameters; sammt einer Theorie dieser neuen Functionen. Von Herrn Dr. *Chr. Gudermann*, ord. Prof. der Mathematik an der Universität zu Münster. . . . . II. 93

11. Einige Reihensummirungen, vermittelt durch die bestimmten Integrale $\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx.dx$ und $\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx.dx$. Von Herrn Dr. *Dienger* zu Sinsheim bei Heidelberg. . . . . II. 137

12. Tabelle der reducirten positiven ternären quadratischen Formen, nebst den Resultaten neuer Forschungen über diese Formen, in besonderer Rücksicht auf ihre tabellarische Berechnung. Von Herrn Dr. *G. Eisenstein*, Docent an der Universität zu Berlin. . . . . II. 141

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
13.	Sur l'introduction des variables continues dans la théorie des nombres. Par Mr. *C. Hermite*, examinateur d'admission à l'école polytechnique, à Paris.	III.	191
15.	Anhang zu der „Tabelle der reducirten positiven ternären quadratischen Formen, etc." im 2ten Hefte dieses Bandes. Von Herrn Dr. *G. Eisenstein*, Docent an der Universität zu Berlin.	III.	227
16.	Transformation einer beliebigen gegebenen homogenen Function 4ten Grades von zwei Variabeln durch lineäre Substitutionen neuer Variabeln in die Form, welche nur die geraden Potenzen der neuen Variabeln enthält. Von Herrn *Otto Hesse*, Professor an der Universität zu Königsberg.	III.	243
17.	Algebraische Auflösung derjenigen Gleichungen 6ten Grades, zwischen deren Wurzeln x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3 die Bedingungsgleichung $(x_1-y_2)(x_2-y_3)(x_3-y_1)+(y_1-x_2)(y_2-x_3)(y_3-x_1) = 0$ Statt findet. Von Demselben.	III.	264
20.	Über die ganzen homogenen Functionen von der dritten und vierten Ordnung zwischen drei Variabeln. Von Demselben.	IV.	285
21.	Probleme der Variationsrechnung. Von Herrn Professor *Schellbach* zu Berlin.	IV.	293
23.	Über eine allgemeine Eigenschaft der rationalen Entwickelungscoëfficienten einer bestimmten Gattung analytischer Functionen. Von Herrn Dr. *E. F. Kummer*, Professor in Breslau.	IV.	368

2. Geometrie.

5.	Note sur quelques théorèmes de la géométrie de position. Par M. *A. Cayley* à Londres. (Suite du Mémoire tome 31 p. 213, tome 34 p. 270 et tome 38 p. 97 de ce Journal.)	I.	66
6.	Mémoire sur les coniques inscrites dans une même surface du second ordre. Par le même.	I.	73
8.	Note relative à la sixième section du „Mémoire sur quelques théorèmes de la géométrie de position." Tome 38 page 98. Par le même.	I.	84
18.	Eine Bemerkung zum *Pascal*schen Theorem. Von Herrn *Otto Hesse*, Professor an der Universität zu Königsberg.	III.	269
19.	Über die Wendepuncte der algebraischen ebenen Curven und die Schmiegungs-Ebenen der Curven von doppelter Krümmung, welche durch den Schnitt zweier algebraischen Oberflächen entstehen. Von Demselben.	III.	272

II. Angewandte Mathematik.

14.	Pendule à mouvement perpétuel.	III.	217

1.

Über die Bedeutung der divergenten unendlichen Reihen, die Bestimmung ihrer Werthe, und über die Zulässlichkeit ihrer Anwendung bei analytischen Rechnungen.

(Von Herrn Amtmann *Prehn* zu Ratzeburg im Lauenburgischen.)

Die divergenten Reihen haben ein seltsames Schicksal gehabt. Nachdem sie von den grofsen Mathematikern des vorigen Jahrhunderts und in den ersten Decennien dieses Jahrhunderts unbedenklich bei analytischen Rechnungen gebraucht worden sind und dazu beigetragen haben, die bedeutenden Resultate zu schaffen, welche uns als Erbtheil überliefert worden sind, haben die Mathematiker der neuern Zeit ihre Anwendung bei analytischen Rechnungen für unzuläfslich erklärt und sie gänzlich aus dem Gebiete der Analysis verbannt.

Zwar gab es schon in älterer Zeit widerstreitende Ansichten über die Bedeutung der divergenten Reihen: aber nach dem Zeugnisse von *Euler* (De seriebus divergentibus. §. 10. Nov. Comment. Petropol. V. p. 205 seqq.) hat kein Theil dem andern Rechnungsfehler vorgeworfen; so dafs der Streit nur mehr als ein Wortstreit anzusehen war.

Wenn ich nicht irre, ist *Cauchy* (Cours d'Analyse. 1821.) der Erste, welcher die gänzliche Verwerfung der divergenten Reihen durchgeführt hat. *Abel* sprach sich (1826) in demselben Sinne aus und behauptete, dafs man bei Anwendung divergenter Reihen beweisen könne, was man wolle: Mögliches sowohl, als Unmögliches.

Sieht man die mathematischen Schriften durch, welche seit 1826 bis in die neueste Zeit diesen Gegenstand behandelt haben, so wird man finden, dafs von den berühmten Mathematikern Einige sich unbedingt für die Verwerfung der divergenten Reihen erklärt, Andere aber dem nicht widersprochen haben. Man mufs daher die von *Cauchy* angeregte Ansicht als die gegenwärtig herrschende ansehen; sie kann in folgende Sätze zusammengefafst werden.

1. Divergente Reihen haben keine Summe: denn eine Reihe wie

$$1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots,$$

welche divergent ist wenn $x \geqq 1$, oscillirt für den Fall $x=1$ beständig zwischen $+1$ und -1. Ist aber $x>1$, so wächst der absolute Werth der Reihe beständig, schwankt aber zugleich zwischen dem Positiven und Negativen hin und her. In beiden Fällen kann daher von einer Summe nicht die Rede sein. Da nun divergente Reihen keine Summe haben, können sie einer bestimmten endlichen Gröfse nicht gleich gesetzt werden und sind folglich für analytische Rechnungen unbrauchbar. Einer Rechnung mit allgemeinen Reihen mufs daher eine Untersuchung über ihre Convergenz vorausgehen.

2. Die in ältern Werken öfters vorkommende Transformation divergenter Reihen in convergente, wodurch man die Summen der divergenten Reihen finden wollte, beruht auf einer Täuschung. Es wird die divergente Reihe nicht in eine andere, mit ihr identische und convergente Reihe transformirt (denn das ist geradezu unmöglich, weil eine divergente Reihe, welche keine Summe hat, nicht mit einer convergenten identisch sein kann, welche eine Summe hat), sondern man leitet aus der divergenten eine andere, von ihr ganz verschiedene Reihe ab, die nun recht wohl convergiren kann.

Zur Unterstützung dieser Ansicht beruft man sich darauf, dafs die Anwendung divergenter Reihen zu fehlerhaften Resultaten führe. Eine bestimmte Nachweisung solcher fehlerhaften Resultate ist aber nicht gegeben worden. (Vergl. §. 17.)

Die divergenten Reihen haben zwar Vertheidiger gefunden; ihre Sache ist aber nicht geschickt geführt worden. Anstatt sich auf die Analogie imaginärer Ausdrücke für reelle Gröfsen zu stützen und darauf die Vertheidigung zu gründen (Vergl. §. 16.), hat man zu dem unklaren Begriffe einer syntaktischen Bedeutung der Reihen seine Zuflucht genommen und dadurch den Gegnern einen leichten Sieg gelassen.

Ich habe diesen Gegenstand einer neuen Prüfung unterworfen und werde in dieser Abhandlung nachweisen: dafs die divergenten Reihen eine eigenthümliche Bedeutung haben, in Folge deren sie zwar keine Summe, wohl aber einen Werth haben: dafs man im Stande ist, diesen Werth zu bestimmen, und dafs die Anwendung der divergenten Reihen bei analytischen Rechnungen unbeschränkt zulässlich ist; ohne dafs man daraus fehlerhafte Resultate zu besorgen hätte.

I.

Über die Bedeutung der divergenten Reihen.

§. 1.

Die Anordnung betreffend; und Begriffsbestimmungen.

Diese Abhandlung beschränkt sich auf die Betrachtung derjenigen unendlichen Reihen, welche nach Potenzen einer Variabeln geordnet und deren Coëfficienten endliche Gröfsen sind.

Ich betrachte zuvörderst zwei Classen dieser Reihen:

1. *Reihen mit wechselnden Zeichen,* d. i. Reihen, welche nach den fortlaufenden Potenzen der Variabeln geordnet sind und bei welchen (von der ersten Potenz der Variabeln an gerechnet) ein beständiger Wechsel der Zeichen ($\pm$) von Glied zu Glied Statt findet, mithin Reihen von der Form

$$\pm a + bx - cx^2 + dx^3 - ex^4 + \cdots,$$

und alle Reihen, die sich durch eine Substitution auf diese Form bringen lassen.

2. *Reihen mit bleibenden Zeichen,* d. i. Reihen, welche nach den fortlaufenden Potenzen der Variabeln geordnet sind und bei welchen das Zeichen von Glied zu Glied unverändert bleibt, mithin Reihen von der Form

$$\pm a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots,$$

und alle Reihen, die sich durch eine Substitution auf diese Form bringen lassen.

Diese beiden Classen von Reihen, welche ersichtlich die meisten in der Analysis vorkommenden Reihen begreifen, werde ich zuerst behandeln, ihre Bedeutung (§. 3 und 4.) und die Methoden ihrer Werthbestimmung (§. 5 bis 10.) entwickeln: erst hernach (§. 11. seqq.) werde ich die Theorie auf alle nach Potenzen einer Variabeln geordnete Reihen erstrecken, weil ich der Meinung bin, dafs durch diese Abweichung von der logischen Ordnung die Darstellung an Deutlichkeit gewinnen wird.

Ich werde die gewöhnliche Bedeutung der Worte convergent und divergent beibehalten. Ich nenne eine unendliche Reihe *convergent,* wenn die Summe ihrer Glieder, je mehr man deren nimmt, sich immer mehr einer bestimmten endlichen Gröfse nähert, welche die Grenze ist, auf welche die Summe der Reihe bei unendlichem Wachsen der Gliederzahl zugeht: eine unendliche Reihe, welcher diese Eigenschaft fehlt, ist *divergent.*

§. 2.

Andeutung des Gesichtspuncts, von welchem bei der Untersuchung ausgegangen ist.

Da die Form einer Gleichung, durch welche die Identität zwischen einer unendlichen Reihe und einem geschlossenen Ausdrucke ausgesprochen wird, durch die Veränderung des Werths der Variabeln nicht alterirt wird, so mufs, bei dem Character der Allgemeinheit, welcher der Analysis eigen ist, als Regel angenommen werden, dafs die Gleichung für jeden Werth der Variabeln gültig sei. Zwar läfst sich denken, dafs die besondern Eigenschaften einer einzelnen Function davon eine Ausnahme begründen könnten; aber im Allgemeinen, und bis für den einzelnen Fall das Gegentheil nachgewiesen ist, mufs die Gültigkeit der Gleichung für alle Werthe der Variabeln vorausgesetzt werden.

Die gegenwärtig herrschende Auffassung der unendlichen Reihen widerspricht dieser allgemeinen Regel.

Wenn man nemlich von den wenigen Reihen absieht, welche für jeden Werth der Variabeln convergent bleiben, so wird bei allen übrigen Reihen die Gültigkeit der Gleichung, welche die Identität zwischen der Reihe und einem geschlossenen Ausdrucke ausspricht, auf das meistens kurze Intervall beschränkt, wo die Reihe convergirt, wenn auch der geschlossene Ausdruck für die aufserhalb dieses Intervalls liegenden Werthe der Variabeln eine continuirliche Function bleibt.

Es ist daher zu vermuthen, dafs diese Auffassung der unendlichen Reihen unrichtig sein werde, weil sie eine Beschränkung in die Analysis bringt, die ihrer Natur widerstreitet.

Der ursprünglich nur für endliche Reihen geltende Begriff einer Summe ist durch den Hülfsbegriff der Grenze auf convergente Reihen anwendbar, schlechterdings aber nicht auf divergente, und deshalb nimmt man an, dafs die Gleichung für das Intervall der Divergenz ihre Gültigkeit verliert. Ist es denn aber nothwendig, die Auffassung der Reihe als Summe auf das Intervall auszudehnen, wo die Reihe divergirt? Die Natur der Analysis führt es mit sich, dafs die Bedeutung einer Gleichung für verschiedene Intervalle der unabhängigen Gröfse eine verschiedene sein kann, ohne dafs die Identität der für das gesammte Intervall gültigen Gleichung aufgehoben würde. So ist die Gleichung

$$f(m) = a^m,$$

wo m eine ganze Zahl bedeutet, für alle, sowohl positive als negative Werthe von m gültig; für das Intervall, wo m positiv ist, bedeutet a^m: dafs das Product von m Factoren $= a$ zu nehmen sei; für das Intervall, wo m negativ ist, tritt die complicirtere Bedeutung ein, dafs erst a durch Division in die Einheit in $\frac{1}{a}$ zu verwandeln und sodann das Product von m Factoren $= \frac{1}{a}$ zu nehmen sei. Wollte man die erstere Bedeutung auch für das zweite Intervall festhalten, so müfste man zu dem Ausspruch gelangen, dafs die Gleichung $f(m) = a^m$ für negative Werthe von m keine Gültigkeit habe.

Sollte nun nicht vielleicht bei Gleichungen, welche die Identität eines geschlossenen Ausdrucks und einer unendlichen Reihe darstellen, ein ähnlicher Wechsel der Bedeutung eintreten, der den bei divergenten Reihen scheinbar Statt findenden Widerspruch hebt?

Dies ist der Standpunct, von dem ich bei der Untersuchung ausgegangen bin, und der folgende Paragraph wird zeigen, dafs in der That bei divergenten Reihen dieser Fall eintritt.

§. 3.

Bedeutung der unendlichen Reihen mit wechselnden Zeichen.

Eine jede Gleichung, mithin auch diejenige, deren eine Seite eine unendliche Reihe bildet, hat die Bedeutung, dafs mit den darin vorkommenden Gröfsen gewisse Rechnungs-Operationen vorzunehmen sind und dafs deren Resultat an Gröfse dem Resultat der andern Seite der Gleichung gleich ist.

Ist nun $f(x)$ der geschlossene Ausdruck, dem die unendliche Reihe

$$\pm a + bx - cx^2 + dx^3 - ex^4 + \cdots$$

nach den Regeln analytischer Rechnungen gleich zu setzen ist, so ist zu untersuchen, welche Rechnungs-Operationen mit den Gliedern der Reihe vorgenommen werden müssen, d. i., welche Bedeutung man der Reihe beilegen müsse, damit die Gleichung

$$\text{(I.)} \qquad f(x) = \pm a + bx - cx^2 + dx^3 - \cdots$$

für das Intervall der Convergenz und für das Intervall der Divergenz gültig sein könne.

Ist die aus den n ersten Gliedern der unendlichen Reihe bestehende endliche Reihe

$$\pm a + bx - cx^2 + dx^3 - \cdots + px^{n-1} = S_n$$

und läfst man n ins Unendliche wachsen, so ist bekanntlich für das Intervall, wo die Reihe convergirt:

$$\text{(II.)} \quad \lim. S_n = f(x);$$

es findet mithin die Gleichung (I.) für das Intervall der Convergenz Statt, wenn

$$\pm a + bx - cx^2 + dx^3 - \cdots = \lim. S_n$$

ist; d. h. die convergente Reihe kann als Summe ihrer Glieder aufgefafst werden, und durch fortgesetztes Summiren nähert man sich immer mehr der Grenze $f(x)$.

Um nun die Bedeutung zu ermitteln, welche der unendlichen Reihe beizulegen sei, damit die Gleichung (I.) allgemein, auch für das Intervall der Divergenz, gültig sein könne, gehen wir aus von der Betrachtung des Summen-Ausdrucks S_n der n gliedrigen Reihe

$$\pm a + bx - cx^2 + dx^3 - \cdots \pm px^{n-1},$$

über dessen Bedeutung überall kein Zweifel sein kann, wenn man auch in den meisten Fällen nicht im Stande ist, denselben als bestimmte Function von x und n darzustellen. Suchen wir zuvörderst die allgemeine Form des Summen-Ausdrucks S_n.

Die Coëfficienten der Reihe müssen als Function von n angesehen werden; S_n kann daher nur eine Function von x und n sein, und diese Function mufs nach der Gleichung (II.) bei unendlichem Wachsen von n für alle in dem Intervall der Convergenz liegenden Werthe von x in $f(x)$ übergehen. Setzt man daher

$$S_n = f(x) + F(x, n),$$

so mufs $F(x, n)$ für alle Werthe von x, die in dem Intervall der Convergenz liegen, verschwinden, wenn n in's Unendliche wächst.

In der n gliedrigen Reihe kann man nach einem bekannten Satze immer x so grofs nehmen, dafs das Zeichen des letzten Gliedes px^{n-1} über das Zeichen der Summe S_n entscheidet. Da nun px^{n-1} positiv ist, wenn n gerade, und negativ, wenn n ungerade ist, so mufs bei dem Werthe von S_n das Nämliche eintreten. Dies kann aber, weil der allgemeine Ausdruck $F(x, n)$ dieselbe Form behält, es möge n gerade oder ungerade vorausgesetzt werden, nur dadurch Statt haben, dafs $F(x, n)$ ein doppeltes Vorzeichen hat, von welchem das eine oder das andere gilt, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Die allgemeine Form des Summen-Ausdrucks ist daher

$$S_n = f(x) \pm F(x, n).$$

So z. B. findet man für die Reihe

$$1-2x+3x^2-\cdots\pm nx^{n-1}$$
$$S_n=\frac{1}{(1+x)^2}\pm\frac{n(1+x)+1}{(1+x)^2}\cdot x^n;$$

für die Reihe

$$2x-\tfrac{1}{2}(2x)^2+\tfrac{1}{3}(2x)^3-\cdots\pm\frac{1}{n}(2x)^n$$
$$S_n=\log(1+2x)\pm\int\frac{(2x)^n\,dx}{1+2x};$$

endlich für die Reihe

$$z-\tfrac{1}{3}z^3+\tfrac{1}{5}z^5-\cdots\pm\frac{z^{2n+1}}{2n+1}$$
$$S_n=\text{arc. min. (tang.}=z)\pm\int\frac{z^{2n+2}\,dz}{1+z^2}.$$

Die Gleichung

$$S_n=f(x)\pm F(x,n)$$

hat demnach, wenn $F(x, n)$ nicht verschwindet, zwei verschiedene Formen, nemlich

$$S_{n_1}=f(x)+F(x,n),$$

welche für ein gerades n gültig ist, mithin die Werthe

$$\begin{aligned}S_2&=(\pm a+bx)\\ S_4&=(\pm a+bx-cx^2+dx^3)\\ S_6&=(\pm a+bx-cx^2+dx^3-ex^4+fx^5)\\ &\text{etc.}\end{aligned}$$

bestimmt, und

$$S_{n_2}=f(x)-F(x,n),$$

welche für ein ungerades n gilt, mithin die Werthe

$$\begin{aligned}S_1&=(\pm a)\\ S_3&=(\pm a+bx-cx^2)\\ S_5&=(\pm a+bx-cx^2+dx^3-ex^4)\\ &\text{etc.}\end{aligned}$$

bestimmt.

Die Gleichungen

$$\begin{aligned}S_{n_1}&=f(x)+F(x,n)\\ S_{n_2}&=f(x)-F(x,n)\end{aligned}$$

enthalten aber beide den allgemeinen Werth von n: der Ausdruck S_{n_1} hat daher auch für ein ungerades n eine Bedeutung; nemlich S_{n_1} ist das Glied,

welches in der nach dem Gesetze $S_{n_1} = f(x) + F(x, n)$ gebildeten Reihe $S_2, S_4, S_6, \ldots S_{n-1}, S_{n+1}, \ldots$ dem ungeraden Index n correspondirt: eben so bedeutet S_{n_2}, wenn n gerade, das Glied, welches in der nach dem Gesetze $S_{n_2} = f(x) - F(x, n)$ gebildeten Reihe $S_1, S_3, S_5, \ldots S_{n-1}, S_{n+1}, \ldots$ dem geraden Index n correspondirt.

Es können demnach die Gleichungen

$$S_{n_1} = f(x) + F(x, n)$$
$$S_{n_2} = f(x) - F(x, n)$$

auf einen und denselben Werth von n bezogen werden, wenn man, je nachdem n gerade oder ungerade ist, entweder S_{n_1}, oder S_{n_2} die vorhin bezeichnete Bedeutung beilegt, und man erhält alsdann die Gleichung

$$\text{(III.)} \qquad \tfrac{1}{2}(S_{n_1} + S_{n_2}) = f(x),$$

welches auch der Werth von n und $F(x, n)$ sein möge.

Vergleicht man die Gleichungen (I.) und (III.), so ergiebt sich, dafs die Gleichung (I.) allgemeine Gültigkeit haben kann, d. i. sowohl für das Intervall der Divergenz, als für das Intervall der Convergenz, wenn die Bedeutung der Reihe auf die Weise aufgefafst wird, dafs mit ihren Gliedern die durch den Ausdruck $\frac{1}{2}(S_{n_1} + S_{n_2})$ bezeichnete Operation vorgenommen werden solle.

Diese Rechnungs-Operation ist folgende. Es wird der Summenwerth der ersten n Glieder der Reihe gebildet, für ein beliebiges n; dieser ist S_{n_1}, wenn n gerade, S_{n_2} wenn n ungerade ist. Im ersten Falle berechnet man den Werth von S_{n_2}, indem man S_{n_2} als das zum Index n gehörige Glied der Reihe $S_1, S_3, S_5, S_7, \ldots$ betrachtet: im letzten Falle berechnet man den Werth von S_{n_1}, indem man S_{n_1} als das zum Index n gehörige Glied der Reihe $S_2, S_4, S_6, \ldots$ betrachtet: endlich nimmt man von S_{n_1} und S_{n_2} das arithmetische Mittel.

Nimmt man das ganz beliebige $n =$ unendlich, so wird für den Fall, wo die Reihe convergirt, $S_{n_1} = S_{n_2} = S_n$, weil $F(x, n)$ verschwindet, und es gehet daher für convergente Reihen die Gleichung (III.) in die Gleichung (II.) über, nemlich in

$$\lim. S_n = f(x).$$

Die complicirtere Operation reducirt sich demnach, in dem Moment, wo die divergente Reihe in eine convergente übergeht, auf eine einfache Summirung; es wird daher bei diesem Übergange die Identität der Gleichung conservirt.

In §. 19. wird gezeigt werden, dafs diese Bedeutung der divergenten Reihen noch aus einem andern Gesichtspuncte aufgefafst und auf ein schon bekanntes merkwürdiges Gesetz zurückgeführt werden kann. Der Kürze wegen werde ich in der Folge den Ausdruck gebrauchen: „Eine divergente Reihe ist als *arithmetisches Mittel* aufzufassen." Es ist aber unter diesem arithmetischen Mittel die vorher bezeichnete, an den Gliedern der Reihe vorzunehmende Rechnungs-Operation zu verstehen.

Das Vorhergehende giebt folgenden Satz, von welchem später nochmals Gebrauch gemacht werden wird:

Satz (IV.) Ist $f(x)$ die Grenze der Summe der unendlichen Reihe

$$\pm a + bx - cx^2 + dx^3 - \cdots$$

für das Intervall, wo die Reihe convergirt, so ist dieselbe Function $f(x)$ der Werth der unendlichen Reihe für das Intervall der Divergenz, wenn die Reihe als arithmetisches Mittel aufgefafst wird.

Wenn man im Stande ist, den allgemeinen Summen-Ausdruck S_n der ersten n Reihen-Glieder darzustellen, so erhält man unmittelbar den Werth $f(x)$ der divergenten Reihe durch die Gleichung

$$f(x) = \tfrac{1}{2}(S_{n_1} + S_{n_2}).$$

So z. B. ist nach den oben angeführten Werthen von S_n der Werth der Reihe

$$x - 2x^2 + 3x^3 - 4x^4 + \cdots = \frac{x}{(1+x)^2}$$

divergent, wenn $x \gtreqless 1$.

Der Werth der Reihe

$$2x - \tfrac{1}{2}(2x)^2 + \tfrac{1}{3}(2x)^3 - \cdots = \log(1+2x)$$

ist divergent, wenn $x > \tfrac{1}{2}$

und der Werth der Reihe

$$z - \tfrac{1}{3}z^3 + \tfrac{1}{5}z^5 - \cdots = \text{arc. min. (tang.} = z)$$

ist divergent, wenn $z > 1$.

Da man jedoch in den wenigsten Fällen den allgemeinen Summen-Ausdruck zu bilden im Stande ist, so ist die Anwendung dieser Methode selten möglich. Es wird aber im Abschnitt II. gezeigt werden, dafs es noch andre Mittel giebt, den Werth divergenter Reihen zu finden.

§. 4.

Reihen mit bleibenden Zeichen.

Eine unendliche Reihe mit bleibenden Zeichen

$$f(x) = \pm a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots$$

läfst sich durch die Substitution von $-y$ statt x in eine Reihe mit wechselnden Zeichen verwandeln, nemlich

$$f(-y) = \pm a - by + cy^2 - dy^3 + \cdots$$

Da nun diese Reihe nach §. 3. die Bedeutung $\frac{1}{2}(S_{n_1} + S_{n_2})$ hat, so erhält man, wenn die Substitution von $-x$ statt y, S_n in $\mathfrak{S}_n$ verwandelt,

$$f(x) = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{S}_{n_1} + \mathfrak{S}_{n_2}).$$

Ist z. B.

$$f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots,$$

so erhält man

$$f(-y) = 1 - 2y + 3y^2 - 4y^3 + \cdots,$$

$$S_{n_1} = \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{n(1+y)+1}{(1+y)^2}\, y^n,$$

$$S_{n_2} = \frac{1}{(1+y)^2} - \frac{n(1+y)+1}{(1+y)^2}\, y^n,$$

daher

$$\mathfrak{S}_{n_1} = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{n(1-x)+1}{(1-x)^2}(-x)^n,$$

$$\mathfrak{S}_{n_2} = \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{n(1-x)+1}{(1-x)^2}(-x)^n,$$

folglich

$$f(x) = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{S}_{n_1} + \mathfrak{S}_{n_2}) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Es ist daher bei den Reihen mit bleibenden Zeichen gleichfalls die Auffassung als arithmetisches Mittel im Allgemeinen geboten; und nur für den Fall der Convergenz kann die Reihe die Summe ihrer Glieder bedeuten.

Der Satz IV. in §. 3. findet aus dem nemlichen Grunde auch auf die Reihen mit bleibenden Zeichen seine Anwendung.

II.

Bestimmung des Werths divergenter Reihen.

§. 5.

Möglichkeit eines directen Verfahrens.

Ist man im Stande, den allgemeinen Summen-Ausdruck für die n ersten Glieder einer Reihe

$$\pm a + bx - cx^2 + dx^3 - ex^4 + \cdots$$

zu bilden, so geht aus §. 3. hervor, dafs sich alsdann leicht der Werth der Reihe $= f(x)$ mit völliger Genauigkeit angeben läfst. In den Fällen, wo der allgemeine Summen-Ausdruck nicht gefunden werden kann, mufs man sich begnügen, den numerischen Werth der Reihe für den gegebenen speciellen Werth von x näherungsweise zu bestimmen.

Bei den convergenten Reihen wird zufolge der Gleichung $f(x) = \lim. S_n$ der Werth durch Summiren der einzelnen Glieder der Reihe ermittelt, und der Näherungs-Werth, zu welchem man durch dieses Verfahren gelangt, ist desto genauer, je mehr Glieder der Reihe man summirt.

Für die unendlichen Reihen im Allgemeinen, mit Einschlufs der divergenten, giebt die Gleichung $f(x) = \frac{1}{2}(S_{n_1} + S_{n_2})$ gleichfalls ein directes Näherungs-Verfahren an. Wenn man das allgemeine Gesetz nicht kennt, nach welchem die Reihen der Summen gerader und ungerader Ordnung fortschreiten, so läfst sich eine genaue Berechnung von S_{n_1} oder S_{n_2}, als eines zu einem bestimmten Index gehörigen Gliedes einer der Reihen, nicht ausführen; man kann aber den Werth von S_{n_1} oder S_{n_2} näherungsweise durch Interpolation bestimmen. Wendet man den durch Interpolation gewonnenen Werth an, und führt im Übrigen die in §. 3. bezeichnete Operation aus, so gelangt man zu einem Näherungswerthe der Reihe.

Es sei z. B. die gegebene Reihe:

$$1 + x - \frac{1.1}{1.2}x^2 + \frac{1.1.3}{1.2.3}x^3 + \frac{1.1.3.5}{1.2.3.4}x^4 + \cdots,$$

deren allgemeines Glied $\pm \frac{1.1.3.5\ldots(2n-5)(2n-3)}{1.2.3.4\ldots(n-1).n}x^n$ ist. Diese Reihe ist divergent, wenn $x \geqq 1$, und für $x = 1$:

$$1 + 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{5}{8} + \tfrac{7}{8} - \tfrac{21}{16} + \cdots,$$

oder

$$2 - [\tfrac{5}{8} - \tfrac{7}{8} + \tfrac{21}{16} - \tfrac{33}{16} + \tfrac{429}{128} - \tfrac{715}{128} + \cdots = 2 - P;$$

wenn P den Werth der in Parenthese eingeschlossenen Reihe bezeichnet; der demnach zu bestimmen ist.

Da S_{n_1} die Summe von n Gliedern bezeichnet, deren letztes positiv, und S_{n_2} die Summe von n Gliedern, deren letztes negativ ist, so ergiebt die unmittelbare Summirung der Reihe P:

	für $n = 2$, $S_2 = -\ 0{,}25$;
für $n = 1$, $S_1 = +0{,}625$;	$n = 4$, $S_4 = -\ 1{,}00$;
$n = 3$, $S_3 = +1{,}0625$;	$n = 6$, $S_6 = -\ 3{,}23437$;
$n = 5$, $S_5 = +2{,}35156$;	$n = 8$, $S_8 = -\ 10{,}14061$;
$n = 7$, $S_7 = +6{,}26171$;	$n = 10$, $S_{10} = -\ 32{,}22066$;
. . . .	$n = 12$, $S_{12} = -104{,}76939$.
	. . . .

Der Werth von n ist willkürlich und es sei $n = 7$, dann ist $S_{7_1} = +6{,}26171$; S_{7_2} ist nicht durch die Summirung gegeben, indem wir nur für die geraden Zahlen S_{2_2}, S_{4_2}, ... die Werthe gefunden haben. Betrachtet man aber S_{7_2} als ein Glied der Reihe S_{2_2}, S_{4_2}, ..., welches zum Index 7 gehört, so läfst sich der Näherungswerth durch Interpolation finden, und der ist ersichtlich negativ. Sieht man daher blofs auf die absolute Gröfse, so ist S_{7_2} das Glied, welches in der Reihe

Index	$x_0 = 0$,	$x_1 = 1$,	$x_2 = 2$,	$x_3 = 3$,	$x_4 = 4$,	$x_5 = 5$,
Corresp. Glied	0,25,	1,00,	3,23437,	10,14061,	32,22066,	104,76939

zum Index $x' = \frac{5}{2}$ correspondirt. Da diese Reihe sehr rasch steigt, so bringe ich sie, um mit mehr Sicherheit interpoliren zu können, auf die Form

Index	$x_0 = 0$,	$x_1 = 1$,	$x_2 = 2$,	$x_3 = 3$,	$x_4 = 4$,	$x_5 = 5$,
Corresp. Glied	0,25,	0,333...(3),	$0{,}35937(3)^2$,	$0{,}3755...(3)^3$,	$0{,}39779(3)^4$,	$0{,}43115(3)^5$,

und setze

$$0{,}25 = u_0,\quad 0{,}333... = u_1,\quad 0{,}35937 = u_2,\quad 0{,}3755... = u_3,\quad 0{,}39779 = u_4,\quad 0{,}43115 = u_5.$$

Es ist alsdann $S_{7_2} = u_{\frac{5}{2}}.(3)^{\frac{5}{2}}$.

Wendet man nun die Interpolationsformel von *Lagrange*

$$u_n = \frac{(x_n - x_1)(x_n - x_2)\ldots}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots} u_0 + \frac{(x_n - x_0)(x_n - x_2)\ldots}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\ldots} u_1 + \cdots$$

hier an, welche für den Werth $x_n = \frac{5}{2}$ sich in

$$u_{\frac{5}{2}} = \frac{1}{2^8}[3(u_0 + u_5) - 25(u_1 + u_4) + 150(u_2 + u_3)]$$

gestaltet, so erhält man $u_{\frac{5}{2}} = 0{,}367204$; daher ist

$$S_{7_2} = -0{,}367204.(3)^{\frac{5}{2}} \quad \text{oder} \quad S_{7_2} = -5{,}7241.$$
$$\text{Es ist aber} \quad S_{7_1} = +6{,}2617;$$
$$\text{folglich ist} \quad \tfrac{1}{2}(S_{7_1} + S_{7_2}) = 0{,}2688$$

ein Näherungswerth der Reihe P, und die gegebene Reihe hat den Näherungswerth $2 - P = 1{,}7312$. Beachtet man nun, dafs die gegebene Reihe aus der Binomialreihe $(1+y)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1.1}{1.2.2^2}y^2 + \cdots$ entspringt, wenn man $y = 2x$ setzt, so erhält man für die Reihe der geschlossenen Ausdrücke $\sqrt{(1+2x)} = \sqrt{3}$, dessen Werth $= 1{,}73205\ldots$ ist. Der Unterschied zwischen dem Näherungswerthe, den wir fanden, und dem wahren Werthe der Reihe, ist daher kleiner als 0,0009.

Als zweites Beispiel diene die Reihe

$$y - \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{3}y^3 - \tfrac{1}{4}y^4 + \cdots\text{: allgem. Glied } \pm\frac{1}{n}y^n;$$

welche für den Werth $y = 1{,}5$ in die divergente Reihe

$$1{,}5 - 1{,}125 + 1{,}125 - 1{,}26563 + 1{,}51876 - 1{,}89844 + \cdots$$

übergeht. Setzt man diese Reihe $= 1{,}5 - P$, so ist

$$P = 1{,}26563 - 1{,}51876 + 1{,}89844 - 2{,}44085 + 3{,}20362 - 4{,}27149$$
$$+ 5{,}76650 - 7{,}86341 + 10{,}81219 - 14{,}97073 + 20{,}85209 - \cdots$$

und die Summirung giebt

$$\begin{array}{ll} S_1 = + 1{,}26563, & \\ S_3 = + 1{,}64531, & \\ S_5 = + 2{,}40808, & S_2 = -0{,}25313, \\ S_7 = + 3{,}90309, & S_4 = -0{,}79554, \\ S_9 = + 6{,}85187, & S_6 = -1{,}86341, \\ S_{11} = +12{,}73323, & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \end{array}$$

Nimmt man hier das beliebige n gerade und $n = 6$, so ist $S_{6_2} = -1{,}8634$. Zur Bestimmung von S_{6_1} kann man die Reihe

Index	0,	1,	2,	3,	4,	5,
Corresp. Glied	1,26563,	1,23398$(\frac{4}{3})$,	1,35455$(\frac{4}{3})^2$,	1,64664$(\frac{4}{3})^3$,	2,16797$(\frac{4}{3})^4$,	3,02165$(\frac{4}{3})^5$

gebrauchen, und die Anwendung der Interpolationsformel giebt $u_{\frac{5}{2}} = +1{,}4757$;

$$\text{daher } S_{6_1} = 1{,}4757.(\tfrac{4}{3})^{\frac{5}{2}} \quad \text{oder} \quad S_{6_1} = +3{,}0292;$$
$$\text{da nun} \quad S_{6_2} = -1{,}8634,$$
$$\text{so ist} \quad \tfrac{1}{2}(S_{6_1} + S_{6_2}) = 0{,}5829 = P$$

und die gegebene Reihe $1{,}5 - P$ ist $= 0{,}9171$.

Die gegebene Reihe ist aber $\log(1+y) = \log(2,5) = 0,9163\ldots$; der gefundene Näherungswerth differirt mithin nur um 0,0008 von dem wahren Werthe.

Um auch ein Beispiel von der Anwendung dieses Verfahrens auf eine convergente Reihe zu geben, setze ich in der letzten Reihe $y = 1$; man hat alsdann die Reihe

$$\log 2 = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \cdots$$

Die Summirung giebt

$$\begin{array}{ll} S_1 = 1,00, & S_2 = 0,5, \\ S_3 = 0,8333\ldots, & S_4 = 0,5833\ldots, \\ S_5 = 0,78333\ldots, & S_6 = 0,6166\ldots, \\ S_7 = 0,759524, & S_8 = 0,634524, \\ S_9 = 0,745635, & S_{10} = 0,645635, \\ S_{11} = 0,736544; & S_{12} = 0,653211. \end{array}$$

Nimmt man $n = 7$, so ist

$$\begin{array}{rrl} & S_{7_1} = & 0,759524, \\ \text{und die Interpolation giebt} & S_{7_2} = & 0,626618; \\ \hline \text{mithin ist} & \tfrac{1}{2}(S_{7_1} + S_{7_2}) = & 0,693071. \end{array}$$

Nimmt man $n = 6$, so ist

$$\begin{array}{rrl} & S_{6_2} = & 0,616667, \\ \text{und die Interpolation giebt} & S_{6_1} = & 0,770172; \\ \hline \text{mithin} & \tfrac{1}{2}(S_{6_1} + S_{6_2}) = & 0,693419. \end{array}$$

Es ist aber $\log 2 = 0,693147\ldots$

Es ist nur zweifelhaft, ob sich dieses Verfahren zu einer practischen Methode werde ausbilden lassen; denn es liegt in der Natur der Sache, dafs man einen gröfseren oder geringeren Grad der Näherung erhalten werde, je nachdem die angewendete Interpolationsformel mehr oder weniger dem unbekannten Gesetze der Reihe entspricht. Ich betrachte daher diese Methode für jetzt nicht als practisch; wenn es gleichwohl möglich ist, dafs sie durch zweckmäfsige Auswahl der Interpolationsformel und Vorbereitung der zu interpolirenden Reihen dazu ausgebildet werden könnte; ich habe dieselbe aber nicht übergehen dürfen, weil ihr Verfahren direct aus der Bedeutung der divergenten Reihen folgt, und daher besonders geeignet ist, die Wahrheit dieser Bedeutung in das rechte Licht zu stellen.

§. 6

Transformation der divergenten Reihen in convergente.

Das einfachste Mittel zur Bestimmung des Werths einer divergenten Reihe ist die Transformation derselben in eine convergente Reihe, deren Summe man alsdann auf die gewöhnliche Weise berechnet.

Ist der Werth einer divergenten Reihe, welche als arithmetisches Mittel aufgefafst wird, $= f(x)$, so wird es auch eine convergente Reihe geben können, welche die nemliche Gröfse zur Summe hat.

Das Problem der Transformation hat nun die Bedeutung: eine convergente Reihe zu suchen, welche den Werth der gegebenen divergenten Reihe zur Summe hat.

Wir halten uns zunächst an die von ***Euler*** häufig angewendeten Transformationsformeln.

Hat die gegebene divergente Reihe wechselnde Zeichen und ist

$$f(x) = \pm a + bx - cx^2 + dx^3 - ex^4 + \cdots,$$

so giebt die Substitution $x = \frac{y}{1-y}$, woraus $y = \frac{x}{1+x}$ folgt, wenn die Potenzen von $\frac{y}{1-y}$ in Reihen entwickelt werden:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{y}{1-y}\right) = \pm a + by + by^2 &+ by^3 + by^4 + \cdots \\ -cy^2 &- 2cy^3 - 3cy^4 - \\ &+ dy^3 + 3dy^4 + \\ &\qquad - ey^4 + \end{aligned}$$

und setzt man $c - b = \Delta b$, $d - 2c + b = \Delta^2 b$, u. s. w. und statt y seinen Werth $\frac{x}{1+x}$, so erhält man

$$f(x) = \pm a + b\left(\frac{x}{1+x}\right) - \Delta b\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \Delta^2 b\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 - \Delta^3 b\left(\frac{x}{1+x}\right)^4 + \cdots:$$

eine Reihe, die convergent ist, wenn die Differenzenreihe der Coëfficienten fällt, oder langsam steigt; steigen die Differenzen rasch, so kann die gefundene Reihe divergent sein; die Wiederholung des Transformations-Verfahrens führt aber sicher zu einer convergenten Reihe.

Hat die gegebene divergente Reihe bleibende Zeichen, und ist

$$F(z) = \pm a + bz + cz^2 + dz^3 + \cdots,$$

so führt die Substitution $z = \frac{y}{1+y}$ zu der Transformationsformel

$$F(z) = \pm a + b\left(\frac{z}{1-z}\right) + \Delta b\left(\frac{z}{1-z}\right)^2 + \Delta^2 b\left(\frac{z}{1-z}\right)^3 + \cdots,$$

welche jedoch nur dann eine convergente Reihe bildet, wenn die Differenzenreihe stark fällt.

Die Zulässlichkeit dieser *Euler*schen Transformationen, bei welchen die allgemeinen Regeln analytischer Rechnungen befolgt sind, wird bei convergenten Reihen, welche alsdann in mehr convergirende verwandelt werden, von Niemanden bezweifelt werden können; denn die Gleichungen

$$f(x) = \pm a + bx - cx^2 + dx^3 - \cdots = \pm a + b\left(\frac{x}{1+x}\right) - \Delta b\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \cdots,$$

$$F(z) = \pm a + bz + cz^2 + dz^3 + \cdots = \pm a + b\left(\frac{z}{1-z}\right) + \Delta b\left(\frac{z}{1-z}\right)^2 + \cdots$$

sind in diesem Falle, auch nach der jetzt herrschenden Ansicht, identische Gleichungen.

Die Gültigkeit der Anwendung der Transformation auf die Fälle, wo die Reihen $\pm a + bx - cx^2 + \cdots$ und $\pm a + bz + cz^2 + \cdots$ divergent sind, läfst sich aber durch folgenden Beweis begründen.

Wenn die Reihen für die Intervalle $x > x'$, $z > z'$ divergent sind, so werden sie für die Intervalle $x < x'$, $z < z'$ convergent sein; für diese Intervalle hat man demnach

$$f(x) = \pm a + bx - cx^2 + \cdots = \pm a + b\left(\frac{x}{1+x}\right) - \Delta b\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \cdots,$$

$$F(z) = \pm a + bz + cz^2 + \cdots = \pm a + b\left(\frac{z}{1-z}\right) + \Delta b\left(\frac{z}{1-z}\right)^2 + \cdots,$$

und es sind $f(x)$, $F(z)$ die Summen, sowohl der auf der linken, als der auf der rechten Seite stehenden Reihen.

Werden $x > x'$ und $z > z'$, so bleiben, der Voraussetzung nach, die auf der rechten Seite stehenden Reihen convergent; für diese behalten also $f(x)$ und $F(z)$ die Bedeutung der Summe dieser Reihen. Die Reihen auf der linken Seite werden divergent: $f(x)$ und $F(z)$ können daher für diese nicht mehr die Bedeutung einer Summe haben. Nach dem Satze IV. §. 3. sind aber die Functionen $f(x)$ und $F(z)$ für das Intervall der Divergenz die Werthe der als arithmetisches Mittel aufgefafsten Reihen, wenn die nemlichen Functionen $f(x)$ und $F(z)$ für das Intervall der Convergenz die Summen der Reihen darstellen. Die convergenten Reihen

$$\pm a + b\left(\frac{x}{1+x}\right) - \Delta b\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \cdots,$$

$$\pm a + b\left(\frac{z}{1-z}\right) + \Delta b\left(\frac{z}{1-z}\right)^2 + \cdots$$

haben demnach Summen, welche den Werthen der divergenten Reihen

$$\pm a + bx - cx^2 + \cdots,$$
$$\pm a + bz + cz^2 + \cdots$$

gleich sind.

§. 7.

Verschiedene Beispiele der Bestimmung des Werths divergenter Reihen.

Es wird zweckmäfsig sein, mehrere Beispiele der Werthbestimmung divergenter Reihen aus den verschiedenen Gebieten der Analysis zu geben. Es sind natürlich nur solche Beispiele gewählt, bei denen die Richtigkeit des Resultats auf andre Weise geprüft werden kann.

1. Die Reihe

$$\frac{2}{1}\cdot x - \frac{2^2}{2}\cdot x^2 + \frac{2^3}{3}\cdot x^3 - \frac{2^4}{4}\cdot x^4 + \cdots, \quad \left(\text{allgem. Glied } \pm\frac{2^n}{n}\cdot x^n\right),$$

welche $\log(1+2x)$ darstellt, ist für den Werth $x=1$ divergent. Transformirt man sie, so ist hier $\frac{x}{1+x}=\frac{1}{2}$, $a=0$, $b=\frac{2}{1}$, $c=\frac{2^2}{2}$, etc., folglich

$\Delta b=0$, $\Delta^2 b=\frac{2}{3}$, $\Delta^3 b=0$, $\Delta^4 b=\frac{2}{5}$, $\Delta^5 b=0$, $\Delta^6 b=\frac{2}{7}$, $\Delta^7 b=0$. $\Delta^8 b=\frac{2}{9}$, $\Delta^9 b=0$, $\Delta^{10} b=\frac{2}{11}$, $\Delta^{11} b=0$, $\Delta^{12} b=\frac{2}{13}$, $\Delta^{13} b=0$, $\Delta^{14} b=\frac{2}{15}$;

man erhält daher die convergente Reihe:

$$= 1 + \tfrac{2}{3}(\tfrac{1}{2})^3 + \tfrac{2}{5}(\tfrac{1}{2})^5 + \tfrac{2}{7}(\tfrac{1}{2})^7 + \tfrac{2}{9}(\tfrac{1}{2})^9 + \tfrac{2}{11}(\tfrac{1}{2})^{11} + \tfrac{2}{13}(\tfrac{1}{2})^{13} + \tfrac{2}{15}(\tfrac{1}{2})^{15} + \cdots;$$

und summirt man die hier aufgeführten 8 Glieder der Reihe, so erhält man den Näherungswerth $=1{,}098612$, der noch in der 6ten Decimale richtig ist, da $\log(1+2x)=\log 3=1{,}0986122\ldots$

2. Die Reihe

$$1 + y - \frac{1}{1.2}y^2 + \frac{1.3}{1.2.3}y^3 - \cdots \quad \left(\text{allgemeines Glied } \pm\frac{1.3\ldots(2n-5)(2n-3)}{1.2.3\ldots(n-1)n}y^n\right)$$

ist die Entwicklung von $\sqrt{(1+2y)}$ nach der Binomialformel, und ist divergent, wenn $y=1$. Ich bringe sie auf die Form

$$1 + y + \tfrac{1}{2}y^2(y-1) - y^3 Y,$$

wo die divergente Reihe

$$Y = \tfrac{5}{8}y - \tfrac{7}{8}y^2 + \tfrac{21}{16}y^3 - \cdots$$

zu transformiren ist.

Es ist hier $a=0$, $b=\frac{5}{8}$, $c=\frac{7}{8}$, ..., mithin

$\Delta b=\frac{1}{4}$, $\Delta^2 b=\frac{3}{16}$, $\Delta^3 b=\frac{1}{8}$, $\Delta^4 b=\frac{13}{128}$, $\Delta^5 b=\frac{10}{128}$, $\Delta^6 b=\frac{17}{256}$,
$\Delta^7 b=\frac{7}{128}$, $\Delta^8 b=\frac{49}{1024}$.

Man erhält demnach die transformirte convergente Reihe

$$Y = \tfrac{5}{8}\left(\frac{y}{1+y}\right) - \tfrac{1}{4}\left(\frac{y}{1+y}\right)^2 + \tfrac{3}{16}\left(\frac{y}{1+y}\right)^3 - \cdots$$

Um eine mehr convergirende Reihe zu erhalten, wiederhole man das Verfahren. Es ist alsdann

$$a = 0, \quad b = \tfrac{5}{8}, \quad \Delta b = -\tfrac{3}{8}, \quad \Delta^2 b = \tfrac{5}{16}, \quad \Delta^3 b = -\tfrac{5}{16}, \quad \Delta^4 b = \tfrac{45}{128},$$
$$\Delta^5 b = -\tfrac{53}{128}, \quad \Delta^6 b = \tfrac{143}{256}, \quad \Delta^7 b = -\tfrac{193}{256}, \quad \ldots$$

und man erhält

$$Y = \tfrac{5}{8}\left(\frac{y}{1+2y}\right) + \tfrac{3}{8}\left(\frac{y}{1+2y}\right)^2 + \tfrac{5}{16}\left(\frac{y}{1+2y}\right)^3 + \cdots$$

Setzt man für y den Werth $= 1$ und summirt die 8 Glieder der Reihe, deren Coëfficienten hier angegeben sind, so erhält man den Näherungswerth $Y = 0{,}26784$. Es stimmt mithin der Näherungswerth der gegebenen Reihe $2 - Y = 1{,}73216$, mit dem wahren Werthe von $\sqrt{3} = 1{,}73205\ldots$ bis auf die 4te Decimalstelle überein.

3. Als Beleg für die Behauptung, dafs man zwei unendliche convergente Reihen nicht unbedingt in gewöhnlicher Weise mit einander multipliciren dürfe, ist öfter angeführt worden, dafs die Reihe

$$S = \frac{1}{\sqrt[4]{1}}x - \frac{1}{\sqrt[4]{2}}x^2 + \frac{1}{\sqrt[4]{3}}x^3 - \cdots, \quad \left(\text{allgem. Glied } \pm\frac{1}{\sqrt[4]{n}}x^n\right),$$

welche für $x = 1$ convergirt, mit sich selbst multiplicirt die Reihe

$$\frac{1}{\sqrt[4]{1}}x^2 - \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)x^3 + \left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}} + \frac{1}{\sqrt[4]{(2.2)}} + \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)x^4 - \cdots$$

giebt, welche für $x = 1$ divergent ist und daher für verwerflich gilt. Ich werde zeigen, dafs diese divergente Reihe eben den Werth $(S)^2$ hat.

Man findet leicht durch Transformation der Reihe S in eine mehr convergirende, dafs $S = 0{,}5545$ ist; es ist daher $(S)^2 = 0{,}3075$. Transformirt man die obige divergente Reihe in eine convergente, so hat man,

$$a = 0, \quad b = 1, \quad \Delta b = 0{,}6818, \quad \Delta^2 b = -0{,}1369, \quad \Delta^3 b = 0{,}0573,$$
$$\Delta^4 b = -0{,}0308, \quad \Delta^5 b = 0{,}0182, \quad \Delta^6 b = -0{,}0091$$

und für $x = 1$ erhält man die convergente Reihe

$$1\left(\tfrac{1}{2}\right) - 0{,}6818\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 - 0{,}1369\left(\tfrac{1}{2}\right)^3 - 0{,}0573\left(\tfrac{1}{2}\right)^4 - 0{,}0308\left(\tfrac{1}{2}\right)^5 - 0{,}0182\left(\tfrac{1}{2}\right)^6$$
$$- 0{,}0091\left(\tfrac{1}{2}\right)^7 - \cdots,$$

deren Summe $= 0{,}3075 = (S)^2$ ist.

4. Die Reihe

$$\log\Gamma(1+x) = -Cx+\tfrac{1}{2}K_2x^2-\tfrac{1}{3}K_3x^3+\tfrac{1}{4}K_4x^4-\cdots,$$

$$\left(\text{allgem. Glied } \pm\frac{1}{n}K_nx^n\right),$$

in welcher C die Constante des Integrallogarithmus $=0{,}5772157$ und K_n die Summe der unendlichen Reihe

$$\left(1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\cdots\right)$$

bezeichnen, wird abgeleitet aus der Gleichung

$$\frac{d\log\Gamma(1+x)}{dx} = -C+\frac{1}{1}\,\frac{x}{1+x}+\frac{1}{2}\,\frac{\tfrac{1}{2}x}{1+\tfrac{1}{2}x}+\cdots,$$

indem die Glieder $\frac{x}{1+x}$, $\frac{\frac{1}{2}x}{1+\frac{1}{2}x}$, ... nach Potenzen von x entwickelt werden; und da nun die dadurch entstehenden Reihen divergent sind, wenn $x \gtreqless 1$ ist, so wird angenommen, dafs die gegebene Reihe nur für die Werthe $x<1$ gelte.

Ich werde zeigen, dafs die Reihe auch für gröfsere Werthe von x, z. B. für $x=2$, ein richtiges Resultat giebt.

Bringt man die Reihe auf die Form

$$-Cx+\tfrac{1}{2}K_2x^2-\tfrac{1}{3}K_3x^3+x^3P,$$

wo

$$P = \tfrac{1}{4}K_4x-\tfrac{1}{5}K_5x^2+\tfrac{1}{6}K_6x^3-\cdots,$$

und nimmt die Werthe von K_1, K_2, ..., wie sie in *Legendre* „Exercices" aufgeführt stehen, so erhält man zur Berechnung des Werths von P:

$$a = 0, \quad b = 0{,}2705808,$$

$\Delta b = -0{,}0631953$, $\Delta^2 b = +0{,}0253669$, $\Delta^3 b = -0{,}0130458$,
$\Delta^4 b = +0{,}0076917$, $\Delta^5 b = -0{,}0049399$, $\Delta^6 b = +0{,}0033661$,
$\Delta^7 b = -0{,}0023973$, $\Delta^8 b = +0{,}0017676$, $\Delta^9 b = +0{,}0013406$,
$\Delta^{10} b = -0{,}0010409$, $\Delta^{11} b = -0{,}0008244$, $\Delta^{12} b = +0{,}0006640$,
$\Delta^{13} b = -0{,}0005428$, $\Delta^{14} b = -0{,}0004494$, ferner $\frac{x}{1+x} = \frac{2}{3}$,

daher

$$P = 0{,}2705808(\tfrac{2}{3})+0{,}0631953(\tfrac{2}{3})^2+0{,}0253669(\tfrac{2}{3})^3+\cdots,$$

und wenn die 15 Glieder dieser Reihe, für welche die Coëfficienten hier angegeben sind, summirt werden, erhält man $P=0{,}2203994$.

Der Näherungswerth der gegebenen Reihe wird daher durch folgende Rechnung gefunden:

$$\tfrac{1}{2}K_2(2)^2 = 3{,}2898681,$$
$$(2)^3 P = 1{,}7631950,$$
$$+5{,}0530631;$$
$$+C(2) = -1{,}1544313,$$
$$-\tfrac{1}{3}K_3(2)^3 = -3{,}2054851,$$
$$+4{,}3599164;$$
$$5{,}0530631 - 4{,}3599164 = 0{,}6931467.$$

Der wahre Werth von $\log \Gamma(1+2)$ ist $= \log 2 = 0{,}69314718\ldots$, mithin ist die Differenz $< 0{,}0000005$.

5. Es wird allgemein angenommen, dafs die Anwendung der Summenformel

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(p-1)}\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{p-1}F(ux^\beta)\,dx = \frac{A_0}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+p-1)}$$
$$+\frac{A_1}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)\ldots(\alpha+\beta+p-1)}+\frac{A_2}{(\alpha+2\beta)(\alpha+2\beta+1)\ldots(\alpha+2\beta+p-1)}+\cdots,$$

in welcher

$$F(u) = A_0 + A_1 u + A_2 u^2 + \cdots$$

ist, nur in den Fällen Statt finden könne, wo die Reihe $A_0 + A_1 u + \cdots$ convergent ist, und demgemäfs beschränkt man bei der Specialisirung $F(u) = \frac{1}{1+u}$ die Gültigkeit der Gleichung

$$\frac{(1+u)^2}{2u^3}\log(1+u) - \frac{1}{2u^2} - \frac{3}{4u} = \frac{1}{1.2.3} - \frac{u}{2.3.4} + \frac{u^2}{3.4.5} - \frac{u^3}{4.5.6} + \cdots$$

auf das Intervall $u < 1$.

Ich werde den Werth der Reihe für $u = 2$ berechnen. Die rechte Seite der Gleichung setze ich $= \frac{1}{6} - P$, wo

$$P = \frac{u}{24} - \frac{u^2}{60} + \frac{u^3}{120} - \cdots$$

Zur Bestimmung des Werths von P hat man

$u = 0$, $b = \frac{1}{24}$, $\Delta b = -\frac{1}{40}$, $\Delta^2 b = \frac{1}{60}$, $\Delta^3 b = -\frac{1}{84}$, $\Delta^4 b = \frac{1}{112}$, $\Delta^5 b = -\frac{1}{144}$, $\Delta^6 b = \frac{1}{180}$, $\Delta^7 b = -\frac{1}{220}$, $\Delta^8 b = \frac{1}{264}$, $\Delta^9 b = -\frac{1}{312}$, $\Delta^{10} b = \frac{1}{364}$, $\Delta^{11} b = -\frac{1}{420}$, $\Delta^{12} b = \frac{1}{480}$, $\Delta^{13} b = -\frac{1}{544}$, $\Delta^{14} b = \frac{1}{612}$,

mithin, da $\frac{u}{1+u} = \frac{2}{3}$ ist:

$$P = \tfrac{1}{24}(\tfrac{2}{3}) + \tfrac{1}{40}(\tfrac{2}{3})^2 + \tfrac{1}{60}(\tfrac{2}{3})^3 + \cdots$$

und die Summirung der ersten 15 Glieder dieser Reihe giebt

$$P = 0{,}0486919,$$

daher

$$\tfrac{1}{6} - P = 0{,}1179748.$$

Der Werth der linken Seite der Gleichung $\frac{9}{16}\log 3 - \frac{1}{8} - \frac{3}{8}$ ist $= 0{,}1179694\ldots$, die Differenz daher $< 0{,}000006$.

6. Als ein Beispiel davon, dafs auch der Werth enorm divergirender Reihen durch wiederholte Anwendung der Transformationsformel gefunden werden könne, beziehe ich mich auf *Lacroix* „Traité des différences et des séries. n. 1046", wo der Werth der Reihe

$$1.x - 1.2.x^2 + 1.2.3.x^3 - \cdots \text{ (allgem. Glied } \pm 1.2.3.4 \ldots n.x^n)$$

für $x = 1$ nach einer Berechnung von *Euler* zu 0,4008 bestimmt wird, mithin erst in der 3ten Decimale abweichend von dem Werthe 0,40365 ..., welcher durch Berechnung der transcendenten Function $\int \frac{e^x dx}{x}$ gefunden wird. (Vergl. *Lacroix* ib. n. 1116).

7. Um endlich auch von der Transformation einer Reihe mit *bleibenden* Zeichen ein einfaches Beispiel zu geben, sei die Reihe

$$S = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \cdots \left(\text{allgem. Glied } + \frac{n(n+1)}{1.2}x^n\right)$$

gegeben, wo

$$a = 1, \quad b = 3, \quad \Delta b = 3, \quad \Delta^2 b = 1, \quad \Delta^3 b = \Delta^4 b = \cdots = 0$$

ist. Die *Euler*sche Formel giebt in diesem Falle, weil die Differenzen, von der 3ten an gerechnet, verschwinden:

$$S = 1 + 3\left(\frac{x}{1-x}\right) + 3\left(\frac{x}{1-x}\right)^2 + \left(\frac{x}{1-x}\right)^3 = \frac{1}{(1-x)^3},$$

mithin für $x > 1$ einen negativen Werth; und darin liegt kein Widerspruch, weil die divergente Reihe nicht als Summe, sondern als arithmetisches Mittel anzusehen ist.

§. 8.

Allgemeinere Auffassung des Problems der Transformation.

Ist die Reihe

$$\pm a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots = F(x)$$

das allgemeine Schema einer unendlichen Reihe, indem die Coëfficienten beliebige positive oder negative endliche Gröfsen sind, so hat man, da alle Reihen, welche hier betrachtet werden, nach der *Maclaurin*schen Formel sich ent-

wickeln lassen:

$$\pm a = F(0), \quad b = \tfrac{1}{1}F'(0), \quad c = \frac{1}{1.2}F''(0) \quad \text{u. s. w.},$$

wo $F(0)$, $F'(0)$, $F''(0)$ die Werthe bezeichnen, welche der, hier übrigens als unbekannt vorausgesetzte geschlossene Ausdruck $F(x)$ und dessen Differential-Coëfficienten $F'(x)$, $F''(x)$, ... für den Werth $x=0$ annehmen.

Divergirt nun die Reihe für einen Werth $x=x'$ und man will sie in eine convergente Reihe verwandeln, so setze man $x=\psi(y)$; woraus $y=\psi_1(x)$ folgt, wenn $\psi_1(x)$ die umgekehrte Function von $\psi(x)$ bezeichnet. Man hat alsdann

$$F(x) = F[\psi(y)];$$

und läfst sich die Function $F[\psi(y)]$, die wir zur Abkürzung $=\varphi(y)$ setzen wollen, nach der *Maclaurin*schen Formel in eine nach steigenden Potenzen von y geordnete Reihe entwickeln, so ist

$$\varphi(y) = \varphi(0)+\tfrac{1}{1}\varphi'(0)y+\frac{1}{1.2}\varphi''(0)y^2+\frac{1}{1.2.3}\varphi'''(0)y^3+\cdots$$

Die Differenziirung der Gleichung

$$\begin{aligned}
\varphi(y) &= F[\psi(y)] \quad \text{giebt aber}\\
\varphi'(y) &= F'[\psi(y)]\psi'(y),\\
\varphi''(y) &= F''[\psi(y)](\psi'(y))^2+F'[\psi(y)]\psi''(y),\\
\varphi'''(y) &= F'''[\psi(y)](\psi'(y))^3+3F''[\psi(y)]\psi'(y)\psi''(y)+F'[\psi(y)]\psi'''(y),\\
&\text{u. s. w.}
\end{aligned}$$

Hat nun die Function $x=\psi(y)$ eine solche Form, dafs für $y=0$ auch $x=0$, mithin $\psi(0)=0$ ist, so erhält man aus den obigen Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\varphi(0) &= F(0) = \pm a,\\
\varphi'(0) &= F'(0)\psi'(0) = b\psi'(0),\\
\varphi''(0) &= F''(0)(\psi'(0))^2+F'(0)\psi''(0) = 1.2.c(\psi'(0))^2+b\psi''(0),\\
\varphi'''(0) &= 1.2.3.d(\psi'(0))^3+3.1.2.c\psi'(0)\psi''(0)+b\psi'''(0),\\
&\text{u. s. w..}
\end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned}
F[\psi(y)] = \varphi(y) = \pm a+b\psi'(0).y+\left[c(\psi'(0))^2+\frac{b}{1.2}\psi''(0)\right]y^2\\
+\left[d(\psi'(0))^3+2\frac{c}{1.2}\psi'(0)\psi''(0)+\frac{b}{1.2.3}\psi'''(0)\right]y^3+\cdots,
\end{aligned}$$

oder, wenn x für $\psi(y)$ und $\psi_1(x)$ für y restitnirt wird:



$$F(x) = \pm a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots$$
$$= \pm a + [b\psi'(0)]\psi_1(x) + \left(c(\psi'(0))^2 + \frac{b}{1.2}\psi''(0)\right)(\psi_1(x))^2$$
$$+ \left[d(\psi'(0))^3 + 2\frac{c}{1.2}\psi'(0)\psi''(0) + \frac{b}{1.2.3}\psi'''(0)\right](\psi_1(x))^3 + \cdots.$$

Diese transformirte Reihe kann mithin ohne Kenntnifs des geschlossenen Ausdrucks $F(x)$ aus der gegebenen Reihe gebildet werden. Die transformirte Reihe wird für den Werth $x = x'$ convergent sein, wenn für diesen $\psi_1(x) < 1$ und wenn die Reihe der Coëfficienten $b\psi'(0)$, $c(\psi'(0))^2 + \frac{b}{1.2}\psi''(0)$ u. s. w. eine fallende ist: kann daher die Function $\psi(y) = x$ so gewählt werden, dafs diesen Bedingungen genügt wird, so wird man eine geeignete Transformationsformel erhalten.

Die Zuläfslichkeit einer solchen Transformation kann bei convergenten Reihen keinen Zweifel haben; der Beweis der Zuläfslichkeit für divergente Reihen wird wie in (§. 6.) durch Hülfe des Satzes (IV. §. 3.) geführt.

Ist die gegebene Reihe eine Reihe mit wechselnden Zeichen, und setzt man $\psi(y) = \frac{y}{1-y}$, mithin $\psi_1(x) = \frac{x}{1+x}$, so erhält man die in (§. 6.) entwickelte *Euler*sche Formel

$$= \pm a + b\left(\frac{x}{1+x}\right) - \Delta b\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \cdots.$$

Hat die gegebene Reihe bleibende Zeichen und man setzt $\psi(y) = \frac{y}{1+y}$, mithin $\psi_1(x) = \frac{x}{1-x}$, so erhält man die zweite *Euler*sche Transformationsformel.

Die letztere Formel ist in der Regel mangelhaft, die erstere giebt eine rasche Näherung, wenn die Differenzenreihe fallend ist. Ist diese aber steigend, welches in den Fällen Statt findet, wo die Reihe der Coëfficienten $a, b, c, \ldots$ entweder rasch steigt oder rasch fällt, so ist die *Euler*sche transformirte Reihe langsam convergirend, oder gar divergent, und es würde daher eine wiederholte Anwendung der Transformation nöthig sein.

Man kann aber auch Transformationsformeln aufstellen, welche für diese Fälle passend sind

Für den Fall des raschen Steigens der Coëfficienten $a, b, c, \ldots$ der Reihe

$$\pm a + bx - cx^2 + dx^3 - \cdots,$$

setze man $\psi(y) = \frac{y}{1-my}$, mithin $\psi_1(x) = \frac{x}{1+mx}$. Dies giebt

$$\psi'(y) = \frac{1}{(1-my)^2}, \quad \psi''(y) = \frac{2m}{(1-my)^3}, \quad \psi'''(y) = \frac{2.3.m^2}{(1-my)^4}, \quad \ldots,$$

daher

$$\psi'(0) = 1, \quad \psi''(0) = 2m, \quad \psi'''(0) = 2.3.m^2, \quad \text{etc.}$$

und man gelangt zu der transformirten Reihe

$$\pm a + b\left(\frac{x}{1+mx}\right) - (c-mb)\left(\frac{x}{1+mx}\right)^2 + (d-2mc+m^2b)\left(\frac{x}{1+mx}\right)^3 - \cdots,$$

welche bei einer passenden Wahl von $m > 1$ convergiren wird.

Für den Fall, wo die Coëfficienten der Reihe

$$\pm a + bx - cx^2 + dx^3 - \cdots$$

sehr rasch fallen. wobei die Reihe dennoch für einen entsprechenden Werth von x divergent sein kann, setze man $\psi(y) = \frac{my}{m-y}$, mithin $\psi_1(x) = \frac{mx}{m+x}$. Es ist alsdann

$$\psi'(y) = \frac{m^2}{(m-y)^2}, \quad \psi''(y) = \frac{2m^2}{(m-y)^3}, \quad \psi'''(y) = \frac{2.3.m^2}{(m-y)^4}, \quad \ldots,$$

daher

$$\psi'(0) = 1, \quad \psi''(0) = \frac{2}{m}, \quad \psi'''(0) = \frac{2.3}{m^2}, \quad \ldots,$$

und man gelangt zu der transformirten Reihe

$$\pm a + m\left[b\left(\frac{x}{m+x}\right) - (mc-b)\left(\frac{x}{m+x}\right)^2 + (m^2d-2mc+b)\left(\frac{x}{m+x}\right)^3 - \cdots\right],$$

welche bei einer passenden Wahl von $m > 1$ convergent sein wird.

§. 9.

Sonstige Mittel zur Bestimmung des Werths einer divergenten Reihe.

Um den Werth einer divergenten Reihe indirect zu finden, ist es nicht gerade nothwendig, sie in eine convergente Reihe zu transformiren. Wenn man die Reihe nur durch irgend eine den Gesetzen analytischer Rechnungen entsprechende Transformation auf eine Form bringt, die eine Werthberechnung zuläfst, so kann dadurch der Zweck erreicht werden.

Der Beweis der Zuläfslichkeit einer solchen Transformation wird wie in (§. 6.) geführt.

Als Beispiel wähle ich die Verwandlung der unendlichen Reihe

$$S = 1 - 1.x + 1.2.x^2 - 1.2.3.x^3 + \cdots,$$

deren allgem. Glied $\pm 1.2 \dots n.x^n$ ist und welche für $x=1$ divergirt, in einen Kettenbruch. (Vergl „*Lacroix* Traité des différences et des series. n. 1065.)

Setzt man

$$S = \frac{1}{1+A},$$

$$A = \frac{x-2x^2+6x^3-24x^4+120x^5-720x^6+\cdots}{1-x+2x^2-6x^3+24x^4-120x^5+\cdots} = \frac{x}{1+B},$$

$$B = \frac{x-4x^2+18x^3-96x^4+600x^5-\cdots}{1-2x+6x^2-24x^3+120x^4-\cdots} = \frac{x}{1+C},$$

$$C = \frac{2x-12x^2+72x^3-480x^4+\cdots}{1-4x+18x^2-96x^3+\cdots} = \frac{2x}{1+D},$$

$$D = \frac{2x-18x^2+144x^3-\cdots}{1-6x+36x^2-\cdots} = \frac{2x}{1+E},$$

$$E = \frac{3x-36x^2+\cdots}{1-9x+\cdots} = \frac{3x}{1+F},$$

$$F = \frac{3x-48x^2+\cdots}{1-12x+\cdots} = \frac{3x}{1+G},$$

und so ferner

$$G = \frac{4x}{1+H}, \quad H = \frac{4x}{1+I}, \quad I = \frac{5x}{1+K}, \quad \text{u. s. w.},$$

so erhält man den Kettenbruch

$$S = \cfrac{1}{1+\cfrac{x}{1+\cfrac{x}{1+\cfrac{2x}{1+\cfrac{2x}{1+\cfrac{3x}{1+\cfrac{3x}{1+\cfrac{4x}{1+4x}}}}}}}} \text{ u. s. w.}$$

Für $x=1$ erhält man die Näherungswerthe

$$\tfrac{1}{1},\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{2}{3},\ \tfrac{4}{7},\ \tfrac{8}{13},\ \tfrac{20}{34},\ \tfrac{44}{73},\ \tfrac{124}{209},\ \tfrac{300}{501},\ \dots,$$

welche abwechselnd gröfser und kleiner sind als der Werth der Reihe und sich immer mehr diesem Werthe nähern.

Der Werth der Reihe ist $=1-P$, wenn P den Werth der in (§. 7. No. 6.) berechneten Reihe: $1.x-1.2.x^2+1.2.3.x^3-\cdots$ bezeichnet, $=0{,}40365\dots$; mithin ist $1-P=0{,}59634\dots.$ Es ist aber $\frac{124}{209}=0{,}5933$ und $\frac{300}{501}=0{,}5988$, und es läfst sich die Näherung beliebig verstärken.

§. 10.

Allgemeine Bemerkung über die vorhergehenden Methoden.

Bei genauerer Untersuchung wird man finden, dafs die Anwendung der vorhergehenden Methoden zur Bestimmung des Werths divergenter Reihen Schwierigkeiten haben könne, wenn man einen bestimmten Grad der Näherung verlangt. Namentlich sind sie zur Berechnung der Reihen mit bleibenden Zeichen oft unzureichend; so wie bei Reihen mit wechselnden Zeichen, in den Fällen, wo die Transformation auf eine langsam convergirende Reihe führt.

Auch lassen sich oftmals die *Grenzen* der Näherung nicht mit hinlänglicher Genauigkeit bestimmen; was von einer practischen Methode billig gefordert wird.

Diese Mangelhaftigkeit der Methoden berührt indefs nicht den Gegenstand, den ich behandele; es ist für mich hinreichend, nachgewiesen zu haben, dafs und durch welche Methoden es *möglich* sei, den Werth divergenter Reihen zu berechnen. Practische Methoden werden bald geschaffen sein, wenn diesem Gegenstande eine allgemeinere Aufmerksamkeit zugewendet wird.

III.

Erstreckung der Bedeutung eines arithmetischen Mittels und der Methoden der Werthbestimmung auf alle nach Potenzen einer Variabeln geordnete divergente Reihen.

§. 11.

Begründung.

Wir haben bisher nur die Reihen mit wechselnden Zeichen und die Reihen mit bleibenden Zeichen der Betrachtung unterzogen, und gesehen, dafs die letztern durch Veränderung des Zeichens der Variabeln sich in Reihen mit wechselnden Zeichen verwandeln lassen. Wir wenden uns jetzt zu den Reihen, bei denen ein Wechsel der Zeichen in anderer Weise Statt findet; welche *Reihen mit veränderlichen Zeichen* benannt werden mögen.

Da hier überall nur von Reihen die Rede ist, die durch Entwickelung einer Function entstanden sein können (Vergl. §. 18.), die mithin nach einem bestimmten Gesetze gebildet sind, so mufs ein *regelmäfsiger* Zeichenwechsel bei jeder Reihe vorausgesetzt werden. Um die Regelmäfsigkeit festzuhalten, betrachten wir die Reihen mit veränderlichen Zeichen entweder als Reihen

mit *wechselnden* Zeichen, oder als Reihen mit *bleibenden* Zeichen, bei denen für jedes $m$te Glied ein entgegengesetztes Zeichen eintritt.

Im ersten Falle erhält man, z. B. wenn $m=3$, die Reihe

$$\pm a+bx-cx^2-dx^3+ex^4+fx^5-gx^6-hx^7+ix^8+\cdots,$$

und wenn $m=4$, die Reihe

$$\pm a+bx-cx^2+dx^3-ex^4-fx^5+gx^6+hx^7-ix^8+kx^9+lx^{10}-\cdots$$

Im letzten Falle entsteht, wenn $m=4$, die Reihe

$$\pm a+bx+cx^2+dx^3-ex^4+fx^5+gx^6-hx^7+ix^8+kx^9-\cdots$$

Zu dieser Classe von Reihen gehören auch diejenigen Reihen mit wechselnden Zeichen, bei welchen in regelmäfsiger Folge gewisse Potenzen der Variabeln fehlen und bei denen eine Substitution nicht möglich ist; denn restituirt man die fehlenden Glieder mit den zugehörigen Coëfficienten $=0$, so verwandelt sich die Reihe mit wechselnden Zeichen in eine zur obigen Classe gehörige Reihe. Die Reihen mit bleibenden Zeichen endlich, bei denen in regelmäfsiger Folge gewisse Potenzen der Variabeln fehlen, lassen sich durch Veränderung des Zeichens der Variabeln auf Reihen mit veränderlichen Zeichen reduciren.

Eine jede Reihe mit veränderlichen Zeichen läfst sich offenbar auf die Form

$$\pm a\pm xF_1(x)\pm x^2F_2(x)\pm\cdots\pm x^mF_m(x)$$

bringen, wo, je nach Beschaffenheit der gegebenen Reihe, das obere oder das untere Zeichen gültig ist, und $F_1(x)$, $F_2(x)$, ... $F_m(x)$ Reihen mit wechselnden Zeichen, oder Reihen mit bleibenden Zeichen, mithin nur solche Reihen bezeichnen, die wir in den vorhergehenden Paragraphen behandelt haben.

So z. B. läfst sich die erste der oben angeführten Reihen auf die Form

$$\begin{aligned}\pm a+\ &x[b-dx^2+fx^4-hx^6+\cdots]\\ -\ &x^2[c-ex^2+gx^4-\cdots],\end{aligned}$$

die zweite auf die Form

$$\begin{aligned}\pm a+\ &x[b+ex^3+hx^6+\cdots]\\ -\ &x^2[c+fx^3+ix^6+\cdots]\\ +\ &x^3[d+gx^3+kx^6+\cdots]\end{aligned}$$

bringen, und durch Substitution von u, resp. für x^2 und x^3, wird die erste auf zwei unendliche Reihen mit wechselnden Zeichen, die zweite auf drei unendliche Reihen mit bleibenden Zeichen reducirt.

Bezeichnet $S(a+bx+\cdots)$ eine unendliche Reihe mit veränderlichen Zeichen, welche dem Vorstehenden nach sich auf die Form

$$= \pm a \pm x F_1(x) \pm x^2 F_2(x) \pm \cdots \pm x^m F_m(x)$$

bringen läfst, und sind $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... $f_m(x)$ die Grenzen der Summen der unendlichen Reihen $F_1(x)$, $F_2(x)$, ... $F_m(x)$ für das Intervall der Convergenz, so ist

$$S(a + bx + \cdots) = \pm a \pm x f_1(x) \pm x^2 f_2(x) \pm \cdots \pm x^m f_m(x)$$

für das Intervall der Convergenz eine identische Gleichung zwischen der Reihe $S(a + bx + \cdots)$ und der auf der rechten Seite stehenden Function, welche die Grenze der Summe der Reihe $S(a + bx + \cdots)$ darstellt. Erhält aber x einen so grofsen Werth, dafs die Reihen divergent werden, so folgt aus dem Satze (IV. §. 3.), dafs alsdann $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... $f_m(x)$ die Werthe der unendlichen Reihen $F_1(x)$, $F_2(x)$, ... $F_m(x)$ für das Intervall der Divergenz darstellen, wenn diese Reihen als arithmetisches Mittel aufgefafst werden. Mithin ist dieselbe Function

$$\pm a \pm x f_1(x) \pm x^2 f_2(x) \pm \ldots \pm x^m f_m(x),$$

welche für das Intervall der Convergenz die Grenze der Summe einer Reihe $S(a + bx + \cdots)$ ausdrückt, zugleich der Werth dieser Reihe für das Intervall der Divergenz, wenn die Reihe, dem obigen Functions-Ausdrucke gemäfs, als ein Aggregat arithmetischer Mittel aufgefafst wird.

Es ist einleuchtend, dafs die in (§§. 6 bis 9.) entwickelten Methoden der Werthbestimmung divergenter Reihen durch Transformation auf die Reihen mit veränderlichen Zeichen Anwendung finden, indem es nur einer Transformation der Reihen $F_1(x)$, $F_2(x)$, ... $F_m(x)$ in convergente Reihen oder in eine sonstige für eine Werthberechnung geeignete Form bedarf, um den Werth der Reihe $S(a + bx + \cdots)$ zu finden.

Sollte die Entwickelung einer Function Reihen geben können, die sich den vorhin betrachteten Classen nicht unterordnen lassen, so werden sie doch als ein Aggregat mehrerer, mit verschiedenen Potenzen von x multiplicirter Reihen von den vorhin betrachteten Classen aufgefasset werden können, und es werden demnach die vorstehenden Sätze durch eine ähnliche Schlufsfolgerung auch auf solche Reihen sich erstrecken lassen.

Da nun alle Reihen, welche nach Potenzen einer Variabeln geordnet sind, entweder Reihen mit wechselnden Zeichen, oder Reihen mit veränderlichen Zeichen sind, oder sich auf die eine oder die andere dieser Classen reduciren lassen, oder endlich als ein Aggregat mehrerer solcher Reihen angesehen werden können, und wir nur diejenigen Reihen von der Betrach-

tung ausgeschlossen haben, deren Coëfficienten unendlich werden, so ist die Bedeutung eines arithmetischen Mittels, resp. eines Aggregets arithmetischer Mittel, und die Möglichkeit der Werthbestimmung divergenter Reihen für alle Reihen nachgewiesen worden, die unter der *Maclaurin*schen Formel

$$F(x) = F(0) + F'(0)\frac{x}{1} + F''(0)\frac{x^2}{1.2} + \cdots$$

enthalten sind.

§. 12.

Andeutung einer anderweiten Form.

In dem vorhergehenden Paragraph ist eine Reihe mit veränderlichen Zeichen als ein Aggregat arithmetischer Mittel dargestellt worden; sie wird sich aber auch als arithmetisches Mittel *mehrerer* Summenwerthe auffassen lassen.

Ist

$$S(a+bx+\cdots) = \pm a + bx - cx^2 + dx^3 - ex^4 + \cdots + fx^m + gx^{m+1} \\ - hx^{m+2} + \cdots + lx^{2m} + mx^{2m+1} - nx^{2m+2} + \cdots$$

eine Reihe mit veränderlichen Zeichen, in welcher bei jedem $(m+1)$ten Gliede ein entgegengesetztes Zeichen eintritt, so hat man nach dem Obigen, wenn $(m+1)$ *gerade* ist:

$$\begin{aligned} S(a+bx\cdots) = & \pm a + x[b + gx^m + mx^{2m} + \cdots + rx^{(k-1)m} + vx^{km} + \cdots] \\ & - x^2[c + hx^m + nx^{2m} + \cdots sx^{(k-1)m} + wx^{km} + \cdots] \\ & + x^3[d + ix^m + \cdots + tx^{(k-1)m} + \text{x}x^{km} + \cdots] \\ & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ & + x^m[f + lx^m + \cdots + ux^{(k-1)m} + yx^{km} + \cdots]. \end{aligned}$$

Wäre $m+1$ *ungerade* so würde das Zeichen der letzten Glieder jeder Periode von dem Zeichen des ersten Gliedes der Periode verschieden sein; z. B. das Zeichen von f vom Zeichen des b u. s. w., und dann würden die in Parenthesen eingeschlossenen Reihen wechselnde Zeichen haben. Die folgende Ausführung pafst indefs auf beide Fälle.

Sucht man den Summenwerth der ersten n Glieder der Reihe $S(a+bx+\cdots)$:

$$S_n = a + bx - cx^2 + \cdots \pm px^{n-1},$$

so hat man, je nachdem n von der Form $km+1$, $km+2$, ... $=(k+1)m$ ist, mehr oder weniger Glieder der in Parenthesen eingeschlossenen Reihen zu summiren. Es ist nemlich

$$
\begin{aligned}
S_{km+1} = \pm a + & x[b + gx^m + \cdots + rx^{(k-1)m}] \\
& -x^2[c + hx^m + \cdots + sx^{(k-1)m}] \\
& +x^3[d + ix^m + \cdots + tx^{(k-1)m}] \\
& - \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\
& +x^m[f + lx^m + \cdots + ux^{(k-1)m}], \\
S_{km+2} = \pm a + & x[b + gx^m + \cdots + rx^{(k-1)m} + vx^{km}] \\
& -x^2[c + hx^m + \cdots + sx^{(k-1)m}] \\
& + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\
& +x^m[f + lx^m + \cdots + ux^{(k-1)m}], \\
S_{km+3} = \pm a + & x[b + gx^m + \cdots + rx^{(k-1)m} + vx^{km}] \\
& -x^2[c + hx^m + \cdots + sx^{(k-1)m} + wx^{km}] \\
& +x^3[d + ix^m + \cdots + tx^{(-1)m}] \\
& - \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\
& +x^m[f + lx^m + \cdots + ux^{(k-1)m}]
\end{aligned}
$$

u. s. f. bis

$$
\begin{aligned}
S_{(k+1)m} = \pm a + & \; x[b + gx^m + \cdots + rx^{(k-1)m} + vx^{km}] \\
& - \; x^2[c + hx^m + \cdots + sx^{(k-1)m} + wx^{km}] \\
& + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\
& -x^{m-1}[e + kx^m + \cdots + tx^{(k-1)m} + zx^{km}] \\
& + \; x^m[f + lx^m + \cdots + ux^{(k-1)m}];
\end{aligned}
$$

mithin hat S_n m verschiedene Formen, von welchen

Die erste für die Summen S_1, S_{m+1}, S_{2m+1}, ...,

Die zweite für die Summen S_2, S_{m+2}, S_{2m+2}, ...,

u. s. w.,

Die letzte aber für die Summen S_m, S_{2m}, S_{3m}, ...

Anwendung findet. Setzt man in die m Summen-Ausdrücke resp. für $km+1$, $km+2$, ... und $(k+1)m$ den allgemeinen Werth n, so erhält man die m verschiedenen Formen des Summen-Ausdrucks; welche wir durch S_{n_1}, S_{n_2}, ... S_{n_m} bezeichnen wollen.

Es bedeutet mithin S_{n_1}, wenn n nicht von der Form $km+1$ ist, ein nach der ersten Form des Summen-Ausdrucks in die Reihe S_1, S_{m+1}, S_{2m+1}, ... interpolirtes, zum Index n gehöriges Glied; S_{n_2} bedeutet, wenn n nicht von der Form $km+2$ ist, ein nach der zweiten Form des Summen-Ausdrucks in die Reihe S_2, S_{m+2}, S_{2m+2}, ... interpolirtes, zum Index n gehöriges Glied u. s. f.

Aus dem Vorhergehenden ist bekannt, dafs die Summen-Ausdrücke der in Parenthesen eingeschlossenen endlichen Reihen, mögen die Zeichen wechselnd oder bleibend sein, sich auf die Form

$$f(x) \pm F(x, n)$$

bringen lassen, wo $f(x)$ die Function bedeutet, welche für das Intervall der Convergenz die Summe der bis ins Unendliche fortgesetzten Reihe, und $F(x, n)$ eine Function von x und der Gliederzahl n darstellt, welche für das Intervall der Convergenz bei unendlichem Wachsen von n verschwindet.

Von den Summen-Ausdrücken S_{n_1}, S_{n_2}, ... enthält jeder eine Anzahl m Summen-Ausdrücke von obiger Form, welche blofs insoweit verschieden sind, als zu dem einen mehr Glieder derselben Reihen concurrirt haben, als zu dem andern.

Sind die m Summen-Ausdrücke von der Form $f(x) \pm F(x, n)$, welche in jedem der Ausdrücke S_{n_1}, S_{n_2}, ... enthalten sind, nemlich:

$$f_1(x) \pm F_1(x, n), \quad f_2(x) \pm F_2(x, n), \quad \ldots \quad f_m(x) \pm F_m(x, n),$$

und setzt man für irgend einen der Summenwerthe S_{n_r}:

$$\begin{aligned} &\pm a + xf_1(x) - x^2 f_2(x) + \cdots + x^m f_m(x) = \varphi(x), \\ &\pm (xF_1(x, n) - x^2 F_2(x, n) + \cdots + x^m F_m(x, n)) = \psi_r(x) \Phi(x, n), \end{aligned}$$

so ergiebt sich aus der Betrachtung des Intervalls der Convergenz, dafs $\varphi(x)$ die Grenze der Summe der unendlichen Reihe $S(a + bx + \cdots)$ für das Intervall der Convergenz und $\Phi(x, n)$ eine Function bedeutet, welche bei unendlichem Wachsen von n für das Intervall der Convergenz verschwindet.

Die Summen-Ausdrücke S_{n_1}, S_{n_2}, ... werden sich durch Anwendung dieser Reductionen immer auf die Form

$$(A.) \quad \begin{cases} S_{n_1} = \varphi(x) + \psi_1(x) \Phi(x, n), \\ S_{n_2} = \varphi(x) + \psi_2(x) \Phi(x, n), \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \\ S_{n_m} = \varphi(x) + \psi_m(x) \Phi(x, n) \end{cases}$$

bringen lassen; wo $\psi_1(x) + \psi_2(x) + \psi_3(x) + \cdots + \psi_m(x) = 0$ sein wird.

Wenn demnach S_{n_1}, S_{n_2}, ... u. s. w. auf den nemlichen Werth n bezogen werden, so erhält man:

$$\frac{S_{n_1} + S_{n_2} + S_{n_3} + \cdots + S_{n_m}}{m} = \varphi(x);$$

was auch der Werth von n und $\Phi(x, n)$ sein möge.

Eine divergente Reihe mit veränderlichen Zeichen wird daher, analog mit den Reihen mit wechselnden Zeichen, als ein arithmetisches Mittel aufgefafst werden können; nur dafs bei diesen Reihen mehr als zwei verschiedene Werthe zum Mittel concurriren.

Es würde sich offenbar auf diese Bedeutung der Reihen ein dem Verfahren in (§. 5.) analoges directes Verfahren der Werthbestimmung gründen lassen, welches indefs practisch nicht eben von Werth sein könnte, weil die Vermehrung der durch Interpolation zu bestimmenden Gröfsen die Rechnung erschwert.

Der allgemeine Beweis des Gesetzes (*A*.) und dessen Erstreckung auf alle nach Potenzen einer Variabeln fortschreitende Reihen hat mir bisher nicht gelingen wollen.

§. 13.

Ein Beispiel.

Als Beispiel für den Satz des vorigen Paragraphen wähle ich eine sehr leicht zu behandelnde, aber vielfach besprochene Reihe. Die Entwickelung von $\frac{1+x}{1+x+x^2}$ giebt die Reihe

$$1-x^2+x^3-x^5+x^6-x^8+x^9-x^{11}+\cdots.$$

Setzt man $x=1$, so erhält man

$$1-1+1-1+\cdots=\tfrac{2}{3},$$

während die Specialisirung der Reihe

$$1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots=\frac{1}{1+x},$$

für $x=1$,

$$1-1+1-1+1-\cdots=\tfrac{1}{2}$$

giebt.

Zur Erklärung dieses Resultats hat *Lagrange* darauf aufmerksam gemacht, dafs, wenn man der gegebnen Reihe die in derselben fehlenden Glieder x, x^4, x^7, ... mit den Coëfficienten 0 hinzufüge, die Summe der Reihe

$$1+0-1+1+0-1+\cdots,$$

je nachdem man bei dem $n$ten, $(n+1)$ten oder $(n+2)$ten Gliede abbreche, $=1$, $=1$ oder $=0$ sei, wovon das arithmetische Mittel $\frac{2}{3}$ sei. Man hat aber diese sogenannte Erklärung mit Recht zurückgewiesen, weil daraus nicht ersichtlich sei, welches Recht man zum Nehmen des arithmetischen Mittels habe.

Behandeln wir nun die gegebene Reihe nach der Vorschrift des vorigen Paragraphs, so tritt der wahre Grund der *Lagrange*schen Erklärung ans Licht.

$$\text{Die Reihe ist} = 1-x^2[1+x^3+x^6+\cdots] \\ +x^3[1+x^3+x^6+\cdots].$$

Die Summe der ersten n Glieder der Reihe ist daher, je nachdem n von der Form $3m-1$, $3m$ oder $3m+1$ ist:

$$S_{3m-1} = 1-x^2[1+x^3+x^6+\cdots+x^{3(m-1)}]+x^3[1+x^3+x^6+\cdots+x^{3(m-2)}],$$
$$S_{3m} \;= 1-x^2[1+x^3+x^6+\cdots+x^{3(m-1)}]+x^3[1+x^3+x^6+\cdots+x^{3(m-1)}],$$
$$S_{3m+2} = S_{3m} = 1-x^2[1+x^3+\cdots+x^{3(m-1)}]+x^3[1+x^3+\cdots+x^{3(m-1)}].$$

Nimmt man die Summen-Ausdrücke der in Parenthesen eingeschlossenen Reihen und setzt in den drei obigen Summen-Ausdrücken resp. für $3m-1$, $3m$ und $3m+1$ den allgemeinen Werth n, so ergiebt sich, nach Reduction:

$$S_{n_1} = \frac{1+x}{1+x+x^2}-\frac{1+x}{1+x+x^2}\cdot x^{n+1},$$
$$S_{n_2} = \frac{1+x}{1+x+x^2}+\frac{x}{1+x+x^2}\cdot x^{n+1},$$
$$S_{n_3} = \frac{1+x}{1+x+x^2}+\frac{1}{1+x+x^2}\cdot x^{n+1},$$

folglich, wenn S_{n_1}, S_{n_2} und S_{n_3} auf den nemlichen Werth von n bezogen werden:

$$\tfrac{1}{3}(S_{n_1}+S_{n_2}+S_{n_3}) = \frac{1+x}{1+x+x^2}\cdot$$

Der Werth der gegebenen divergenten Reihe ist mithin in allen Fällen $=\frac{1}{3}(S_{n_1}+S_{n_2}+S_{n_3})$, und da für $x=1$: $S_{n_1}=0$, $S_{n_2}=1$, $S_{n_3}=1$ ist, so erhält man durch diese Specialisirung das Resultat von *Lagrange*.

IV.
Begründung der Zuläfslichkeit der Anwendung divergenter Reihen bei analytischen Rechnungen.

§. 14.
Begründung.

Wir haben gesehen, dafs bei einer jeden Gleichung, welche die Identität einer unendlichen Reihe und eines geschlossenen Ausdrucks darstellt, wie

$$F(x) = a+bx+cx^2+\cdots,$$

wo die Coefficienten positive oder negative endliche Gröfsen sein können, bei

demjenigen Werthe der Variabeln $=x'$, bei welchem die convergente Reihe in eine divergente übergeht, ein Wechsel der Bedeutung der Gleichung eintritt, indem die Identität, welche für das Intervall der Convergenz auf die Summe der Reihe bezogen werden kann, für das Intervall der Divergenz auf das arithmetische Mittel zweier Summenwerthe, resp. auf ein Aggregat arithmetischer Mittel, bezogen werden mufs.

Es ist aber dennoch die divergente Reihe

$$a+bx+cx^2+\cdots\ (x \gtreqless x'),$$

wenn sie in der gewöhnlichen Weise als Summe unendlich vieler Glieder aufgefasset wird, ebensowohl der richtige analytische Ausdruck (d. i. die den Gesetzen der analytischen Rechnung entsprechende Form) für die Function $F(x)$ $(x \gtreqless x')$, als die convergente Reihe

$$a+bx+cx^2+\cdots\ (x<x')$$

den richtigen analytischen Ausdruck der Function $F(x)$ $(x<x')$ darstellt, und es kann daher bei allen analytischen Rechnungen sowohl die divergente Reihe

$$a+bx+cx^2+\cdots$$

für den geschlossenen Functions-Ausdruck $F(x)$ $(x \gtreqless x')$, als die convergente Reihe

$$a+bx+cx^2+\cdots$$

für die Function $F(x)$ $(x<x')$ substituirt und mit diesen Reihen nach den allgemeinen Gesetzen der Analysis mit völliger Sicherheit gerechnet werden: nur mufs, wenn das Resultat der Rechnung sich in Form einer divergenten Reihe darstellt, diese Reihe als arithmetisches Mittel aufgefasset und der numerische Werth des Resultats nach den vorhin abgehandelten Methoden bestimmt werden.

Es ist in den Paragraphen (6 bis 8 und 11) gezeigt worden, dafs jede divergente Reihe, deren Werth einem geschlossenen Ausdrucke $F(x)$ gleich ist, in eine convergente Reihe transformirt werden kann, welche $F(x)$ zur Summe hat; und zwar durch ein Verfahren, welches den Gesetzen der analytischen Rechnungen entspricht. Nun aber läfst sich beweisen, dafs man, wenn mit einer divergenten Reihe (die Reihe in gewöhnlicher Weise als Summe unendlich vieler Glieder aufgefasset) irgend eine Rechnungs-Operation vorgenommen und hernach das in Form einer divergenten Reihe erscheinende Resultat in eine convergente Reihe transformirt wird, zu dem nemlichen End-

resultate gelangen mufs, welches man erhält, wenn man vorerst die divergente Reihe in eine convergente transformirt und sodann an dieser convergenten Reihe dieselbe Rechnungs-Operation vollzieht, welche mit der divergenten Reihe vorgenommen wurde.

Im letzteren Falle aber wird der Gebrauch der divergenten Reihen vermieden und es kann daher über die Richtigkeit des Resultats kein Zweifel obwalten, da das Resultat selbst eine convergente Reihe ist. (Vergl. §. 15.)

Es sei

$$f(x) = \pm\alpha + \beta x - \gamma x^2 + \delta x^3 - \cdots$$

eine unendliche Reihe mit wechselnden Zeichen, welche für $x \gtreqless x'$ divergirt, und es werde

$$\Pi(\pm\alpha + \beta x - \gamma x^2 + \delta x^3 - \cdots),$$

d. h. das Resultat irgend einer mit der Reihe vorzunehmenden Rechnungs-Operation, durch die divergente Reihe

$$\pm A + Bx - Cx^2 + Dx^3 - \cdots$$

dargestellt, so giebt die Anwendung der *Euler*schen Transformationsformel:

$$a = A,\quad b = B,\quad \Delta B = C - B,\quad \Delta^2 B = D - 2C + B,\ \text{u. s. w.},$$

und man erhält als Endresultat:

$$\Pi(f(x)) = \pm A + B\left(\frac{x}{1+x}\right) - \Delta B\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \Delta^2 B\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 - \cdots$$

Transformirt man dagegen zuvörderst die gegebene divergente Reihe in eine convergente, so erhält man

$$f(x) = \pm\alpha + \beta\left(\frac{x}{1+x}\right) - \Delta\beta\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \Delta^2\beta\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 - \cdots,$$

wo

$$\Delta\beta = \gamma - \beta,\quad \Delta^2\beta = \delta - 2\gamma + \beta,\ \text{u. s. w.}$$

Man hat demnach

$$\Pi(f(x)) = \Pi\left(\pm\alpha + \beta\left(\frac{x}{1+x}\right) - \Delta\beta\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \Delta^2\beta\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 - \cdots\right),$$

oder wenn man für $\Delta\beta$, $\Delta^2\beta$, u. s. w. die entsprechenden Werthe substituirt,

$$\Pi(f(x)) = \Pi\left(\pm\alpha + \beta\left(\frac{x}{1+x}\right) - (\gamma - \beta)\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + (\delta - 2\gamma + \beta)\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 - \cdots\right).$$

Ist aber, wie oben vorausgesetzt worden,

$$\Pi(\pm\alpha + \beta x - \gamma x^2 + \cdots) = \pm A + Bx - Cx^2 + Dx^3 - \cdots,$$

so mufs auch

$$\Pi\left(\pm\alpha+\beta\left(\frac{x}{1+x}\right)-(\gamma-\beta)\left(\frac{x}{1+x}\right)^2+(\delta-2\gamma+\beta)\left(\frac{x}{1+x}\right)^3-\cdots\right)$$
$$=\pm A+B\left(\frac{x}{1+x}\right)-(C-B)\left(\frac{x}{1+x}\right)^2+(D-2C+B)\left(\frac{x}{1+x}\right)^3-\cdots$$

sein, und man gelangt daher auf diesem Wege, wo der Gebrauch divergenter Reihen vermieden ist, zu dem obigen Endresultat

$$\Pi(f(x)) = \pm A+B\left(\frac{x}{1+x}\right)-\Delta B\left(\frac{x}{1+x}\right)^2+\Delta^2 B\left(\frac{x}{1+x}\right)^3-\cdots$$

Ist z. B. $\Pi(f(x))=f'(x)$, d. h. gleich dem Differential-Coëfficienten von $f(x)$, so hat man

$$f'(x) = \beta-2\gamma x+3\delta x^2-4\varepsilon x^3+\cdots$$

und diese Gleichung kann auf die Form

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}[0+0x-\beta x^2+2\gamma x^3-3\delta x^4+4\varepsilon x^5-\cdots]$$

gebracht werden. Transformirt man die in Klammern eingeschlossene Reihe nach der *Euler*schen Formel, so ergiebt sich

$$a=0,\quad b=0,\quad \Delta b=\beta-0=\beta,\quad \Delta^2 b=2(\gamma-\beta),$$
$$\Delta^3 b=3(\delta-2\gamma+\beta),\quad \text{u. s. w.},$$

mithin ist, nach Einführung der Differenzen der gegebenen Reihe $\Delta=\beta$, $\Delta^2 b=2\Delta\beta$, $\Delta^3 b=3\Delta^2\beta$, u. s. w., das Endresultat:

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}\left[\beta\left(\frac{x}{1+x}\right)^2-2\Delta\beta\left(\frac{x}{1+x}\right)^3+3\Delta^2\beta\left(\frac{x}{1+x}\right)^4-\cdots\right].$$

Transformirt man andererseits die gegebene Reihe in die convergente Reihe

$$f(x) = \pm\alpha+\beta\left(\frac{x}{1+x}\right)-\Delta\beta\left(\frac{x}{1+x}\right)^2+\Delta^2\beta\left(\frac{x}{1+x}\right)^3-\cdots,$$

so giebt die Differentiirung dieser Reihe, indem allgemein

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1+x}\right)^n = \frac{n}{x^2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{n+1}$$

ist, unmittelbar das nemliche Endresultat

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}\left[\beta\left(\frac{x}{1+x}\right)^2-2\Delta\beta\left(\frac{x}{1+x}\right)^3+\cdots\right].$$

Wäre die gegebene divergente Reihe eine Reihe mit bleibenden Zeichen, so würde durch Anwendung der zweiten *Euler*schen Transformationsformel der Beweis in der nemlichen Weise geführt werden können. Da aber alle Reihen, die nach Potenzen einer Variabeln fortschreiten, als ein Aggregat mehrerer

Reihen mit wechselnden Zeichen, oder mehrerer Reihen mit bleibenden Zeichen sich darstellen lassen (Vergl. §. 11.), so läfst sich der Beweis auf alle solche Reihen erstrecken.

Es kann mithin der Gebrauch divergenter Reihen bei analytischen Rechnungen überall nicht zu fehlerhaften Resultaten Anlafs geben, und die Ursachen eines etwanigen sinnlosen Resultats sind in der Anwendung einer fehlerhaften Rechnung zu suchen.

§. 15.

Anderweite Begründung.

Wenn gleich dieser Satz nach meiner Überzeugung durch die Ausführung im vorigen Paragraphen vollständig bewiesen ist, so dürfte es doch, bei der Wichtigkeit der Sache und bei der Stärke des Vorurtheils gegen die Wahrheit des Satzes, nicht überflüssig sein, noch einen Beweis nachfolgen zu lassen, der sich mehr an die herrschende Ansicht auschliefst.

Es ist in neuerer Zeit vielfach in Frage gestellt worden, ob man ohne besondern Beweis berechtigt sei, die convergenten unendlichen Reihen den gewöhnlichen analytischen Rechnungs-Arten zu unterwerfen: z. B. eine unendliche Reihe zu differentiiren, sie in eine Potenz erheben, den Sinus davon zu nehmen, u. s. w. Die Berechtigung wird geleugnet, wenn das Resultat der Rechnung eine divergente Reihe ist; ist dagegen das Resultat der Rechnung eine convergente Reihe, so wird auch nach der jetzt herrschenden Ansicht die Gültigkeit der Rechnung nicht bezweifelt werden.

Bezeichnet nun

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots$$

irgend eine unendliche Reihe, in welcher die Coëfficienten positive und negative endliche Gröfsen sein können, und ist die Reihe für die Werthe $x \gtreqless x'$ divergent, so ist zu beweisen, dafs auch für das Intervall der Divergenz

$$\Pi(f(x)) = \Pi(a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots)$$

ist, wo Π irgend eine analytische Rechnungs-Operation bedeutet, die an der Reihe in der gewöhnlichen Art vorgenommen wird, wie wenn die Reihe die Summe unendlich vieler Glieder wäre.

Wie auch die gegebene Reihe beschaffen sein möge, so kann doch immer der Werth von x so klein angenommen werden, dafs die gegebene Reihe und die das Resultat der Rechnung darstellende Reihe convergent werden; dann führt der Voraussetzung nach die Ausführung der Operation $\Pi[a + bx + cx^2 + \cdots]$

an der convergenten Reihe nach den gewöhnlichen Gesetzen analytischer Rechnungen zu einem gültigen Resultat. Es sei dies Resultat die convergente Reihe

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \cdots;$$

alsdann ist

$$\Pi(f(x)) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \cdots$$

eine gültige Gleichung.

Nun aber folgt aus dem Satze (IV. §. 3. und §. 11.): dafs wenn $\Pi(f(x))$ die Grenze der Summe der Reihe $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \cdots$ für das Intervall ist, innerhalb dessen die Reihe convergirt, dieselbe Function $\Pi(f(x))$ auch der Werth der Reihe für das Intervall der Divergenz sein mufs, wenn man die Reihe als arithmetisches Mittel, resp. als ein Aggregat arithmetischer Mittel auffasset; mithin gilt auch für das Intervall der Divergenz die Gleichung

$$\Pi(f(x)) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \cdots = \Pi(a + bx + cx^2 + \cdots).$$

Was von einer einfachen Operation Π gilt, mufs aber auch von einer Verbindung mehrerer Operationen gelten: es kann daher auch bei einer complicirten analytischen Rechnung durch die Anwendung divergenter Reihen ein fehlerhaftes Resultat nicht herbeigeführt werden. Die älteren Mathematiker hatten daher vollkommen Recht, wenn sie die unendlichen allgemeinen Reihen, ohne zu beachten, ob sie convergent oder divergent sind, bei ihren Rechnungen gebrauchten; mögen sie sich nun den Grund der Berechtigung deutlich zum Bewufstsein gebracht haben, oder nicht.

§. 16.

Analogie mit imaginären Ausdrücken.

Dafs eine divergente Reihe

$$a + bx + cx^2 + \cdots$$

(in der gewöhnlichen Weise als Summe unendlich vieler Glieder aufgefasset) der richtige analytische Ausdruck einer Function $f(x)$ sein könne, obwohl der Werth von $f(x)$ sich nicht durch Summirung der Reihe finden läfst, kann für einen Mathematiker nichts Auffallendes haben, weil ganz analoge Fälle bei den imaginären Formen vorkommen. So ist

$$\tfrac{1}{2}[e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}]$$

der richtige analytische Ausdruck für die reelle Function $\cos x$ und kann in allen analytischen Rechnungen für $\cos x$ substituirt werden, ohne dafs dadurch fehlerhafte Resultate herbeigeführt würden; dennoch ist dieser Ausdruck in seiner gegenwärtigen Form (nemlich als Summe zweier Exponentialfunctionen

mit imaginären Exponenten) nicht zu irgend einer Werthberechnung geeignet. Will man den Werth des Ausdrucks wissen, so ist es nothwendig, denselben in eine andere zur Werthberechnung geeignete Form zu transformiren; und wenn dies den Gesetzen analytischer Rechnungen gemäfs ausgeführt wird, so giebt der numerische Werth des Resultats den numerischen Werth des gegebenen Ausdrucks. So giebt die Transformirung in eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe

$$\tfrac{1}{2}[e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}] = 1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\cdots = \cos x.$$

Die divergenten unendlichen Reihen sind in einem ganz analogen Falle, wie der Ausdruck $\tfrac{1}{2}[e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}]$; sie sind in ihrer eigenthümlichen Form zu einer dieser Form entsprechenden Werthberechnung nicht geeignet; transformirt man aber eine divergente Reihe, den Gesetzen analytischer Rechnungen gemäfs, in eine andere zur Werthberechnung geeignete Form, so giebt der numerische Werth des Resultats den numerischen Werth der divergenten Reihe.

Nur in einer Beziehung findet zwischen dem imaginären Ausdrucke und der divergenten Reihe eine Verschiedenheit Statt. Der numerische Werth des imaginären Ausdrucks kann *nur* durch Transformation gefunden werden, weil die imaginäre Form überall keine reelle Bedeutung hat. Der numerische Werth der divergenten Reihe dagegen kann nicht blofs durch Transformation, sondern auch durch ein directes Verfahren gefunden werden, weil die divergenten Reihen eine eigenthümliche, ihrer äufsern Form nicht entsprechende Bedeutung haben, d. h. weil die divergenten Reihen als arithmetisches Mittel aufgefasset werden können. Wäre diese Bedeutung der divergenten Reihen nicht ermittelt, so fiele die angedeutete Verschiedenheit zwischen den imaginären Ausdrücken und den divergenten Reihen ganz weg, und beide wären in ganz gleichem Falle.

Diesen Gesichtspunct hätten die Vertheidiger der divergenten Reihen bei ihren Argumenten festhalten sollen; sie hätten die divergenten Reihen als eine Art imaginärer Form des entsprechenden geschlossenen Ausdrucks betrachten müssen, welche durch eine den Gesetzen analytischer Rechnung gemäfse Transformation auf eine zur Werthberechnung geeignete Form desselben geschlossenen Ausdrucks reducirt werden kann: denn die ungegründete Behauptung der neuern Mathematiker (Vergl. Einleitung), dafs eine Transformation divergenter Reihen in identische und convergente geradezu unmöglich sei, wäre auch ohne Kenntnifs der Bedeutung der divergenten Reihen leicht

zu widerlegen gewesen. Es würde sich dann wohl haben durchführen lassen, dafs es inconsequent sei, die divergenten Reihen aus der Analysis zu verbannen, während man die imaginären Ausdrücke zuläfst.

§. 17.

Angebliche fehlerhafte Resultate, die durch divergente Reihen veranlafst sein sollen.

Es ist sehr auffallend, dafs man sich dazu entschlossen hat, die divergenten Reihen aus der Analysis zu verstofsen, ohne dafs Fälle nachgewiesen worden sind, in welchen die Anwendung divergenter Reihen zu fehlerhaften Resultaten Veranlassung gegeben hat. Zwar sagt *Abel* in seiner Untersuchung über die Reihe $1+\frac{m}{2}x+\cdots$ (*Crelle's* Journal 1ter Bd. S. 311 seq.): „Die divergenten Reihen können zuweilen mit Nutzen als Symbole dienen, diese oder jene Sätze kürzer auszudrücken; aber man darf sie nie an die Stelle bestimmter Gröfsen setzen. Thut man es, so kann man beweisen was man will: Unmögliches sowohl als Mögliches." Und dieser Ausspruch ist oftmals wiederholt worden: aber ein *Beweis* der Behauptung findet sich nirgends. Sollte *Abel*, wie vielleicht aus seinem Briefe vom Jahre 1839 geschlossen werden könnte (S. Dr. *M. Ohm*, Geist der mathem. Analysis,) bei seinem Ausspruche blofs willkürliche numerische divergente Reihen vor Augen gehabt haben, so wäre derselbe allerdings vollkommen richtig, träfe aber alsdann gar nicht die Sache.

Eine numerische Reihe kann natürlich der specialisirte Ausdruck unendlich vieler verschiedener Functionen sein. Ist nun die Reihe convergent, so hat ihre Summe immer eine bestimmte Gröfse, möge sie der specialisirte Ausdruck der einen oder der andern Function sein, eben weil die convergente Reihe als Grenze der Summe ihrer Glieder aufgefasset werden kann. Der Werth einer divergenten Reihe, die keine Summe hat, sondern als arithmetisches Mittel aufgefasset werden mufs, ist eben deshalb von dem Ausdrucke der Function abhängig, durch deren Specialisirung man sie entstanden sich vorstellt. Eine numerische divergente Reihe, von der man nicht weifs, welcher Function sie ihre Entstehung verdankt, hat daher keinen bestimmten Werth, und darf nie an die Stelle einer bestimmten Gröfse gesetzt werden. Aber wie kann überall von einer Rechnung mit solchen willkürlichen numerischen Reihen die Rede sein? In der Analysis entstehen die unendlichen Reihen durch die Entwickelung gebrochener, irrationaler und transcendenter geschlossener Ausdrücke und erscheinen demnach als Ausdruck bestimmter Functionen: und wenn

man sie auch häufig durch Annahme eines speciellen Werths der Variabeln in numerische Reihen verwandelt, so kann doch über deren Ursprung nie ein Zweifel sein. Zwar kann man bei analytischen Rechnungen, wenn man für jedes einzelne Glied einer unendlichen allgemeinen Reihe eine demselben gleichgeltende allgemeine Reihe substituirt und das Resultat nach den Potenzen der Variabeln ordnet, auf unendliche Zahlenreihen geführt werden, die daher selbstständig und nicht als specielle Werthe allgemeiner Reihen zu entstehen scheinen. Allein betrachtet man den Fall genauer, so liegt in der vorgenommenen analytischen Operation selbst die Nothwendigkeit, diese Reihen beziehungsweise als specialisirte Ausdrücke bestimmter allgemeiner Reihen zu behandeln. Und sollte in einzelnen Fällen ein Zweifel darüber entstehen können, welcher allgemeinen Reihe eine solche Zahlenreihe unterzuordnen sei, so wird dieser Zweifel immer dadurch beseitigt werden können, dafs man alle Glieder der gegebenen allgemeinen Reihe, der Reihe nach, mit steigenden Potenzen einer neuen Variabeln multiplicirt, alsdann die Substitution der allgemeinen unendlichen Reihen vollziehet und schliefslich die neue Variable $=1$ setzt: denn man erhält alsdann nicht Zahlenreihen, sondern allgemeine Reihen, die nach Potenzen der neuen Variabeln geordnet sind, welche erst schliefslich durch den Werth 1 der neuen Variablen zu specialisiren sind. Die in der Analysis vorkommenden unendlichen numerischen Reihen erscheinen daher immer als Ausdrücke bestimmter Functionen und haben demnach immer einen bestimmten Werth.

Für solche Reihen also müfste die Wahrheit des *Abel*schen Ausspruchs bewiesen werden, wenn der Beweis den Gegenstand treffen sollte.

So viel mir bekannt, ist Professor *Schlömilch* der Einzige, der durch Beispiele nachzuweisen versucht hat, dafs die Anwendung divergenter Reihen zu sinnlosen Resultaten führen könne. Wenn gleich diese Beispiele meist Reihen betreffen, die nach dem Cosinus oder Sinus der Vielfachen eines Bogens fortschreiten, welche nicht Gegenstand dieser Abhandlung sind, so glaube ich doch auf dieselbe eingehen zu müssen, indem ich auf die in (§. 18.) enthaltenen Resultate Bezug nehme.

Die im *Grunert*schen Archiv (Theil V. Heft 4. S. 393) angeführte Gleichung

$$\cos x-\cos 2x+\cos 3x-\cos 4x+\cdots=\tfrac{1}{2}$$

ist vollkommen richtig, wenn die Reihe als arithmetisches Mittel aufgefasset wird; und dies wird nach (§. 18.) eben dadurch bestätigt, dafs die Reihe für

den Werth $x = \frac{1}{3}\pi$ sich in die Reihe

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} - 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} - 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} - 1 + \cdots$$

verwandelt, welche drei verschiedene Summenwerthe hat: $\frac{1}{2}$, 1 und 0; mde: das arithmetische Mittel dieser Summenwerthe $= \frac{1}{2}$ ist. Eben so sind die von *Euler* aus der Reihe gezogenen Folgerunge

$$1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots = 0 \text{ und}$$
$$1 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + \cdots = 0$$

vollkommen richtig, wenn diese Reihen als specialisirte Ausdrücke der Reihen

$$v - 2^2 . v^2 + 3^2 . v^3 - 4^2 . v^4 + \cdots \text{ und}$$
$$v - 2^4 . v^2 + 3^4 . v^3 - 4^4 . v^4 + \cdots$$

betrachtet werden; wovon man sich leicht überzeugen kann, wenn man den Werth dieser divergenten Reihen für $v = 1$ nimmt.

Was die übrigen in dem genannten Hefte (S. 394 bis 398) unter (n. 1 bis 3.) aufgeführten Beispiele und das im *Grunert*schen Archiv (Theil III. Heft 3. S. 275) angezogene Beispiel betrifft, so ist der Professor *Schlömilch* allerdings zu sinnlosen Resultaten gelangt: aber durch ein Verfahren, welches jedenfalls zu fehlerhaften Resultaten führen *mufste*. Er substituirt nemlich für jedes einzelne Glied einer unendlichen eine demselben gleichgeltende unendliche Reihe und ordnet das Resultat nach Potenzen der Variabeln; und zwar in allen den genannten Beispielen so, dafs die sämmtlichen Coëfficienten unendlich werden. Anstatt nun inne zu halten, indem eine nach Potenzen einer Variabeln geordnete Reihe, deren Coëfficienten unendlich sind, keine Bedeutung hat, setzt Professor *Schlömilch* die Rechnung fort und vergleicht nach der Methode der unbestimmten Coëfficienten den geschlossenen Ausdruck, welchem die gegebene unendliche Reihe gleich gesetzt war; oder eine aus demselben entwickelte Reihe mit endlichen Coëfficienten, mit der ersten Reihe, deren Coëfficienten unendlich sind. Der Grund der fehlerhaften Resultate liegt folglich in dem Rechnungsverfahren, und es sind die fehlerhaften Resultate nicht durch die divergenten Reihen veranlafst, von welchen ausgegangen wurde.

V.

Allgemeinere Geltung der Bedeutung eines arithmetischen Mittels, und anderweite Auffassung der divergenten Reihen.

§. 18.

Allgemeinere Geltung der Bedeutung eines arithmetischen Mittels.

Wenn gleich nur diejenigen divergenten unendlichen Reihen, welche nach Potenzen einer Variabeln geordnet sind, Gegenstände dieser Abhandlung ausmachen, so glaube ich doch, hier zeigen zu müssen, dafs die für obige Reihen nachgewiesene Bedeutung eines arithmetischen Mittels auch bei andern unendlichen divergenten Reihen Statt findet.

Schon *Lexell* hat bemerkt, dafs man den Werth der unendlichen Reihen

$$\sin m + \sin(m+x) + \sin(m+2x) + \sin(m+3x) + \cdots,$$
$$\cos m + \cos(m+x) + \cos(m+2x) + \cos(m+3x) + \cdots$$

erhält, wenn man das arithmetische Mittel nimmt zwischen allen den verschiedenen Summen-Werthen, welche sich durch successives Addiren der Glieder der Reihen finden lassen. (Vergl. „*Lacroix*, Traité des différences et des séries. n. 950. 951.")

Es ist nemlich die endliche Summe von $u+1$ Gliedern der ersteren Reihe bekanntlich

$$S\sin(m+ux) = -\frac{\cos(m+(u+\frac{1}{2})x)}{2\sin\frac{1}{2}x} + \frac{\cos(m-\frac{1}{2}x)}{2\sin\frac{1}{2}x},$$

und die der letzteren Reihe

$$S\cos(m+ux) = \frac{\sin(m+(u+\frac{1}{2})x)}{2\sin\frac{1}{2}x} - \frac{\sin(m-\frac{1}{2}x)}{2\sin\frac{1}{2}x}.$$

Die erste Reihe ist aber periodisch, und die verschiedenen partiellen Summen werden $=0$ am Ende jeder Periode, indem der obige Summen-Ausdruck für alle Werthe von u verschwindet, welche durch die Gleichung

$$m+(u+\tfrac{1}{2}x) = 2k\pi + m - \tfrac{1}{2}x \quad \text{oder} \quad (u+1)x = 2k\pi$$

gegeben sind, wo k irgend eine ganze Zahl bedeutet; und stehen x und π in einem rationalen Verhältnisse, so hat die Reihe, wenn $u=\infty$ ist, unendlich viele Perioden, aber nur eine bestimmte Zahl immer wiederkehrender Summen-Werthe. Setzt man in dem allgemeinen Summen-Ausdrucke successive $u=0$, $u=1$, $u=2$, ... $u=n$, so erhält man die $n+1$ verschiedenen Werthe von $S\sin(m+ux)$, nemlich:

$$-\frac{\cos(m+\frac{1}{2}x)}{2\sin\frac{1}{2}x}+\frac{\cos(m-\frac{1}{2}x)}{2\sin\frac{1}{2}x},$$

$$-\frac{\cos(m+\frac{3}{2}x)}{2\sin\frac{1}{2}x}+\frac{\cos(m-\frac{1}{2}x)}{2\sin\frac{1}{2}x},$$

$$-\frac{\cos(m+\frac{5}{2}x)}{2\sin\frac{1}{2}x}+\frac{\cos(m-\frac{1}{2}x)}{2\sin\frac{1}{2}x},$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$-\frac{\cos(m+\frac{1}{2}(2n+1)x)}{2\sin\frac{1}{2}x}+\frac{\cos(m-\frac{1}{2}x)}{2\sin\frac{1}{2}x},$$

und das arithmetische Mittel dieser Werthe ist

$$\frac{\cos(m-\frac{1}{2}x)}{2\sin\frac{1}{2}x}-\frac{1}{(n+1)2\sin\frac{1}{2}x}[\cos(m+\tfrac{1}{2}x)+\cos(m+\tfrac{3}{2}x)+\cos(m+\tfrac{5}{2}x)+\cdots$$
$$\cdots+\cos(m+\tfrac{1}{2}(2n+1)x)].$$

Der allgemeine Summen-Ausdruck $S\cos(m+ux)$ giebt die Summe der in Klammern stehenden Reihe, wenn n statt u und $(m+\frac{1}{2}x)$ statt m gesetzt wird. Es ist daher diese Summe

$$=\frac{\sin(m+(n+1)x)}{2\sin\frac{1}{2}x}-\frac{\sin m}{2\sin\frac{1}{2}x}=\frac{\cos(m+(\frac{1}{2}n+1)x)\sin(\frac{1}{2}(n+1)x)}{\sin\frac{1}{2}x}=0,$$

weil nach der Voraussetzung $(n+1)x=2k\pi$ ist. Das arithmetische Mittel der verschiedenen Summenwerthe ist demnach $=\frac{\cos(m-\frac{1}{2}x)}{2\sin\frac{1}{2}x}$: dies ist aber auch der analytische Ausdruck für die unendliche Reihe

$$\sin m+\sin(m+x)+\sin(m+2x)+\cdots,$$

wovon man sich durch Multiplication der Reihe mit dem Nenner leicht überzeugen kann.

Auf gleiche Weise findet man, dafs der analytische Ausdruck für die unendliche Reihe

$$\cos m+\cos(m+x)+\cos(m+2x)+\cdots=-\frac{\sin(m-\frac{1}{2}x)}{2\sin\frac{1}{2}x}$$

das arithmetische Mittel der verschiedenen Summenwerthe ist.

Da nun bei den hier betrachteten Reihen, gleich wie bei den Reihen

$$1-x+x^2-x^3+\quad\cdots=\frac{1}{1+x},$$

$$1-x^2+x^3-x^5+x^6-\cdots=\frac{1+x}{1+x+x^2}$$

für den Werth 1 von x dieselben Summenwerthe sich fortwährend wiederholen, so dafs, bei dem Wegfall der Interpolation, die Operation des arithmetischen

Mittels sich auf das Nehmen des Mittels der verschiedenen Summenwerthe reducirt, so ergiebt sich, dafs die Bedeutung eines arithmetischen Mittels für die Reihen

$$\sin m + \sin(m + x) + \sin(m + 2x) + \cdots,$$
$$\cos m + \cos(m + x) + \cos(m + 2x) + \cdots$$

in ganz gleicher Weise Geltung findet, wie bei den nach Potenzen einer Variabeln geordneten Reihen.

Setzt man $m = 0$, so erhält man Reihen, die nach den Sinus oder Cosinus der Vielfachen eines Bogens fortschreiten; für welche demnach die nemliche Bedeutung Statt findet.

Die obigen Formeln geben z. B. für $m = 0$:

$$1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cdots = \tfrac{1}{2},$$

oder

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cdots = -\tfrac{1}{2}.$$

Setzt man $x = \frac{1}{3}\pi$, so wird die Reihe

$$= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} - 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} - 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + 1 + \tfrac{1}{2} \text{ etc.}$$

Die 6 verschiedenen Summenwerthe sind

$$\tfrac{1}{2},\ 0,\ -1,\ -1\tfrac{1}{2},\ -1,\ 0,$$

und deren arithmetisches Mittel ist

$$\tfrac{1}{6}[\tfrac{1}{2} + 0 - 1 - 1\tfrac{1}{2} - 1 + 0] = -\tfrac{1}{2}.$$

§. 19.

Anderweite Auffassung der divergenten Reihen.

Man kann die divergenten unendlichen Reihen noch aus einem andern Gesichtspuncte betrachten. Ist

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots$$

eine Gleichung zwischen dem geschlossenen Ausdruck $f(x)$ und einer Reihe mit wechselnden Zeichen, oder einer Reihe mit bleibenden Zeichen, und ist x' der Werth von x, bei welchem die convergente Reihe in eine divergente übergeht, so ist die unendliche Reihe, in der gewöhnlichen Weise als Summe unendlich vieler Glieder betrachtet, so lange $x < x'$, eine continuirliche Function, welche für jeden Werth von x *einen* bestimmten Summenwerth hat. So wie aber x den Werth von x' erreicht und übersteigt, tritt eine Discontinuität ein, und die unendliche Reihe hat fortan für jeden Werth von $x > x'$

zwei Summenwerthe, gleich $+\infty$ oder $-\infty$, je nachdem die unendlich große Zahl der Glieder als gerade oder als ungerade angenommen wird.

Nach den Paragraphen (3 und 4.) gilt nun für jeden Werth von n die Gleichung $\frac{1}{2}(S_{n_1}+S_{n_2})=f(x)$; sie gilt mithin auch für $n=\infty$; alsdann sind zwar, wenn $x>x'$, $S_{n_1}=+\infty$, $S_{n_2}=-\infty$, immer aber ist $\frac{1}{2}(S_{n_1}+S_{n_2})=f(x)$. Ist $n=\infty$, so sind offenbar S_{n_1} und S_{n_2} die zwei verschiedenen Summenwerthe der unendlichen divergenten Reihe, welche einem Werthe von $x \gtreqless x'$ correspondiren. Man kann daher die Bedeutung der divergenten Reihen auch wie folgt darstellen.

So lange die unendliche Reihe

$$a+bx+cx^2+dx^3+\cdots$$

eine continuirliche Function bleibt, gilt die Gleichung

$$f(x) = a+bx+cx^2+dx^3+\cdots$$

für alle Werthe von x; tritt aber eine Discontinuität dieser Function ein, so ist der Ausdruck $f(x)$ gleich dem arithmetischen Mittel aus den beiden Summenwerthen, welche der unendlichen Reihe für irgend einen Werth von x zukommen.

Dieses Gesetz ist dem Inhalte nach identisch mit den bekannten *Fourier*schen Theoremen für die Reihen

$$f(x) = \tfrac{1}{2}A_0+A_1\cos x+A_2\cos 2x+\cdots,$$
$$F(x) = B_1\sin x+B_2\sin 2x+B_3\sin 3x+\cdots,$$

wo

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos nt\,dt,$$
$$B_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} F(t)\sin nt\,dt;$$

nur daſs letztere beschränkter sind und die Discontinuität auf Seiten des geschlossenen Ausdrucks eintritt.

Ich enthalte mich für jetzt weiterer Reflexionen über dies Gesetz, welches eine Erweiterung bekommen wird, wenn die Bedeutung eines arithmetischen Mittels *mehrerer* Summenwerthe für alle divergenten Reihen allgemein bewiesen sein wird. Sollte mir die Muſse vergönnt werden, so beabsichtige ich die Ausführung dieses Beweises und die Erstreckung der Theorie auf alle unendliche divergente Formen zu versuchen, und da wäre dann der Ort, das obige Gesetz einer näheren Betrachtung zu unterziehen.

In dieser Abhandlung ist bewiesen worden: dafs die divergenten unendlichen Reihen die Bedeutung eines arithmetischen Mittels, resp. eines Aggregats arithmetischer Mittel haben: dafs man im Stande ist, ihren Werth zu bestimmen, und dafs ihre Anwendung bei analytischen Rechnungen zu fehlerhaften Resultaten nicht Veranlassung geben kann.

Es folgt daraus, dafs die gegenwärtig herrschende Ansicht unbegründet ist und dafs sie beseitigt werden mufs, damit die Wissenschaft von einer unnöthigen, fast in alle Gebiete der höheren Analysis eingreifenden Beschränkung befreit werde.

Möge die Macht der Wahrheit meinem Worte Eingang verschaffen und die Mängel meiner Darstellung ersetzen!

Das alte Räthsel der Bedeutung divergenter Reihen ist offenbar gelöset. Zur vollständigen Begründung des in (§. 19.) für Reihen mit wechselnden Zeichen und für Reihen mit bleibenden Zeichen nachgewiesenen Gesetzes bedarf es indefs noch eines allgemeinen Beweises, der die Bedeutung eines arithmetischen Mittels *mehrerer* Summenwerthe auf alle divergenten Reihen erstreckt. Ich übergebe den Gegenstand der Öffentlichkeit, in dem Stadio, worin er sich befindet, damit durch gemeinsames Streben das Ziel desto eher erreicht werden möge.

Ratzeburg, den 6ten Juni 1850.

2.

Summirung der Reihen

$$1+\frac{r+1}{1}\varrho\cos\varphi+\frac{(r+1)(r+2)}{1.2}\varrho^2\cos 2\varphi+\cdots+\frac{(r+1)(r+2)\dots(r+n)}{1.2\dots n}\varrho^n\cos n\varphi,$$
$$(r+1)\varrho\sin\varphi+\frac{(r+1)(r+2)}{1.2}\varrho^2\sin 2\varphi+\cdots+\frac{(r+1)(r+2)\dots(r+n)}{1.2\dots n}\varrho^n\sin n\varphi.$$

(Von Herrn Dr. *Dienger* zu Sinsheim bei Heidelberg.)

Es ist

$$1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{n+r}=\frac{1-x^{n+r+1}}{1-x},$$

also

(1.) $$r(r-1)(r-2)\dots 1+(r+1)r\dots 2x+(r+2)(r+1)\dots 3x^2+\cdots$$
$$\cdots+(r+n)(r+n-1)\dots(n+1)x^n=\frac{d^r}{dx^r}\left\{\frac{1-x^{n+r+1}}{1-x}\right\}.$$

Nun ist

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{1}{(1-x)^2},\quad \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{2}{(1-x)^3},\quad \frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{2.3}{(1-x)^4},\quad\dots$$
$$\frac{d^s}{dx^s}\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{2.3\dots s}{(1-x)^{s+1}},$$

woraus nach dem bekannten Satze

$$\frac{d^r}{dx^r}yz=y\frac{d^rz}{dx^r}+\frac{r}{1}\cdot\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^{r-1}z}{dx^{r-1}}+\frac{r(r-1)}{1.2}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{d^{r-2}z}{dx^{r-2}}+\cdots+\frac{d^ry}{dx^r}z$$

folgt:

(2.) $$\frac{d^r}{dx^r}\left\{\frac{1-x^{n+r+1}}{1-x}\right\}=(1-x^{n+r+1})\frac{2.3\dots r}{(1-x)^{r+1}}+\left(\frac{-(n+r+1)x^{n+r}}{1}\right)\frac{2.3\dots r}{(1-x)^r}$$
$$+\left(\frac{-(n+r+1)(n+r)x^{n+r-1}}{1.2}\right)\frac{2.3\dots r}{(1-x)^{r-1}}+\cdots+\left(\frac{-(n+r+1)(n+r)\dots(n+2)x^{n+1}}{1.2\dots r}\right)\frac{2\dots r}{(1-x)}$$
$$=2.3\dots r\Big[\frac{1}{(1-x)^{r+1}}-\frac{x^{n+r+1}}{(1-x)^{r+1}}-\frac{(n+r+1)}{1}\cdot\frac{x^{n+r}}{(1-x)^r}-\frac{n+r+1}{1}\cdot\frac{n+r}{2}\cdot\frac{x^{n+r-1}}{(1-x)^{r-1}}$$
$$-\cdots-\frac{n+r+1}{1}\cdot\frac{n+r}{2}\dots\frac{n+2}{r}\cdot\frac{x^{n+1}}{1-x}\Big]$$
$$=-\frac{2.3\dots r}{(1-x)^{r+1}}\Big[x^{n+r+1}-1+(n+r+1)(1-x)x^{n+r}$$
$$+\frac{n+r+1}{1}\cdot\frac{n+r}{2}(1-x)^2x^{n+r-1}+\cdots+\frac{n+r+1}{1}\cdot\frac{n+r}{2}\dots\frac{n+2}{r}(1-x)^rx^{n+1}\Big].$$

Die Formel (2.) giebt also die Summe der Reihe (1.).

Hieraus findet sich

$$(3.)\quad 1+\frac{r+1}{1}x+\frac{(r+1)(r+2)}{1.2}x^2+\frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{1.2.3}x^3+\cdots$$
$$\cdots+\frac{(r+1)(r+2)\ldots(r+n)}{1.2.3\ldots n}x^n$$
$$=-\frac{1}{(1-x)^{r+1}}\Big[x^{n+r+1}-1+\Big(\frac{n+r+1}{1}\Big)(1-x)x^{n+r}+\frac{n+r+1}{1}.\frac{n+r}{2}(1-x)^2x^{n+r-1}+\cdots$$
$$\cdots+\Big(\frac{n+r+1}{1}\Big)\frac{n+r}{2}\cdots\frac{n+2}{r}(1-x)^r x^{n+r}\Big],$$

wo, wie leicht zu sehen, die erste Seite $n+1$, die zweite $r+1$ Glieder hat.

Für $x=1$ reducirt sich die zweite Seite auf $\frac{0}{0}$. Durch $r+1$ auf einander folgende Differentiationen aber ergiebt sich

$$(4.)\quad 1+\frac{r+1}{1}+\frac{r+1}{1}.\frac{r+2}{2}+\frac{r+1}{1}.\frac{r+2}{2}.\frac{r+3}{3}+\cdots+\frac{r+1}{1}.\frac{r+2}{2}\cdots\frac{r+n}{n}$$
$$=\frac{n+1}{1}.\frac{n+2}{2}\cdots\frac{n+r+1}{r+1};$$

wie bekannt.

Man setze nun in der Formel (3.) $x=\varrho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, wo ϱ eine positive Gröfse und φ ein Winkel zwischen 0 und 2π ist, so ist

$$(5.)\quad \begin{cases} 1-x = 1-\varrho\cos\varphi-i\varrho\sin\varphi = s(\cos\psi+i\sin\psi), \\ \text{wenn} \\ s = +\sqrt{((1-\varrho\cos\varphi)^2+\varrho^2\sin^2\varphi)}, \\ \cos\psi = \frac{1-\varrho\cos\varphi}{s},\quad \sin\psi = \frac{-\varrho\sin\varphi}{s}, \end{cases}$$

also s positiv und ψ zwischen 0 und 2π angenommen wird.

Daraus findet sich

$$(1-x)^k = s^k[\cos k\psi+i\sin k\psi],\quad x^h = \varrho^h[\cos h\varphi+i\sin h\varphi],$$
$$(1-x)^k x^{n+r-k+1}$$
$$= s^k\varrho^{n+r-k+1}[\cos\{(n+r+1-k)\varphi+k\psi\}+i\sin\{(n+r+1-k)\varphi+k\psi\}]$$

Führt man diese Werthe in (3.) ein, erwägt, dafs

$$\frac{1}{(1-x)^{r+1}} = \frac{\cos(r+1)\psi-i\sin(r+1)\psi}{s^{r+1}},$$

und trennt sogleich, so erhält man

$$(6.)\quad 1+\frac{r+1}{1}\varrho\cos\varphi+\frac{r+1}{1}\cdot\frac{r+2}{2}\varrho^2\cos 2\varphi+\frac{r+1}{1}\cdot\frac{r+2}{2}\cdot\frac{r+3}{3}\varrho^3\cos 3\varphi+\cdots$$
$$\cdots+\frac{r+1}{1}\cdot\frac{r+2}{2}\cdots\frac{r+n}{n}\varrho^n\cos n\varphi$$
$$=-\frac{\cos(r+1)\psi}{\varepsilon^{r+1}}\Big[\varrho^{n+r+1}\cos(n+r+1)\varphi-1+\left(\frac{n+r+1}{1}\right)\varepsilon\varrho^{n+r}\cos\{(n+r)\varphi+\psi\}$$
$$+\frac{n+r+1}{1}\cdot\frac{n+r}{2}\varepsilon^2\varrho^{n+r-1}\cos\{(n+r-1)\varphi+2\psi\}+\cdots$$
$$\cdots+\frac{n+r+1}{1}\cdot\frac{n+r}{2}\cdots\frac{n+2}{r}\varepsilon^r\varrho^{n+1}\cos\{(n+1)\varphi+r\psi\}\Big]$$
$$-\frac{\sin(r+1)\psi}{\varepsilon^{r+1}}\Big[\varrho^{n+r+1}\sin(n+r+1)\varphi+\frac{n+r+1}{1}\varepsilon\varrho^{n+r}\sin\{(n+r)\varphi+\psi)$$
$$+\frac{n+r+1}{1}\cdot\frac{n+r}{2}\varepsilon^2\varrho^{n+r-1}\sin\{(n+r-1)\varphi+2\psi\}+\cdots$$
$$\cdots+\frac{n+r+1}{1}\cdot\frac{n+r}{2}\cdots\frac{n+2}{r}\varepsilon^r\varrho^{n+1}\sin\{(n+1)\varphi+r\psi\}\Big]$$
$$=\frac{\cos(r+1)\psi}{\varepsilon^{r+1}}-\frac{1}{\varepsilon^{r+1}}\Big[\varrho^{n+r+1}\cos\{(n+r+1)\varphi-(r+1)\psi\}$$
$$+\frac{n+r+1}{1}\varepsilon\varrho^{n+r}\cos\{(n+r)\varphi-r\psi\}$$
$$+\frac{n+r+1}{1}\cdot\frac{n+r}{2}\varepsilon^2\varrho^{n+r-1}\cos\{(n+r-1)\varphi-(r-1)\psi\}+\cdots$$
$$\cdots+\frac{n+r+1}{1}\cdot\frac{n+r}{2}\cdots\frac{n+2}{r}\varepsilon^r\varrho^{n+1}\cos\{(n+1)\varphi-\psi\}\Big];$$

$$(7.)\quad \frac{r+1}{1}\varrho\sin\varphi+\frac{r+1}{1}\cdot\frac{r+2}{2}\varrho^2\sin 2\varphi+\cdots+\frac{r+1}{1}\cdot\frac{r+2}{2}\cdots\frac{r+n}{n}\varrho^n\sin n\varphi,$$
$$=-\frac{\cos(r+1)\psi}{\varepsilon^{r+1}}\Big[\varrho^{n+r+1}\sin(n+r+1)\varphi+\frac{n+r+1}{1}\varepsilon\varrho^{n+r}\sin\{(n+r)\varphi+\psi\}+\cdots$$
$$\cdots+\left(\frac{n+r+1}{1}\right)\frac{n+r}{2}\cdots\frac{n+2}{r}\varepsilon^r\varrho^{n+1}\sin(n+1)\varphi+r\psi\}\Big]$$
$$+\frac{\sin(r+1)\psi}{\varepsilon^{r+1}}\Big[\varrho^{n+r+1}\cos(n+r+1)\varphi-1+\frac{n+r+1}{1}\cos\{(n+r)\varphi+\psi\}+\cdots$$
$$\cdots+\frac{n+r+1}{1}\cdot\frac{n+r}{2}\cdots\frac{n+2}{r}\varepsilon^r\varrho^{n+1}\cos\{(n+1)\varphi+r\psi\}\Big]$$
$$=-\frac{\sin(r+1)\psi}{\varepsilon^{r+1}}-\frac{1}{\varepsilon^{r+1}}\Big[\varrho^{n+r+1}\sin\{(n+r+1)\varphi-(r+1)\psi\}$$
$$+\frac{n+r+1}{1}\varepsilon\varrho^{n+r}\sin\{(n+r)\varphi-r\psi\}+\cdots$$
$$\cdots+\frac{n+r+1}{1}\cdot\frac{n+r}{2}\cdots\frac{n+2}{r}\sin\{(n+1)\varphi-\psi\}\Big];$$

Die in (6.) und (7.) vorkommenden Gröfsen ε, ψ sind durch die Gleichungen (5.) bestimmt.

Ist in den Formeln (6.) und (7.) $\varrho < 1$, so ist, wenn $n = \infty$ gesetzt wird, $\varrho^{n+\nu} = 0$, also für $\varrho < 1$:

$$(8.)\begin{cases} 1+\frac{r+1}{1}\varrho\cos\varphi+\frac{r+1}{1}\cdot\frac{r+2}{2}\varrho^2\cos2\varphi+\frac{r+1}{1}\cdot\frac{r+2}{2}\cdot\frac{r+3}{3}\varrho^3\cos3\varphi+\dots\text{ in inf.}\\ \qquad = \frac{\cos(r+1)\psi}{\varepsilon^{r+1}},\\ (r+1)\varrho\sin\varphi+\frac{r+1}{1}\cdot\frac{r+2}{2}\varrho^2\sin2\varphi+\frac{r+1}{1}\cdot\frac{r+2}{2}\cdot\frac{r+3}{3}\varrho^3\sin3\varphi+\dots\text{ in inf.}\\ \qquad = -\frac{\sin(r+1)\psi}{\varepsilon^{r+1}}; \end{cases}$$

welches bekannte Formeln sind, wenn man r statt $r+1$ setzt.

Als specielle Formeln zieht man aus (6. und 7.):

$$(9.)\begin{cases} 1+2\varrho\cos\varphi+3\varrho^2\cos2\varphi+4\varrho^3\cos3\varphi+\dots+(n+1)\varrho^n\cos n\varphi\\ =\frac{\cos2\psi}{\varepsilon^2}-\frac{1}{\varepsilon^2}\Big[\varrho^{n+2}\cos\{n+2)\varphi-2\psi\}+\frac{n+2}{1}\varepsilon\varrho^{n+1}\cos\{(n+1)\varphi-\psi\}\Big];\\ 2\varrho\sin\varphi+3\varrho^2\sin2\varphi+4\varrho^3\sin3\varphi+\dots+(n+1)\varrho^n\sin n\varphi\\ =-\frac{\sin2\psi}{\varepsilon^2}-\frac{1}{\varepsilon^2}\Big[\varrho^{n+2}\sin\{(n+2)\varphi-2\psi\}+\frac{n+2}{1}\varepsilon\varrho^{n+1}\sin\{(n+1)\varphi-\psi\}\Big];\\ 1.2+2.3\varrho\cos\varphi+3.4\varrho^2\cos2\varphi+4.5\varrho^3\cos3\varphi+\dots\\ \qquad\dots+(n+1)(n+2)\varrho^n\cos n\varphi\\ =\frac{2\cos3\psi}{\varepsilon^3}-\frac{2}{\varepsilon^3}\Big[\varrho^{n+3}\cos\{n+3)\varphi-3\psi\}+\frac{n+3}{1}\varepsilon\varrho^{n+2}\cos\{(n+2)\varphi-2\psi\}\\ \qquad+\frac{n+3}{1}\cdot\frac{n+2}{2}\varepsilon^2\varrho^{n+1}\cos\{(n+1)\varphi-\psi\}\Big];\\ 2.3\varrho\sin\varphi+3.4\varrho^2\sin2\varphi+4.5\varrho^3\sin3\varphi+\dots+(n+1)(n+2)\varrho^n\sin n\varphi\\ =-\frac{2\sin3\psi}{\varepsilon^3}-\frac{2}{\varepsilon^3}\Big[\varrho^{n+3}\sin\{(n+3)\varphi-3\psi\}+\frac{n+3}{1}\varepsilon\varrho^{n+2}\sin\{(n+2)\varphi-2\psi\}\\ \qquad+\frac{n+3}{1}\cdot\frac{n+2}{2}\varepsilon^2\varrho^{n+1}\sin\{(n+1)\varphi-\psi\}\Big],\\ \text{u. s. f.} \end{cases}$$

Setzt man in den Formeln (6. und 7.) $\pi+\varphi$ statt φ, so erhält man Reihen mit abwechselnden Zeichen.

Für $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ findet sich aus (6.)

$$1 - \frac{(r+1)(r+2)}{1.2}\varrho^2 + \frac{(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)}{1.2.3.4}\varrho^4 - \cdots + \frac{(r+1)(r+2)\cdots(r+4n)}{1.2\ldots4n}\varrho^{4n}$$

$$= \frac{\cos(r+1)\frac{1}{2}\pi}{(1+\varrho^2)^{\frac{1}{2}(r+1)}} - \frac{1}{(1+\varrho^2)^{\frac{1}{2}(r+1)}}\Big[\varrho^{4n+r+1}\cos(r+1)(\tfrac{1}{2}\pi+\psi)$$

$$+ \frac{4n+r+1}{1}(1+\varrho^2)^{\frac{1}{2}}\varrho^{4n+r}\cos r(\tfrac{1}{2}\pi+\psi)$$

$$+ \cdots + \frac{4n+r+1}{1}\cdots\frac{4n+2}{r}(1+\varrho^2)^{\frac{1}{2}r}\varrho^{4n+1}\cos(\tfrac{1}{2}\pi+\psi)\Big],$$

$$\cos\psi = \frac{1}{(1+\varrho^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \sin\psi = \frac{+\varrho}{(1+\varrho^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Ähnliche Ableitungen sind ferner leicht.

Setzt man in den Formeln (8.) $\frac{\varrho}{r}$ statt r und nimmt $r > \varrho$, so gelten dieselben für jedes φ und man erhält, indem man zugleich r statt $r+1$ setzt:

$$1 + \frac{\varrho\cos\varphi}{1} + \frac{1+\frac{1}{r}}{1.2}\varrho^2\cos2\varphi + \frac{\left(1+\frac{1}{r}\right)\left(1+\frac{2}{r}\right)}{1.2.3}\varrho^3\cos3\varphi + \cdots \text{ in inf.}$$

$$= \frac{\cos r\psi}{}$$

$$\varrho\sin\varphi + \frac{1+\frac{1}{r}}{1.2}\varrho^2\sin2\varphi + \frac{\left(1+\frac{1}{r}\right)\left(1+\frac{2}{r}\right)}{1.2.3}\varrho^3\sin3\varphi + \cdots \text{ in inf.}$$

$$= -\frac{\sin r\psi}{\varrho^r}.$$

Läfst man nun r fortwährend zunehmen, so nähern sich die ersten Seiten dieser beiden Gleichungen den Formen

$$1 + \frac{\varrho}{1}\cos\varphi + \frac{\varrho^2}{1.2}\cos2\varphi + \frac{\varrho^3}{1.2.3}\cos3\varphi + \cdots \text{ in inf. und}$$

$$\varrho\sin\varphi + \frac{\varrho^2}{1.2}\sin2\varphi + \frac{\varrho^3}{1.2.3}\sin3\varphi + \cdots \text{ in inf.}$$

Die Grenzen der zweiten Seiten finden sich folgendermafsen:

$$\cos r\psi = \cos^r\psi\left[1 - \frac{r(r-1)}{1.2}\mathrm{tg}^2\psi + \frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{1.2.3.4}\mathrm{tg}^4\psi - \cdots\right]$$

$$= \frac{\left(1-\frac{\varrho}{r}\cos\varphi\right)^r}{\left(1-\frac{2\varrho}{r}\cos\varphi+\frac{\varrho^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}r}}\left[1 - \frac{1-\frac{1}{r}}{1.2}\cdot\frac{\varrho^2\sin^2\varphi}{\left(1-\frac{\varrho}{r}\cos\varphi\right)^2}\right.$$

$$\left. + \frac{\left(1-\frac{1}{r}\right)\left(1-\frac{2}{r}\right)\left(1-\frac{3}{r}\right)}{1.2.3.4}\cdot\frac{\varrho^4\sin^4\varphi}{\left(1-\frac{\varrho}{r}\cos\varphi\right)^4} - \cdots\right]$$

Nun nähert sich für ein unendlich wachsendes r bekanntlich $\left(1-\frac{\varrho}{r}\cos\varphi\right)^r$ der Gröfse $e^{-r\cos\varphi}$, $\left(1-\frac{2\varrho}{r}\cos\varphi+\frac{\varrho^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}r}=\left(1-\frac{\varrho}{\frac{1}{2}r}\cos\varphi+\frac{\frac{1}{2}\varrho^2}{\frac{1}{2}r^2}\right)^{\frac{1}{2}r}$ der Gröfse $e^{-r\cos\varphi}$, d. h. derselben Gröfse (vergl. z. B. das „Organon der gesammten transcendenten Analysis von Dr. *Dirksen*, I. S. 627), also nähert sich $\frac{\left(1-\frac{\varrho}{r}\cos\varphi\right)^r}{\left(1-\frac{2\varrho}{r}\cos\varphi+\frac{\varrho^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}r}}$ der Einheit. Die in Klammern eingeschlossene Gröfse nähert sich dagegen dem Ausdruck

$$1-\frac{\varrho^2\sin^2\varphi}{1.2}+\frac{\varrho^4\sin^4\varphi}{1.2.3.4}-\cdots \text{ in inf.} = \cos(\varrho\sin\varphi).$$

Endlich nähert sich $\frac{1}{e^r}$ der Gröfse $\frac{1}{e^{-r\cos\varphi}}=e^{r\cos\varphi}$ und also

$$\frac{\cos r\psi}{e^r} \text{ der Gröfse } e^{r\cos\varphi}\cos(\varrho\sin\varphi).$$

Ganz eben so findet sich, dafs sich

$$\frac{\sin r\psi}{e^r} \text{ der Gröfse } -e^{r\cos\varphi}\sin(\varrho\sin\varphi)$$

nähert, so dafs

$$(10.)\quad 1+\frac{\varrho}{1}\cos\varphi+\frac{\varrho^2}{1.2}\cos 2\varphi+\frac{\varrho^3}{1.2.3}\cos 3\varphi+\cdots \text{ in inf.} = e^{\varrho\cos\varphi}\cos(\varrho\sin\varphi),$$

$$\frac{\varrho}{1}\sin\varphi+\frac{\varrho^2}{1.2}\sin 2\varphi+\frac{\varrho^3}{1.2.3}\sin 3\varphi+\cdots \text{ in inf.} = e^{\varrho\cos\varphi}\sin(\varrho\sin\varphi)$$

ist; welches zwei bekannte Formeln sind, die sich hier auf einfachem Wege ergaben.

Multiplicirt man die zweite dieser Gleichungen mit i, addirt beide Gleichungen, setzt $\varrho(\cos\varphi+i\sin\varphi)=x$ und erwägt, dafs

$$e^{\varrho\cos\varphi}(\cos(\varrho\sin\varphi)+i\sin(\varrho\sin\varphi)) = e^{\varrho\cos\varphi+i\varrho\sin\varphi} = e^x$$

ist, so findet sich

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\cdots \text{ in inf.} = e^x.$$

Setzt man in dieser Reihe xi und dann $-xi$ statt x, addirt die Resultate und erinnert sich, dafs $\frac{e^{xi}+e^{-xi}}{2}=\cos x$, $\frac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i}=\sin x$ ist, so erhält man die bekannten Entwicklungen für $\cos x$ und $\sin x$, wo x willkürlich (imaginär) ist.

Es liefsen sich auch die übrigen Reihen der Analysis aus diesen Ergebnissen ableiten; was aber keine Schwierigkeit hat.

Sinsheim, im Januar 1847.

3.

Über den Werth eines bestimmten Integrals, aus der unbestimmten Integralfunction gezogen, falls dieselbe von der Form arc tang $f(x)$ ist, wo $f(x)$ eine eindeutige Function von x vorstellt.

(Von dem Herrn Professor *Raabe* in Zürich.)

(Aus den Mittheilungen der Zürcherischen naturforschenden Gesellschaft.)

Die Schwierigkeit, wenn aus einer unbestimmten Integralfunction von der Form

$$\arcsin f(x), \quad \operatorname{arc\,tang} f(x), \quad \text{u. s. w.}$$

der Werth eines bestimmten Integrals abzuleiten ist, sind dem mit der Integralrechnung Vertrauten bekannt. Die vorliegende Note hat den Zweck, die Lösung dieses Problems in seiner ganzen Allgemeinheit zu geben, für den Fall, wo $f(x)$ eine eindeutige Function von x ist.

Vorerst können alle vieldeutigen Functionen von vorhin gedachter Beschaffenheit nach bekannten Sätzen der Analysis des Endlichen auf die *eine* Function arc tang $f(x)$ gebracht werden; daher wir nur *diese* zum Gegenstande unserer Mittheilung machen.

Von der Annahme des Vorhandenseins einer Integralgleichung von der Form

$$(1.) \quad \int \varphi(x)\,dx = \operatorname{arc\,tang}[f(x)]$$

ausgehend, wo $\varphi(x)$ und $f(x)$ eindeutige Functionen von x sind, theilen wir hier einen Doppelsatz mit, der das bestimmte Integral $\int^b \varphi(x)\,dx$ angiebt, falls $\varphi(x)\omega$ (wo ω eine unendlich klein werdende Gröfse ist) für alle Werthe von $x=a$ bis $x=b$ unendlich klein werdend bleibt, also wo der Übergang von einem dieser Werthe zum unmittelbar folgenden durch das Increment ω geschieht.

Wenn a kleiner als b ist, welches wir durch $b-a=+$ andeuten wollen, und ferner $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_k$ zwischen a und b fallende Zahlen-

werthe von x sind, die, ähnlich ausgedrückt, den Bedingungen

$\alpha_1 - a = +,\ \alpha_2 - \alpha_1 = +,\ \alpha_3 - \alpha_2 = +,\ \ldots\ \alpha_k - \alpha_{k-1} = +,\ b - \alpha_k = +$

entsprechen und die Grenzen bilden, wo die Function $f(x)$ in (1.) von dem einen Zeichen zu dem entgegengesetzten übergeht: so lautet der erwähnte Doppelsatz folgendermaafsen:

Hat die Function $f(x)$ in (1.) von $x = a$ bis $x = \alpha_1$ positive Werthe, von $x = \alpha_1$ bis $x = \alpha_2$ negative, von $x = \alpha$ bis $x = \alpha_3$ wieder positive Werthe, u. s. w., so ist

$$(2.)\quad \int_a^b \varphi(x)\,dx = (-1)^k \operatorname{arc\,tang}[(-1)^k f(b-\omega)] - \operatorname{arc\,tang}[f(a+\omega)]$$
$$+2\{\operatorname{arc\,tang}[f(\alpha_1-\omega)] - \operatorname{arc\,tang}[f(\alpha_2+\omega)] + \cdots$$
$$\cdots (-1)^{k-1}\operatorname{arc\,tang}[f(\alpha_k+(-1)^k\omega)]\}.$$

Wenn aber das Gegentheil Statt findet, d. h., wenn $f(x)$ in (1.) von $x = a$ bis $x = \alpha_1$ negativ, von $x = \alpha_1$ bis $x = \alpha_2$ positiv, von $x = \alpha_2$ bis $x = \alpha_3$ wieder negativ ist, u. s. w, so erhält man folgende Bestimmungsgleichung:

$$(3.)\quad \int_a^b \varphi(x)\,dx = (-1)^{k-1} \operatorname{arc\,tang}[(-1)^{k-1} f(b-\omega)] + \operatorname{arc\,tang}[-f(a+\omega)]$$
$$-2\{\operatorname{arc\,tang}[f(\alpha_1+\omega)] - \operatorname{arc\,tang}[f(\alpha_2-\omega)] + \cdots$$
$$\cdots (-1)^{k-1}\operatorname{arc\,tang}[f(\alpha_k+(-1)^{k-1}\omega)]\}.$$

In diesen zwei Bestimmungsgleichungen ist ω eine unendlich klein werdende Gröfse, und ein Ausdruck rechter Hand der Gleichheitszeichen von der Form $\operatorname{arc\,tang}[\lambda]$ stellt den kleinsten positiven Kreisbogen vom Halbmesser 1 vor, dessen trigonometrische Tangente der jedesmal positiven Gröfse λ gleich ist.

Bei der Begründung dieser Ergebnisse sind folgende Momente zu beachten.

1) Wenn durch $((\operatorname{arc\,tang}\lambda))$ sämmtliche Kreisbogenwerthe angedeutet werden, denen *dieselbe* Tangente λ zugehört, so bestehen folgende zwei Bestimmungsgleichungen:

$$((\operatorname{arc\,tang}\lambda)) = r\pi + \operatorname{arc\,tang}\lambda,$$
$$((\operatorname{arc\,tang}\lambda)) = r\pi - \operatorname{arc\,tang}[-\lambda].$$

Die erste besteht für alle positiven, die zweite für alle negativen Werthe von λ, und in beiden ist r eine beliebige ganze und positive Zahl, Null mitbegriffen.

2) Wenn γ eine zwischen a und b fallende Zahl ist, so hat man:

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_a^\gamma \varphi(x)\,dx + \int_\gamma^b \varphi(x)\,dx.$$

3) Die im ersten Bande meiner Differential- und Integralrechnung in den Nrn. 132 bis 134 begründeten Sätze.

4) Wenn endlich α_g einen der oben gebrauchten Zahlenwerthe α_1, α_2, α_3, ... α_k vorstellt, so besteht unter den aufgestellten Prämissen folgende Gleichung:

$$f(\alpha_g - \omega) + f(\alpha_g + \omega) = 0,$$

welche man auch als Grenzgleichung beim unendlichen Abnehmen von ω ansehen kann.

Zürich, 1847.

4.

Note sur l'addition des fonctions elliptiques.

(Par M. *A. Cayley* à Londres.)

Soit, pour observer autant que possible la symetrie:

$$Su = \sqrt{k} \sin \operatorname{am} \frac{u}{\sqrt{k}},$$

$$Cu = \cos \operatorname{am} \frac{u}{\sqrt{k}},$$

$$Gu = \Delta \operatorname{am} \frac{u}{\sqrt{k}},$$

$$\alpha = k + \frac{1}{k}, \quad \tfrac{1}{2} v = \frac{K}{\sqrt{k}}, \quad \tfrac{1}{2} s = \frac{K+2K'}{\sqrt{k}};$$

et soit pour abréger:

$$Su = x, \quad Sv = y, \quad \text{etc.},$$

$$Cu = \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{k}\right)} = X_{,},$$

$$Gu = \sqrt{(1 - kx^2)} = X_{,,},$$

$$Cu\,Gu = \sqrt{(1 - \alpha x^2 + x^4)} = X_{,}X_{,,} = X.$$

Cela posé, les méthodes d'*Abel* donnent les expressions suivantes de sin am d'une somme quelconque d'arcs: savoir

$$S(u+v+\cdots) = (-1)^{n-1} \frac{[\theta, \theta^3, \ldots \theta^{2n-1}, \Theta, \theta^2\Theta, \ldots \theta^{2n-4}\Theta]}{[1, \theta^2, \ldots \theta^{2n-2}, \theta\Theta, \theta^3\Theta, \ldots \theta^{2n-3}\Theta]},$$

pour un nombre *impair* $2n-1$ d'arcs, et

$$S(u+v+\cdots) = -\frac{[1, \theta^2, \ldots \theta^{2n}, \theta\Theta, \theta^3\Theta, \ldots \theta^{2n-3}\Theta]}{[\theta, \theta^3, \ldots \theta^{2n-1}, \Theta, \theta^2\Theta, \ldots \theta^{2n-2}\Theta]}$$

pour un nombre pair $2n$ d'arcs. Dans ces expressions les symboles dans lesquelles entrent les lettres θ, Θ, sont censés représenter les déterminants, dont on obtient les termes en changeant successivement ces lettres en x, X; y, Y; etc.

J'ai trouvé qu'on a aussi

$$C(u+v+\cdots) = \frac{[\Theta_{,}, \theta^2\Theta_{,}, \ldots \theta^{2n-2}\Theta_{,}, \theta\Theta_{,,}, \theta^3\Theta_{,,}, \ldots \theta^{2n-3}\Theta_{,,}]}{[1, \theta^2, \ldots \theta^{2n-2}, \theta\Theta, \theta^3\Theta, \ldots, \theta^{2n-3}\Theta]}$$

pour un nombre impair $2n-1$ d'arcs, et

$$C(u+v+\cdots) = \frac{[\theta\Theta_{,}, \theta^3\Theta_{,}, \ldots \theta^{2n-1}\Theta_{,}, \Theta_{,,}, \theta^2\Theta_{,,}, \ldots \theta^{2n-2}\Theta_{,,}]}{[\theta, \theta^3, \ldots \theta^{2n-1}, \Theta, \theta^2\Theta, \ldots \theta^{2n-2}\Theta]}$$

pour un nombre pair $2n$ d'arcs. Les valeurs correspondantes de $G(u+v+\cdots)$ se trouvent en échangeant les symboles $\Theta_{,}$ et $\Theta_{,,}$.

Particulièrement pour la somme de trois arcs on a:

$$S(u+v+w) = \frac{-[\theta, \theta^2, \Theta]}{[1, \theta^2, \theta\Theta]},$$

$$C(u+v+w) = \frac{[\Theta_{,}, \theta^2\Theta_{,}, \theta\Theta_{,,}]}{[1, \theta^2, \theta\Theta]},$$

$$G(u+v+w) = \frac{[\Theta_{,,}, \theta^2\Theta_{,,}, \theta\Theta_{,}]}{[1, \theta^2, \theta\Theta]}.$$

Pour réduire ces expressions à une forme qui soit encore applicable au cas où deux quelconques des quantités u, v, w sont égales, il n'y a qu'à multiplier les termes des fractions à droite par

$$\Omega = \frac{-(xY+yX)(yZ+zY)(zX+xZ)}{(x^2-y^2)(y^2-z^2)(z^2-x^2)}.$$

Cela donne, après une réduction un peu difficile:

$$-\Omega[\theta,\ \theta^2,\ \Theta] = (xYZ+yZX+zXY) - xyz(\alpha - x^2 - y^2 - z^2 + x^2y^2z^2)$$

$$\Omega[\Theta_{,}, \theta^2\Theta_{,}, \theta\Theta_{,,}] = (1-kx^2y^2z^2)X_{,}Y_{,}Z_{,} - \frac{1}{k}(yzX+zxY+xyZ)X_{,,}Y_{,,}Z_{,,}$$

$$\Omega[\Theta_{,,}, \theta^2\Theta_{,,}, \theta\Theta_{,}] = \left(1-\frac{1}{k}x^2y^2z^2\right)X_{,,}Y_{,,}Z_{,,} - k(yzX+zxY+xyZ)X_{,}Y_{,}Z_{,}$$

$$\Omega[1,\ \theta^2,\ \theta\Theta] = 1-y^2z^2-z^2x^2-x^2y^2+\alpha x^2y^2z^2-xyz(xYZ+yZX+zXY)$$

de manière qu'en écrivant

$$M = 1-x^2y^2-y^2z^2-z^2x^2+\alpha x^2y^2z^2-xyz(xYZ+yZX+zXY),$$

on a

$$S(u+v+w) = \frac{xYZ+yZX+zXY-xyz(\alpha-x^2-y^2-z^2+x^2y^2z^2)}{M},$$

$$C(u+v+w) = \frac{(1-kx^2y^2z^2)X_{,}Y_{,}Z_{,}-\frac{1}{k}yzX+zxY+xyZ)X_{,,}Y_{,,}Z_{,,}}{M},$$

$$G(u+v+w) = \frac{\left(1-\frac{1}{k}x^2y^2z^2\right)X_{,,}Y_{,,}Z_{,,}-k(yzX+zxY+xyZ)X_{,}Y_{,}Z_{,}}{M}.$$

Les mêmes formules peuvent être trouvées plus simplement en écrivant $u = \frac{1}{2}v+\frac{1}{2}\varpi$, $v+\frac{1}{2}v+\frac{1}{2}\varpi$ au lieu de u, v. La somme $u+v+w$ se change par là en $u+v+w+(v+\varpi)$, et les fonctions $S(u+v+w)$, $C(u+v+w)$, $G(u+v+w)$ deviennent $S(u+v+w)$, $-C(u+v+w)$, $-G(u+v+w)$. De plus x, $X_{,}$, $X_{,,}$, X et y, $Y_{,}$, $Y_{,,}$, Y se changent en $-\frac{1}{x}$, $\frac{-2}{\sqrt{k}}\cdot\frac{X_{,,}}{x}$,

$2\sqrt{k}\cdot\frac{X_{\prime}}{x}$, $\frac{X}{x^2}$ et $-\frac{1}{y}$, $\frac{-2}{\sqrt{k}}\cdot\frac{Y_{\prime\prime}}{y}$, $2\sqrt{k}\cdot\frac{Y_{\prime}}{y}$, $\frac{Y}{y^2}$, et l'on a

$$S(u+v+w) = -\begin{vmatrix} x^2, & 1, & -xX \\ y^2, & 1, & -yY \\ z, & z^3, & Z \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} x^3, & x, & -X \\ y^3, & y, & -Y \\ 1, & z^2, & zZ \end{vmatrix}$$

$$C(u+v+w) = \frac{1}{k}\begin{vmatrix} X_{\prime\prime}x^2, & X_{\prime\prime}, & kX_{\prime}x \\ Y_{\prime\prime}y^2, & Y_{\prime\prime}, & kY_{\prime}y \\ Z_{\prime}, & z^2Z_{\prime}, & zZ_{\prime\prime} \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} x^3, & x, & -X \\ y^3, & y, & -Y \\ 1, & z^2, & zZ \end{vmatrix}$$

$$G(u+v+w) = k\begin{vmatrix} X_{\prime}x^2, & X_{\prime}, & \frac{1}{k}X_{\prime\prime}x \\ Y_{\prime}y^2, & Y_{\prime}, & \frac{1}{k}Y_{\prime\prime}y \\ Z_{\prime\prime}, & z^2Z_{\prime\prime}, & zZ_{\prime} \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} x^3, & x, & -X \\ y^3, & y, & -Y \\ 1, & z^2, & zZ \end{vmatrix}$$

Ces formules conduisent aux formes réduites que l'on obtient en multipliant par le facteur beaucoup plus simple

$$\Omega_{\prime} = -\frac{xY+yX}{x^2-y^2}.$$

En passant, il y a à noter les équations identiques

$$\frac{(yZ+zY)(zX+xZ)}{(y^2-z^2)(z^2-x^2)}\begin{vmatrix} x, & x^3, & X \\ y, & y^3, & Y \\ z, & z^3, & Z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^3, & x, & -X \\ y^3, & y, & -Y \\ 1, & z^2, & zZ \end{vmatrix} \text{ etc.}$$

auxquelles conduit la méthode qui vient d'être expliquée. Aussi en multipliant les valeurs de $C(u+v+w)$, $G(u+v+w)$ on obtient l'équation

$$C(u+v+w)G(u+v+w)$$
$$= \frac{\Psi . XYZ + \Lambda yzX + MzxY + NxyZ}{\{1-y^2z^2-z^2x^2-x^2y^2+\alpha x^2y^2z^2-xyz(xYZ+yZX+zXY)\}^2}$$

dans laquelle

$$\Psi = 1+y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2-4\alpha x^2y^2z^2+x^2y^2z^2(x^2+y^2+z^2)+x^4y^4z^4,$$
$$\Lambda = \Pi+2x^2Y^2Z^2,$$
$$M = \Pi+2y^2Z^2X^2,$$
$$N = \Pi+2z^2X^2Y^2,$$
$$\Pi = -\alpha+2(x^2+y^2+z^2)-\alpha(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2)+(2\alpha^2-4)x^2y^2z^2$$
$$+2x^2y^2z^2(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2)-\alpha x^2y^2z^2(x^2+y^2+z^2)-\alpha x^4y^4z^4.$$

Pour le cas de quatre arcs, je n'ai trouvé que le sin am de la *somme*. En effet on a

$$S(u+v+w+p) = -\begin{vmatrix} 1, & x^2, & x^4, & xX \\ 1, & y^2, & y^4, & yY \\ 1, & z^2, & z^4, & zZ \\ 1, & t^2, & t^4, & tT \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} x, & x^3, & X, & x^2X \\ y, & y^3, & Y, & y^2Y \\ z, & z^3, & Z, & z^2Z \\ t, & t^3, & T, & t^2T \end{vmatrix}$$

où les termes de la fraction sont à multiplier par

$$\Omega = -\frac{(xY+yX)(xZ+zX)(xT+tX)(yZ+zY)(zT+tZ)(tY+yT)}{(x^2-y^2)(x^2-z^2)(x^2-t^2)(y^2-z^2)(z^2-t^2)(t^2-y^2)}.$$

Mais il est plus simple de se servir de la forme

$$S(u+v+w+p) = -\begin{vmatrix} x^4, & x^2, & 1, & -Xx \\ y^4, & y^2, & 1, & -Yy \\ 1, & z^2, & z^4, & Zz \\ 1, & t^2, & t^4, & Tt \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} x^3, & x, & -Xx^2, & -X \\ y^3, & y, & -Yy^2, & -Y \\ z, & z^3, & Z, & Zz^2 \\ t, & t^3, & T, & Tt^2 \end{vmatrix}$$

que l'on obtient de la même manière que la forme analogue pour trois arcs. Ici le facteur est

$$\Omega_1 = \frac{(yX+xY)(zT+tZ)}{(x^2-y^2)(z^2-t^2)},$$

et l'on obtient, toute réduction faite,

$$S(u+v+w+p) = \frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{D}},$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{N} = {} & (1-x^2y^2z^2t^2)(xYZT+yZTX+zTXY+tXYZ) \\ & -\{(\alpha-x^2-y^2-z^2-t^2+y^2z^2t^2+z^2t^2x^2+t^2x^2y^2+x^2y^2z^2-\alpha^2x^2y^2z^2t^2) \\ & \qquad \times (Xyzt+Yztx+Ztxy+Txyz)\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{D} = {} & 1-x^2y^2-x^2z^2-x^2t^2-y^2z^2-z^2t^2-t^2y^2 \\ & \qquad -(x^2y^2+x^2z^2+x^2t^2+y^2z^2+z^2t^2+t^2y^2)x^2y^2z^2t^2 \\ & +x^4y^4z^4t^4+\alpha(x^2y^2z^2+y^2z^2t^2+z^2t^2x^2+t^2x^2y^2) \\ & \qquad +\alpha(x^2+y^2+z^2+t^2)x^2y^2z^2t^2 \\ & +(2-2\alpha^2)x^2y^2z^2t^2 \\ & -(x^2Y^2+y^2X^2)ztZT-(x^2Z^2+z^2X^2)ytYT-(x^2T^2+t^2X^2)yzYZ \\ & -(y^2Z^2+z^2Y^2)xtXT-(z^2T^2+t^2Z^2)xyXY-(t^2Y^2+y^2T^2)xzXZ.\end{aligned}$$

Il y a à remarquer qu'en employant la première valeur de $S(u+v+w+p)$ et le facteur correspondant, on aurait trouvé le même numérateur, et aussi le même dénominateur, ce qui donne lieu à des équations identiques, semblables à celles qui ont lieu pour le cas de trois arcs.

Revenons à l'expression

$$\begin{vmatrix} x, & x^3, & X \\ y, & y^3, & Y \\ z, & z^3, & Z \end{vmatrix} \frac{(yZ+zY)(zX+xZ)(xY+yX)}{(y^2-z^2)(z^2-x^2)(x^2-y^2)}$$

qui donne le numérateur de $S(u+v+w)$. En mettant $x^2 = a$, $\frac{1}{x}X = A$ etc. on voit qu'il s'agit d'effectuer la division de

$$\begin{vmatrix} 1, & a, & A \\ 1, & b, & B \\ 1, & c, & C \end{vmatrix} (B+C)(C+A)(A+B)$$

par le produit $(b-c)(c-a)(a-b)$, les fonctions A, B, C denotant des racines carreés de fonotions rationnelles d'une forme particulière. Or en supposant toujours que les carrés de A, B, C soient des fonctions rationnelles, et d'ailleurs d'une forme quelconque, cela peut se faire dans tous les cas particuliers au moyen de l'équation identique

$$\begin{vmatrix} 1, & a, & A \\ 1, & b, & B \\ 1, & c, & C \end{vmatrix} (B+C)(C+A)(A+B)$$

$$= \begin{vmatrix} 1, & a, & A^2 \\ 1, & b, & B^2 \\ 1, & c, & C^2 \end{vmatrix} (A^2+B^2+C^2+BC+CA+AB) - \begin{vmatrix} 1, & a, & A^4 \\ 1, & b, & B^4 \\ 1, & c, & C^4 \end{vmatrix}$$

De même le dénominateur de $S(u+v+w)$ depend de l'équation analogue

$$\begin{vmatrix} 1, & a, & aA \\ 1, & b, & bB \\ 1, & c, & cC \end{vmatrix} (B+C)(C+A)(A+B)$$

$$= \begin{vmatrix} 1, & a, & aA^2 \\ 1, & b, & bB^2 \\ 1, & c, & cC^2 \end{vmatrix} (A^2+B^2+C^2+BC+CA+AB) - \begin{vmatrix} 1, & a, & aA^4 \\ 1, & b, & bB^4 \\ 1, & c, & cC^4 \end{vmatrix}$$

et le numérateur et le dénominateur de $S(u+v+w+p)$ dependent des équations

$$\begin{vmatrix} 1, & a, & a^2, & aA \\ 1, & b, & b^2, & bB \\ 1, & c, & c^2, & cC \\ 1, & d, & d^2, & dD \end{vmatrix} (A+B)(A+C)(A+D)(B+C)(B+D)(C+D)$$

$$= M \begin{vmatrix} 1, & a, & a^2, & aA^2 \\ 1, & b, & b^2, & bB^2 \\ 1, & c, & c^2, & cC^2 \\ 1, & d, & d^2, & dD^2 \end{vmatrix} - N \begin{vmatrix} 1, & a, & a^2, & aA^4 \\ 1, & b, & b^2, & bB^4 \\ 1, & c, & c^2, & cC^4 \\ 1, & d, & d^2, & dD^4 \end{vmatrix} + P \begin{vmatrix} 1, & a, & a^2, & aA^6 \\ 1, & b, & b^2, & bB^6 \\ 1, & c, & c^2, & cC^6 \\ 1, & d, & d^2, & dD^6 \end{vmatrix}$$

dans lesquelles

$$M = 2ab^2c^2 + \cdots + a^3b^2 + \cdots + a^3bc + \cdots + 3a^2bcd + \cdots$$
$$N = (a+b+c+d)(a^2+b^2+c^2+d^2) + (abc+bcd+cda+dab)$$
$$P = a+b+c+d$$

$$\begin{vmatrix} 1, & a, & A, & aA \\ 1, & b, & B, & bB \\ 1, & c, & C, & cC \\ 1, & d, & D, & dD \end{vmatrix} (A+B)(A+C)(A+D)(B+C)(B+D)(C+D)$$

$$= (a^2b^2 + \cdots + abc^2 + \cdots + 2abcd) \begin{vmatrix} 1, & a, & A^2, & aA^2 \\ 1, & b, & B^2, & bB^2 \\ 1, & c, & C^2, & cC^2 \\ 1, & d, & D^2, & dD^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1, & a, & A^4, & aA^4 \\ 1, & b, & B^4, & bB^4 \\ 1, & c, & C^4, & cC^4 \\ 1, & d, & D^4, & dD^4 \end{vmatrix}$$

Mais je n'ai pas encore trouvé la loi générale de ces équations.

Pour faciliter l'usage des symboles S, C, G, je veux exprimer par cette notation les propriétés les plus simples des fonctions elliptiques. Cela me donnera aussi l'opportunité d'arranger d'une manière particulière les formules qui se rapportent à la somme ou à la différence, de deux arcs. On a d'abord

$$C^2u = 1 - \frac{1}{k} \cdot S^2u,$$
$$G^2u = 1 - k . S^2u,$$
$$S'u = Cu . Gu,$$
$$C'u = -\frac{1}{k} \cdot Su . Gu,$$
$$G'u = -k . Su . Cu,$$

$$S(0) = 0, \qquad C(0) = 1, \qquad G(0) = 1,$$
$$S'(0) = 1, \qquad C'(0) = 0, \qquad G'(0) = 0,$$
$$S(-u) = -S(u), \qquad C(-u) = C(u), \qquad G(-u) = G(u),$$

$$S(\tfrac{1}{2}v) = \sqrt{k}, \quad S(\tfrac{1}{2}\varpi) = \frac{1}{\sqrt{k}}, \quad S(\tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{2}\varpi) = \infty,$$
$$C(\tfrac{1}{2}v) = 0, \quad C(\tfrac{1}{2}\varpi) = \frac{2k'}{k}, \quad C(\tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{2}\varpi) = \infty,$$
$$G(\tfrac{1}{2}v) = k', \quad G(\tfrac{1}{2}\varpi) = 0, \quad G(\tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{2}\varpi) = \infty,$$

$$S(u+\tfrac{1}{2}v) = \frac{\sqrt{k}.Cu}{Gu}, \quad S(u+\tfrac{1}{2}\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\frac{Gu}{Cu},$$

$$C(u+\tfrac{1}{2}v) = \frac{-k'}{\sqrt{k}}\cdot\frac{Su}{Gu}, \quad C(u+\tfrac{1}{2}\varepsilon) = \frac{2k'}{k}\cdot\frac{1}{Cu},$$

$$G(u+\tfrac{1}{2}v) = \frac{k'}{Gu}, \quad G(u+\tfrac{1}{2}\varepsilon) = \frac{-2k'}{\sqrt{k}}\cdot\frac{Su}{Gu},$$

$$S(u+\tfrac{1}{2}v+\tfrac{1}{2}\varepsilon) = -\frac{1}{Su},$$

$$C(u+\tfrac{1}{2}v+\tfrac{1}{2}\varepsilon) = \frac{-i}{\sqrt{k}}\cdot\frac{Gu}{Su},$$

$$G(u+\tfrac{1}{2}v+\tfrac{1}{2}\varepsilon) = 2\sqrt{k}\cdot\frac{Cu}{Su},$$

$$S(u+mv+n\varepsilon) = (-1)^{m+n}.Su,$$

$$C(u+mv+n\varepsilon) = (-1)^{m}.Cu,$$

$$G(u+mv+n\varepsilon) = (-1)^{n}.Gu.$$

Dans ces équations les symboles S, C, G, v, ε, k, k', i et S, G, C, ε, v, $\frac{1}{k}$, $\frac{2k'}{k}$, $-i$ peuvent être échangés les uns d'avec les autres. Les formules fondamentales qui se rapportent à deux arcs sont

$$S(u+v) = \frac{Su.Cv.Gv.+Sv.Cu.Gu}{1-S^2u.S^2v},$$

$$C(u+v) = \frac{Cu.Cv-\frac{1}{k}\cdot Su.Gu.Sv.Gv}{1-S^2u.S^2v},$$

$$G(u+v) = \frac{Gu.Gv-k.Su.Cu.Sv.Cv}{1-S^2u.S^2v},$$

auxquelles on ajoutera:

$$C(u+v)G(u+v)$$

$$= \frac{(1+S^2u.S^2v)(Cu.Gu.Cv.Gv-Su.Sv(\alpha-2S^2u-2S^2v+\alpha S^2u.S^2v)}{(1-S^2u.S^2v)^2}.$$

Mais pour trouver toutes les formes différentes de ces équations, mettons pour abréger (en supposant comme auparavant $Su=x$ etc.):

$$A = xY, \quad A' = yX,$$

$$B = X_{,}Y_{,}, \quad B' = -\frac{1}{k}xyX_{,,}Y_{,,},$$

$$C = X_{,,}Y_{,,}, \quad C' = -kxyX_{,}Y_{,},$$

$$P = x^2 - y^2,$$
$$Q = 1 - \frac{1}{k}x^2 - \frac{1}{k}y^2 + x^2y^2,$$
$$R = 1 - kx^2 - ky^2 + x^2y^2,$$
$$S = XY, \qquad S' = -\frac{k'^2}{k}xy,$$
$$T = xX_{\prime\prime}Y_{\prime}, \qquad T' = -yY_{\prime\prime}X_{\prime},$$
$$U = xX_{\prime}Y_{\prime\prime}, \qquad U' = \quad yY_{\prime}X_{\prime\prime},$$
$$K = 1 - x^2y^2.$$

Alors on aura

$$S(u+v) = \frac{A+A'}{K} = \frac{P}{A-A'} = \frac{U+U'}{B-B'} = \frac{T-T'}{C-C'},$$
$$C(u+v) = \frac{B+B'}{K} = \frac{U-U'}{A-A'} = \frac{Q}{B-B'} = \frac{S+S'}{C-C'},$$
$$G(u+v) = \frac{C+C'}{K} = \frac{T+T'}{A-A'} = \frac{S-S'}{B-B'} = \frac{R}{C-C'},$$

et les valeurs correspondantes de $S(u-v)$, $C(u-v)$, $G(u-v)$ se trouveront en échangeant les signes de A', B', C', S', T', U'.

De ces formules il peut être tiré un grand nombre d'équations identiques; par exemple celles-ci:

$$(A^2 - A'^2) = KP, \text{ etc.}, \qquad S^2 - S'^2 = QR, \text{ etc.},$$
$$(B+B')(C-C') = K(S+S'), \text{ etc.}, \quad (B-B')(C+C') = K(S-S'), \text{ etc.},$$
$$BC - B'C' = KS, \text{ etc.}, \qquad B'C - BC' = KS', \text{ etc.},$$
$$(S+S')(T+T')(U+U') = (S-S')(T-T')(U-U') = PQR,$$
$$S'T'U' + S'TU + ST'U + STU' = 0,$$
$$STU + ST'U' + S'TU' + S'T'U = PQR,$$
$$(A-A')(S+S') = (C-C')(U-U'), \text{ etc.},$$
$$(A+A')(S-S') = (C+C')(U+U'), \text{ etc.},$$
$$(A-A')(T-T') = P(C-C'), \text{ etc.},$$
$$(A+A')(T+T') = P(C+C'), \text{ etc.},$$
$$(A-A')(U+U') = P(B-B'), \text{ etc.},$$
$$(A+A')(U-U') = P(B+B'), \text{ etc.},$$

etc. etc.,

et ces équations donnent immédiatement et dans les formes les plus simples,

—

les formules qui se rapportent aux sommes et aux produits des fonctions de $u+v$ et $u-v$, par exemple

$$S(u+v)(S(u-v) = \frac{A^2-A'^2}{K^2},$$

savoir au moyen de la première de ces equations identiques:

$$S(u+v)S(u-v) = \frac{P}{K};$$

de manière que toutes ces formules peuvent être considérées comprises dans les équations fondamentales et dans ce système d'équations identiques.

A Londres 58 Chancery Lane 28ième Juillet 1849.

5.
Note sur quelques théorèmes de la géométrie de position.

(Suite du Mémoire tome 31 p. 213, tome 34 p. 270 et tome 38 p. 97 de ce Journal.)

(Par M. *Cayley* à Londres.)

---

§. VII.

En considérant les soixante droites auxquelles donne lieu le théorème de ***Pascal***, et en appliquant ce théorème aux hexagones différents qui peuvent être formés par six points sur une même conique, M. ***Kirkman*** a trouvé que ces soixante droites se coupent trois à trois non seulement dans les vingt points de M. ***Steiner*** (points que M. ***Kirkman*** nomme les points g), mais aussi dans soixante points h. Il a trouvé aussi qu'il y a quatre vingt dix droites J, dont chacune contient deux des points h et un des quarante cinq points p, dans lesquels s'entrecoupent, deux à deux, les droites menées par deux quelconques des six points. Les recherches étendues que M. ***Kirkman*** a faites dans la géométrie de position, paraitront dans un numéro prochain du „Cambridge and Dublin Mathématical Journal." En attendant, M. ***Kirkman*** a publié dans le „Manchester Courrier" du 27ième Juin 1849, vingt cinq théorèmes qui contiennent les résultats de ses recherches.

Moi, j'ai depuis trouvé que les soixante points h sont situés trois à trois sur vingt droites X. Tous ces théorèmes peuvent être démontrés assez facilement quand on connait la manière suivant laquelle les points et les droites doivent êtres combinés en construisant les points et les droites h, J, etc. Cela se fait alors d'une manière très simple, au moyen d'une notation que je vais expliquer.

Représentons les six points sur la conique par 1, 2, 3, 4, 5, 6. En combinant ces points deux à deux par les droites 12, 13 etc., les systèmes tels que 12, 34, 56 peuvent être représentés par les combinaisons binaires des six symboles a, b, c, d, e, f, et au moyen de la table qui se trouve déjà dans le (§. III.) de ce mémoire, savoir de la table

(*A.*)

12.34.56 = *ac*	13.45.62 = *ab*	14.56.23 = *bd*
12.35.64 = *be*	13.46.25 = *cd*	14.52.36 = *ae*
12.36.45 = *df*	13.42.56 = *ef*	14.53.62 = *cf*
15.62.34 = *de*	16.23.45 = *ce*	
15.63.42 = *bc*	16.24.53 = *ad*	
15.64.23 = *af*	16.25.34 = *bf*.	

Le symbole *ac* dénote ici l'ensemble des droites 12, 34, 56; et ainsi de suite.

On voit que pour obtenir les six côtés d'un quelconque des soixante hexagones, il n'y a qu'à combiner les droites correspondantes, par paires, telles que *ab, ac,* qui ont une lettre en commun. Cela posé, les hexagones, ou, si l'on veut, les droites derivées de ces hexagones au moyen du théorème de *Pascal* (droites que je nommerai „*Droites de Pascal*"), peuvent être représentées par les symboles *ab.ac* etc., conformement à la table que voici:

(*B.*)

213456 = *ab.ac*	214356 = *cf.ca*	215346 = *ed.eb*	216345 = *fb.fd*
564 = *ef.eb*	563 = *db.df*	463 = *fa.fd*	453 = *ec.eb*
645 = *dc.df*	635 = *ea.eb*	634 = *cb.ca*	534 = *ad.ac*
465 = *cd.ca*	365 = *ae.ac*	364 = *bc.be*	354 = *da.df*
546 = *ba.be*	536 = *fc.fd*	436 = *de.df*	435 = *bf.be*
654 = *fe.fd*	653 = *bd.be*	643 = *af.ac*	543 = *ce.ca*
314256 = *ea.ef*	315246 = *cb.cd*	316245 = *ad.ab*	415236 = *af.ae*
562 = *bd.ba*	462 = *af.ab*	452 = *ce.ed*	362 = *cb.cf*
625 = *cf.cd*	624 = *ed.ef*	524 = *fb.fe*	623 = *de.db*
265 = *fc.fe*	264 = *de.dc*	254 = *bf.ba*	263 = *ed.ea*
526 = *ae.ab*	426 = *bc.ba*	425 = *da.dc*	326 = *fa.fc*
652 = *db.dc*	642 = *fa.fe*	542 = *ec.ef*	632 = *bc.bd*
	416235 = *ce.cf*	516234 = *ec.ed*	
	352 = *ad.ae*	342 = *bf.bc*	
	523 = *bf.bd*	423 = *ad.af*	
	253 = *fb.fc*	243 = *da.de*	
	325 = *ec.ea*	324 = *ce.cb*	
	532 = *ba.db*	432 = *fb.fa*	

Remarquons maintenant que les droites de *Pascal* qui passent par un point (*p*), tel que 12.45, sont *ca.ce, ba.be, ac.ab, ec.eb.* Cela étant, le point 12.45 peut être représenté par la notation *cb.ae,* et de cette manière le système complet des points *p* est représenté par la table suivante:

(*C.*)

12.34 = *bd.ef*	14.35 = *ab.de*	23.45 = *ad bf*
13.35 = *af.cd*	14.36 = *bf.cd*	23.46 = *bc.de*
12.36 = *ab.ce*	14.56 = *af.ce*	23.56 = *ae.cf*
12.45 = *ae.be*	15.23 = *be.cd*	24.35 = *bf.ce*
12.46 = *ad.cf*	15.24 = *ae.df*	24.36 = *af.de*
12.56 = *bf.de*	15.26 = *ac.bf*	24.56 = *ab.ed*
13.24 = *ac.bd*	15.34 = *ab.cf*	25.34 = *ad.ce*
13.25 = *af.be*	15.36 = *ad.fe*	25.36 = *bd.cf*
13.26 = *bd.ec*	15.46 = *bd.ce*	25.46 = *ab.ef*
13.45 = *cf.de*	16.23 = *ab.df*	26.34 = *af.bc*
13.46 = *ae.bf*	16.24 = *cf.be*	26.35 = *ae.bd*
13.56 = *ad.bc*	16.25 = *ac.de*	26.45 = *cd.ef*
14.23 = *ac.ef*	16.34 = *ae.cd*	34.56 = *be.df*
14.25 = *ce.df*	16.35 = *bc.ef*	35.46 = *ac.df*
14.26 = *ad.be*	16.45 = *af.bd*	36.45 = *ac.be.*

Enfin les droites 12 etc. peuvent être représentées par des symboles tels que ***ac.be.df*** etc., et au moyen de la table suivante, qui est pour ainsi dire la réciproque de la table (*A.*):

(*D.*)

ac.be.df = 12	*ab.ed.fc* = 62	*ae.df.cb* = 36
ac.bd.fe = 56	*ab.ef.cd* = 13	*ae.dc.bf* = 52
ac.bf.ed = 34	*ab.ec.df* = 45	*ae.db.fc* = 14

ad.fb.ce = 16	*af.bc.ed* = 15
ad.fc.eb = 53	*af.be.dc* = 64
ad.fe.be = 24	*af.bd.ce* = 32.

Il y a à remarquer qu'une droite de ***Pascal ab.ac*** contient les points ***bc.ad, bc.ae, bc.af,*** et que par un point ***ab.cd*** passent les droites (les côtés opposés d'un hexagone) ***ac.bd.ef, ad.bc.ef,*** et les droites de ***Pascal ca.cb, da.db, ac.ad, bc.bd.*** Cela posé, en combinant les propriétés déjà connues d'avec celles que j'ai énoncées au commencement de cette section, en particularisant en même temps les combinaisons qui donnent lieu aux points et droites ***g, h, J*** etc. et en adoptant une notation convenable pour ces points et droites, on trouvera ce qui suit:

a) Les droites ***ab.bc, bc.ca, ca.ab*** se rencontrent dans un même point ***abc*** qui est un des vingt points ***g,*** et que j'ai dénoté par le symbole (§. III.) de ce mémoire.

β) Les points *abc, abd, abe, abf* sont situés sur une même droite *ab* qui est une des quinze droites de M. *Steiner* ou de M. *Plücker,* et que j'ai dénotée (§. III.). Je nommerai droites I ces droites.

γ) Les droites *ab.ac, ac.ad, ad.ab* se rencontrent dans un même point *a.ef* qui est un des soixante points *h* de M. *Kirkman.*

δ) Les points *b.cd, c.db, d.bc* sont situés sur la même droite $\{bcd\}$ qui est une de mes vingt droites X.

ε) Les points *ab.cd, e.ab, f.ab* sont situés sur une même droite $(ab)cd$ qui est une des quatre vingt dix points J de M. *Kirkman.*

Quant aux théorèmes (α) et (β), je vais reproduire dans la notation de cette section les démonstrations de M. *Plücker.*

Voici le principe de la démonstration du théorème (α): principe qui s'applique aussi, comme nous le verrons, aux démonstrations des théorèmes (γ, δ et ε).

Supposons qu'il s'agit de démontrer généralement que trois droites X, X', X'' se rencontrent dans un même point, et supposons que ces droites sont déterminées:

$$\begin{array}{lll} X & \text{au moyen des points} & A,\ B,\ C, \\ X' & - \ - \ - \ - \quad - & A',\ B',\ C', \\ X'' & - \ - \ - \ - \quad - & A'',\ B'',\ C''. \end{array}$$

Formons d'abord la table

$$(\odot)\quad \left\{\begin{array}{lll} A'A'', & B'B'', & C'C'', \\ A''A, & B''B, & C''C, \\ AA', & BB', & CC', \end{array}\right.$$

où $A'A''$ etc. sont les droites qui passent par les points A' et A'', etc.; et puis la table

$$(\rrbracket)\quad \left\{\begin{array}{lll} B'B''.C'C'', & C'C''.A'A'', & A'A''.B'B'', \\ B''B.C''C, & C''C.A''A, & A''A.B''B, \\ BB'.CC', & CC'.AA', & AA'.BB', \end{array}\right.$$

où $B'B''.C'C''$ etc. sont les points d'intersection des droites $B'B''$ et $C'C''$ etc. On sait que si les points de l'une quelconque des colonnes verticales de cette dernière table sont situés sur la même droite, les droites X, X', X'' se couperont dans un même point; et reciproquement. Précisèment de la même manière on démontrerait que trois points X, X', X'' sont situés sur une même droite; seulement A, B etc. seraient des droites, $A'A''$ etc. des points;

et ainsi de suite. Or les droites du théorème (α) sont déterminées:

ab.bc au moyen des points ***ac.be, ac.bf, ac.bd,***
bc.ca - - - - - ***ba.ce, ba.ef, ba.cd;***
ca.ab - - - - - ***cb.ae, cb.af, cb.ad;***

donc la table (☉) se réduit à

ac.be.df, ac.bf.de, ac.bd.ef,
ba.ce.df, ba.cf.de, ba.cd.ef,
cb.ae.df, cb.af.de, cb.ad.ef,

et la table (☽) à

be.df, bf.de, bd.ef,
ce.df, cf.de, cd.ef,
ae.df, af.de, ad.ef.

Or les points de la première colonne verticale de cette table sont situés sur la droite ***ed.ef,*** ceux de la deuxième colonne verticale sur la droite ***fd.fe,*** et ceux de la troisième colonne verticale sur la droite ***de.df.*** L'existence de l'une quelconque de ces droites fait voir la vérité du théorème dont il s'agit.

Pour démontrer le théorème (β), considérons à part un quelconque des points ***abc, abd, abe, abf;*** par exemple le point ***abf.*** On peut envisager ce point comme déterminé par les droites ***ab.af, ab.bf,*** et ces droites contiennent:

ab.af les points ***bf.ac, bf.ad, bf.ae,***
ab.bf - - ***af.bc, af.bd, af.be.***

Or ***bf.ac*** et ***af.bc*** sont situés sur la droite ***ab.de.cf; bf.ad*** et ***af.bd*** sur la droite ***ab.ec.df;*** et ***bf.ae*** et ***af.be*** sur la droite ***ab.cd.ef.*** De plus, les points ***bf.ac, bf.ad, bf.ae*** sont situés sur les droites ***ab.bc, ab.bd, ab.be*** respectivement, et les points ***af.bc, af.bd, af.be*** sont situés sur les droites ***ab.ac, ab.ad, ab.ae*** respectivement. Donc on peut représenter les points de la droite ***ab.af*** par les symboles

(***ab.de.cf***)(***ab.bc***), (***ab.ec.df***)(***ab.bd***), (***ab.cd.ef***)(***ab.be***),

et les points de la droite ***ab.bf*** par les symboles

(***ab.de.cf***)(***ab.ac***), (***ab.ec.df***)(***ab.ad***), (***ab.cd.ef***)(***ab.ae***).

Maintenant

Les droites	De même que les droites	Se rencontrent sur la droite
ab.bd, ab.ae	***ab.be, ab.ad,***	***ab.de.cf,***
ab.be, ab.ac	***ab.bc, ab.ae,***	***ab.ec.df,***
ab.bc, ab.ad	***ab.bd, ab.ac,***	***ab.cd.ef,***

c'est à dire, il existe un système de trois hexagones dont les côtés sont

(*ab.de.cf*, *ab.ec.df*, *ab.cd.ef*, *ab.bc*, *ab.bd*, *ab.be*),
(*ab.de.cf*, *ab.ec.df*, *ab.cd.ef*, *ab.ac*, *ab.ad*, *ab.ae*),
(*ab.bc*, *ab.bd*, *ab.be*, *ab.ac*, *ab.ad*, *ab.ae*).

Ces hexagones ont pour angles les mêmes six points. Or l'existence de l'une ou de l'autre des droites *ab.af*, *ab.bf* suffit pour faire voir que ces six points sont situés sur la même conique: donc les côtés opposés du troisième hexagone se rencontrent dans trois points situés sur la même droite. De plus, on voit aisément que les hexagones sont précisément tels, qu'en vertu du théorème (α), les trois droites, auxquelles donnent lieu ces hexagones, se rencontrent dans un même point; et ce point sera évidemment le point *abf*. Mais les côtés opposés du troisième hexagone, savoir les droites *ab.bc* et *ab.ac*; *ab.bd* et *ab.ad*; *ab.be* et *ab.ae*, se rencontrent dans les points *abc*, *abd*, *abf*: donc les quatre points *abc*, *abd*, *abe*, *abf* sont situés sur la même droite: théorème dont il s'agissait.

Pour démontrer le théorème (γ), on n'a qu'à considérer comme déterminées les droites de ce théorème, savoir:

ab.ac	par les points	*bc.ad*,	*bc.ae*,	*bc.af*,
ac.ad	– – –	*cd.ab*,	*cd.ae*,	*cd.af*,
ad.ab	– – –	*bd.ac*,	*bd.ae*,	*bd.af*.

La table (⊙) se réduit alors à

bc.ad.ef,	*da.de*,	*da.df*,
cd.ab.ef,	*ba.be*,	*ba.bf*,
bd.ac.ef,	*ca.ce*,	*ca.cf*,

et la table (☽) à

(*da.df*)(*da.de*),	*af.de*,	*ae.df*,
(*ba.bf*)(*ba.be*),	*af.be*,	*ae.bf*,
(*ca.cf*)(*ca.ce*),	*af.ce*,	*ae.cf*.

Or les points de la deuxième colonne verticale sont situés sur la droite *ea.ef*, et les points de la troisième colonne verticale sur la droite *fa.fe*. L'existence de l'une ou de l'autre de ces droites fait voir que les droites *ab.ac*, *ac.ad*, *ad.ab* se rencontrent dans un même point *a.be*.

Pour démontrer le théorème (δ), il est évident que les points de la première colonne verticale de la table qui vient d'être présentée, sont situés sur la même droite. Mais ces points sont précisément les points *d.bc*, *b.cd*, *c.db*; le théorème est donc démontré.

Enfin, pour démontrer le théorème (ε), nous pouvons considérer les points de ce théorème comme déterminés, savoir:

ab.cd	par les droites	*bc.bd*,	*ad.be.ef*,	*ac.bd.ef*,
f.ab	- - -	*fc.fd*,	*fc.fe*,	*fd.fe*,
e.ab	- - -	*ec.ed*,	*ec.fe*,	*ed.fe*.

La table (⊙) se réduit alors à

cd.ef,	*fce*,	*fde*,
cd.eb,	*cf.eb*,	*df.eb*,
cd.bf,	*ce.bf*,	*de.bf*,

et la table (☽) à

fe,	*ce.cf*,	*de.df*,
fe.fb,	*cb.ce*,	*db.de*,
fe.eb,	*cb.cf*,	*db.df*.

Or les droites de la première colonne verticale de cette table se rencontrent dans le point *bf.be*, celles de la deuxième colonne verticale dans le point *c.ad*, et celles de la troisième colonne verticale dans le point *d.ac*; le théorème dont il s'agit est donc démontré. Dans cette démonstration on aurait aussi pu échanger les lettres *a*, *b*.

Les théorèmes (α) et (γ), peuvent être énoncés par le seul théorème suivant:

„Étant donnés six points sur la même conique, et menant par ces „point neuf droites. de manière que chaque droite passe par deux points et „que par chaque point il passe trois droites: on formera avec ces neuf droites „trois hexagones différents dont chacun a les six points pour angles. Les „droites de *Pascal*, auxquelles donnent lieu ces trois hexagones, se rencon- „treront dans un même point."

En supposant que les système de neuf droites contient toujours un même hexagone, il est possible de compléter de quatre manières différentes le système des neuf droites; savoir, on peut ajouter aux côtés de l'hexagone 1 les trois diagonales de l'hexagone 2, 3 ou 4, en menant une quelconque de ces diagonales et deux droites, chacune par deux angles alternés de l'hexagone. Ces quatre systémes donnent lieu au point *g*, et aux trois points *h*, qui se trouvent sur la droite de *Pascal*, correspondante à l'hexagone dont il s'agit; savoir le premier système donne lieu au point *g*, et les trois derniers systémes aux point *h*.

A Londres 58 Chancery Lane 29ème Juillet 1849.

6.

Mémoire sur les coniques inscrites dans une même surface du second ordre.

(Par M. *A. Cayley* à Londres.)

En considérant une surface quelconque du second ordre, le problème se présente: d'examiner les proprietés des coniques inscrites dans cette surface et des cônes circonscrits. La plupart de ces propriétés sont peut-être connue *); cependant je crois qu'on ne les a pas encore développées systematiquement. Je me propose de donner ici l'analyse des propriétés les plus simples d'un tel système de coniques, et la solution du problème analogue au problème des tactions qui se présente ici, ainsi que quelques théorèmes relatifs au passage à un système de coniques situées dans un même plan et inscrites dans une même conique, en me réservant pour une seconde partie de ce mémoire les développements ultérieurs concernant ce passage et la solution complète du problème analogue au problème de *Malfatti*, généralisé par M. *Steiner*.

Remarquons d'abord que les coniques inscrites et les cônes circonscrits, ainsi que les plans des coniques inscrites et les sommets des cônes circonscrits, sont des figures *réciproques* par rapport à la surface du second ordre. En considérant deux coniques inscrites quelconques, et les cônes circonscrits correspondants, on remarquera que les plans des coniques inscrites se rencontrent dans une droite. Je la nommerai *Droite de symptose*. Les sommets des cônes circonscrits seront situés dans une droite que je nommerai *Droite d'homologie*. Ces deux droites seront évidemment réciproques l'une à l'autre. Il se trouvera sur la droite d'homologie deux points dont chacun est le sommet d'un cône qui passe par les deux coniques inscrites. Ces deux points peuvent être nommés *Points d'homologie*. De même il passera par la droite de *symptose* deux plans, qui sont les plans des coniques dans lesquelles se coupent les deux cônes circonscrits. Ces deux plans peuvent êtres nommés *Plans de symptose*. Les plans de symptose et les points d'homologie ne sont pas seulement des

---

*) Voyez le mémoire de M. *Steiner* „Einige geometrische Betrachtungen" Journal t. I p. 161, et un mémoire de M. *Olivier* „*Quetelet* Correspondance etc." t. V.

figures réciproques: les deux plans de symptose passent aussi par les deux points d'homologie, chacun par le point réciproque de l'autre plan; c'est à dire: les plans de symptose sont des plans *conjugués* par rapport à la surface du second ordre, et les points d'homologie sont des points *conjugués* par rapport à cette même surface. Remarquons aussi qu'en considérant le système formé par les plans des coniques inscrites et les plans tangents à la surface menés par la droite de symptose, on trouvera que les plans de symptose sont les plans doubles (ou si l'on veut les plans *auto-conjugués*) de l'involution. De même, en considérant le système formé par les sommets des cônes circonscrits et par les points de leur intersection avec la surface de la droite d'homologie, on trouvera que les points d'homologie sont les points doubles (ou *auto-conjugués*) de l'involution. Les deux cônes circonscrits qui ont pour sommets les deux points d'homologie, peuvent être nommés *Cônes d'homologie;* de même, les deux coniques inscrites, situés dans les deux plans de symptose, peuvent être nommés *Coniques de symptose.* (En passant, nous remarquerons que ces coniques de symptose correspondent aux „*Potenzkreise*" de M. *Steiner*.) Il est évident que les cônes d'homologie et les coniques de symptose sont des figures réciproques.

En considérant trois coniques inscrites, et les cônes circonscrits correspondants, on verra que les plans des coniques inscrites se rencontrent dans un point que je nommerai *Point de symptose.* Les sommets des cônes circonscrits seront situées dans un plan que je nommerai *Plan d'homologie.* Ce point et le plan seront réciproques l'un à l'autre. En combinant deux à deux les coniques inscrites ou les cônes circonscrits, cela donne lieu à trois droites de symptose qui chacune passe par le point de symptose, et à trois droites d'homologie situées chacune dans le plan d'homologie. Il existe aussi six plans de symptose qui se coupent trois à trois dans quatres droites, arêtes d'une pyramide quadrilatère, qui a pour axes les trois droites de symptose. Les quatre droites dont il s'agit, peuvent être nommées *Axes de symptose.* Il existe également six points d'homologie, situés trois à trois dans quatre droites, côtés d'un quadrilatère qui a pour axes les trois droites d'homologie. Les quatre droites dont il s'agit, peuvent être nommées *Axes d'homologie.* La pyramide et le quadrilatère sont des figures reciproques, et il convient de remarquer (quoique cela soit assez évident) qu'il y a ici trois points d'homologie, non-situés dans un des côtés du quadrilatère, mais contenus dans trois points de symptose qui se coupent dans une arête de la pyramide.

Par l'une quelconque des axes d'homologie il passe deux plans dont chacun touche les trois coniques inscrites; de même il se trouve sur l'une quelconque des axes de symptose deux points, dont chacun est un point d'intersection des trois cônes circonscrits. Cela constitue la solution du problème: Trouver la conique inscrite, ou le cône circonscrit qui touche trois coniques inscrites ou trois cônes circonscrits. Il y a *huit* solutions de ce problème.

Avant d'aller plus loin, je vais indiquer quelques unes des formules analytiques correspondantes à la théorie qui vient d'être expliquée.

Écrivons, pour abréger:

$$U = Ax^2+By^2+Cz^2+Dw^2+2Fyz+2Gxz+2Hxy+2Lxw+2Myw+2Nzw,$$
$$V = \alpha x+\beta y+\gamma z+\delta w,$$

et représentons par $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ les coefficients du système inverse de A, B, C, D, F, G, H, L, M, N. Soit de plus

$$X = Ax+Hy+Gz+Lw,$$

. . . .

$$p^2 = \mathfrak{A}\alpha^2+\mathfrak{B}\beta^2+\mathfrak{C}\gamma^2+\mathfrak{D}\delta^2+2\mathfrak{F}\beta\gamma+2\mathfrak{G}\gamma\alpha+2\mathfrak{H}\alpha\beta+2\mathfrak{L}\alpha\delta+2\mathfrak{M}\beta\delta+2\mathfrak{N}\gamma\delta.$$

Cela posé, en prenant $U=0$ pour équation de la surface du second ordre, et $V_1=0$, $V_2=0$, $V_3=0$ pour les équations des plans des coniques inscrites, on obtient pour l'un des plans de symptose des coniques inscrites $(U=0,\ V_1=0)$, $(U=0,\ V_2=0)$ l'équation très simple $p_2V_1-p_1V_2=0$. Delà on tire pour les coordonnées du point d'homologie, qui est le réciproque de ce plan de symptose, les équations

$$X:Y:Z:W = p_2\alpha_1-p_1\alpha_2 : p_2\beta_1-p_1\beta_2 : p_2\gamma_1-p_1\gamma_2 : p_2\delta_1-p_1\delta_2.$$

En formant également les expressions des coordonnées d'un point d'homologie des deux autres paires de coniques inscrites, on obtient pour équation de l'une des axes d'homologie:

$$\left|\begin{matrix} & X, & Y, & Z, & W \\ p_1, & \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1, & \delta_1 \\ p_2, & \alpha_2, & \beta_2, & \gamma_2, & \delta_2 \\ p_3, & \alpha_3, & \beta_3, & \gamma_3, & \delta_3 \end{matrix}\right| = 0;$$

savoir, en choisissant quatre colonnes verticales quelconques de cette formule, on trouve que les déterminants que l'on obtient, sont tous égaux à zéro. Nous ajouterons que la droite qui, par rapport à la conique $(U=0,\ V_1=0)$, est réciproque de cette axe d'homologie, est donnée par les équations

$$V_1 = 0,\quad V_2:V_3 = p_1p_2-\mathfrak{A}\alpha_1\alpha_2-\cdots : p_1p_3-\mathfrak{A}\alpha_1\alpha_3-\text{etc.}$$

Il est clair que cette droite rencontre la surface du second ordre en deux points situés dans les plans des coniques inscrites qui, au moyen de l'axe d'homologie dont l'équation vient être donnée, sont déterminés de manière à toucher les trois coniques inscrites données. Mais sans se servir des équations de cette droite, on peut déterminer l'équation des deux plans menés par l'axe d'homologie dont il s'agit, de manière à toucher la conique inscrite ($U=0$, $V_1=0$); et la symetrie du résultat fera voir que ces deux plans touchent aussi deux autres coniques inscrites. La recherche de cette équation étant un peu difficile, je la donnerai en détail, en supposant cependant connu le théorème suivant:

En écrivant $v = \lambda x+\mu y+\nu z+\varrho w$, $v' = \lambda' x+\mu' y+\nu' z+\varrho' w$: les plans menés par la droite ($v=0$, $v'=0$) de manière qu'ils touchent la conique inscrite ($U=0$, $V=0$), sont donnés par l'équation

$$p^2[\mathfrak{A}(\lambda v'-\lambda' v)^2+\cdots]-[\mathfrak{A}\alpha(\lambda v'-\lambda' v)+\cdots]^2 = 0.$$

Pour appliquer ce théorème au problème dont il s'agit, nous n'avons qu'à substituer V_1 au lieu de V, et qu'à écrire

$$v = \begin{vmatrix} & a, & b, & c, & d \\ & X, & Y, & Z, & W \\ p_1, & \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1, & \delta \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}, \quad v' = \begin{vmatrix} & a', & b', & c', & d' \\ & X, & Y, & Z, & W \\ p_1, & \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1, & \delta_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

où les coefficients $a, b, c, d;\ a', b', c', d'$ sont des quantités quelconques.

Réduisons d'abord l'expression $\mathfrak{A}\alpha_1(\lambda v'-\lambda' v)+\cdots$ Pour cela, mettons dans les valeurs de v, v', les expressions $\mathfrak{A}\alpha_1+\cdots$, $\mathfrak{H}\alpha_1+\cdots$, etc. à la place de $x, y, \ldots$: les quantités X, Y, Z, W deviennent alors $K\alpha_1$, $K\beta_1$, $K\gamma_1$, $K\delta_1$ (où comme à l'ordinaire K est le déterminant formé par les quantités $A, B, \ldots$), et l'on obtient ainsi, aux signes près:

$$\mathfrak{A}\alpha_1\lambda+\cdots = Kp_1\begin{vmatrix} a, & b, & c, & d \\ \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1, & \delta_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}, \quad \mathfrak{A}\alpha_1\lambda'+\cdots = Kp_1\begin{vmatrix} a', & b', & c', & d' \\ \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1, & \delta_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

et delà

$$\mathfrak{A}\alpha_1(\lambda v'-\lambda' v)+\cdots = Kp_1\Box, \text{ où}$$

$$\Box = \begin{vmatrix} a, & b, & c, & d \\ \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1, & \delta_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}\begin{vmatrix} & a', & b', & c', & d' \\ & X, & Y, & Z, & W \\ p_1, & \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1, & \delta_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a', & b', & c', & d' \\ \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1, & \delta_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}\begin{vmatrix} & a, & b, & c, & d \\ & X, & Y, & Z, & W \\ p_1, & \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1, & \delta_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}:$$

formule qui au moyen des propriétés des déterminants se réduit à

$$\square = \left|\begin{array}{c|c} X,\ Y,\ Z,\ W & a,\ b,\ c,\ d \\ \alpha_{,},\ \beta_{,},\ \gamma_{,},\ \delta_{,} & a',\ b',\ c',\ d' \\ \ldots\ldots\ldots & p_{,},\ \alpha_{,},\ \beta_{,},\ \gamma_{,},\ \delta_{,} \\ & \ldots\ldots\ldots \end{array}\right|$$

Passons à l'expression $\mathfrak{A}(\lambda v'-\lambda' v)^2+\cdots$, que nous mettrons sous la forme

$$\frac{1}{K}\{A[\mathfrak{A}(\lambda v'-\lambda' v)+\cdots]^2+\cdots\}.$$

En prenant des quantités quelconques $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, on obtient par une analyse semblable:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{a}(\lambda v'-\lambda' v)+\cdots = K\bar{\square},\quad \text{où}$$

$$\bar{\square} = \left|\begin{array}{c|c} \mathfrak{a},\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{c},\ \mathfrak{d} & a',\ b',\ c',\ d' \\ a,\ b,\ c,\ d & X,\ Y,\ Z,\ W \\ p_{,},\alpha_{,},\beta_{,},\gamma_{,},\delta_{,} & p_{,},\ \alpha_{,},\ \beta_{,},\ \gamma_{,},\ \delta_{,} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \end{array}\right| - \left|\begin{array}{c|c} \mathfrak{a},\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{c},\ \mathfrak{d} & a,\ b,\ c,\ d \\ a',\ b',\ c',\ d' & X,Y,Z,W \\ p_{,},\alpha_{,},\beta_{,},\gamma_{,},\delta_{,} & p_{,},\alpha_{,},\beta_{,},\gamma_{,},\delta_{,} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \end{array}\right| :$$

formule qui se réduit à

$$\bar{\square} = \left|\begin{array}{c|c} \mathfrak{a},\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{c},\ \mathfrak{d} & a,\ b,\ c,\ d \\ X,\ Y,\ Z,\ W & a',\ b',\ c',\ d' \\ p_{,},\ \alpha_{,},\ \beta_{,},\ \gamma_{,},\ \delta_{,} & p_{,},\ \alpha_{,},\ \beta_{,},\ \gamma_{,},\ \delta' \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \end{array}\right|$$

Delà, en supprimant les facteurs constants de $\square$ et de $\bar{\square}$, et en écrivant pour abréger, on obtient

$$\mathfrak{a}\xi+\mathfrak{b}\eta+\mathfrak{c}\zeta+\mathfrak{d}\omega = \left|\begin{array}{c} \mathfrak{a},\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{c},\ \mathfrak{d} \\ X,\ Y,\ Z,\ W \\ p_{,},\ \alpha_{,},\ \beta_{,},\ \gamma_{,},\ \delta_{,} \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}\right|,$$

expression qui sert à définir les fonctions ξ, η, ζ, ω. L'équation qu'il s'agissait de trouver devient

$$A\xi^2+\cdots-K\left|\begin{array}{c} X,\ Y,\ Z,\ W \\ \alpha_{,},\ \beta_{,},\ \gamma_{,},\ \delta_{,} \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}\right|^2 = 0,$$

où il faut avoir égard que l'on a $X = Ax+\cdots$, etc. Savoir, l'équation qu'on vient d'écrire se décompose nécessairement en facteurs linéaires qui, égalés à zéro, donnent les équations des plans des coniques inscrites qui chacune touchent les trois coniques inscrites données.

Nous avons obtenu ce résultat en traduisant en analyse une construction géométrique; mais on y peut aussi parvenir en considérant le problème d'une manière purement analytique. En effet: soient comme plus haut, $U=0$ l'équation de la surface du second ordre, $V_1=0$, $V_2=0$, $V_3=0$ les équations des plans des trois coniques inscrites données, $V=0$ l'équation du plan de la conique inscrite qui touche chacune de ces trois coniques. La condition pour que cette conique touche la conique inscrite située dans le plan $V_1=0$, est $\mathfrak{A}\alpha\alpha_1+\cdots=pp_1$. On a donc les trois équations

$$\mathfrak{A}\alpha\alpha_1+\cdots=pp_1,$$
$$\mathfrak{A}\alpha\alpha_2+\cdots=pp_2,$$
$$\mathfrak{A}\alpha\alpha_3+\cdots=pp_3.$$

Au lieu de tirer de ces équations les quantités $\alpha:\beta:\gamma:\delta$, nous ajouterons au système la nouvelle équation

$$\alpha x+\cdots=0,$$

par laquelle il sera possible d'éliminer les quatre quantités α, β, γ, δ. En attribuant à $X,\ldots$ la même signification qu'auparavant, nous mettrons les quatre équations sous la forme

$$(\mathfrak{A}\alpha+\cdots)\alpha_1+\cdots=pp_1,$$
$$(\mathfrak{A}\alpha+\cdots)\alpha_2+\cdots=pp_2,$$
$$(\mathfrak{A}\alpha+\cdots)\alpha_3+\cdots=pp_3,$$
$$(\mathfrak{A}\alpha+\cdots)X+\cdots=0.$$

Écrivons de plus

$$(\mathfrak{A}\alpha+\cdots)\mathfrak{a}+\cdots=p\Theta$$

où les quantités $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ sont arbitraires. En éliminant de ces équations les fonctions $(\mathfrak{A}\alpha+\cdots)$, puis en mettant à la place de $p\Theta$ la quantité à gauche de l'équation, on obtient, à un facteur constant près:

$$(\mathfrak{A}\alpha+\cdots)\mathfrak{a}+\cdots=\begin{vmatrix} & \mathfrak{a}, & \mathfrak{b}, & \mathfrak{c}, & \mathfrak{d} \\ & X, & Y, & Z, & W \\ p_1, & \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1, & \delta_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

Cela donne d'abord

$$\mathfrak{A}\alpha\alpha_1+\cdots=p_1\begin{vmatrix} X, & Y, & Z, & W \\ \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1, & \delta_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

Puis, en écrivant $p^2 = \mathfrak{A}\alpha^2 + \cdots = \frac{1}{K}[A(\mathfrak{A}\alpha + \cdots)^2 + \cdots]$, **on a**

$$p^2 = \frac{1}{K}(A\xi^2 + \cdots)$$

où

$$\mathfrak{a}\xi + \cdots, = \left|\begin{array}{ccccc} & \mathfrak{a}, & \mathfrak{b}, & \mathfrak{c}, & \mathfrak{d} \\ & X, & Y, & Z, & W \\ p_{,}, & \alpha_{,}, & \beta_{,}, & \gamma_{,}, & \delta_{,} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right|$$

et delà enfin, en substituant dans l'équation, $\mathfrak{A}\alpha\alpha_1 + \cdots = pp_{,}$, **on obtient comme plus haut, l'équation**

$$A\xi^2 + \cdots - K\left|\begin{array}{cccc} X, & Y, & Z, & W \\ \alpha_{,}, & \beta_{,}, & \gamma_{,}, & \delta_{,} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right|^2 = 0.$$

Il est clair que cette analyse peut être appliquée à la solution d'un nombre quelconque d'équations de la forme $\mathfrak{A}\alpha\alpha_{,} + \cdots = pp_{,}$.

En revenant a la théorie *géométrique*, considérons un point quelconque que nous prendrons pour point de projection: le cône qui passe par une conique inscrite quelconque, aura, comme on sait, un contact double avec le cône qui a pour sommet le point de projection.

Le plan de contact sera le plan mené par le point de projection et par la droite d'intersection du plan de la conique inscrite et du plan réciproque au point de projection. En considérant plusieurs coniques inscrites ayant une droite de symptose commune, tous les cônes auxquels donnent lieu ces coniques inscrites, auront pour arêtes communes les deux droites menées par le point de projection aux points dans lesquels la surface est rencontrée par la droite de symptose commune. Ajoutons que les plans de contact des cônes dont il s'agit, avec le cône circonscrit, rencontrent le plan des deux arêtes communes dans une droite fixe, savoir dans l'une ou l'autre des droites doubles (ou auto-conjuguées) de l'involution, formée par les deux arêtes communes et par les droites dans lesquelles le plan de ces deux arêtes communes rencontre le cône circonscrit. De plus, en considérant les plans tangents, menés par l'une ou par l'autre des deux arêtes communes, ces plans tangents forment un système homologue à celui des plans des coniques inscrites. En considérant en particulier l'une ou l'autre des coniques de symptose de deux coniques inscrites quelconques: le plan tangent du cône correspondant est le plan double

(ou auto-conjugué) de l'involution formée par les plans tangents des cônes qui correspondent aux deux coniques inscrites (c'est à dire par les plans tangents qui passent par l'arête commune dont il s'agit), et par les plans tangents de la surface du second ordre menés par cette même arête commune. C'est là en effet la propriété qui conduit à la construction des coniques de symptose de deux coniques situées dans le même plan et considerées comme inscrites dans une conique donnée. (Ce mémoire sera continué.)

Londres, 20 Août 1849.

7.

Note sur la solution de l'équation $x^{257}-1=0$.

(Par M. *A. Cayley* à Londres.)

Soit p_m la $m^{\text{ième}}$ puissance d'une racine quelconque (l'unité exceptée) de l'équation $x^{257}-1=0$, et représentons par α une racine quelconque (l'unité exceptée) de l'équation $\alpha^{256}-1=0$. En posant l'équation

$$(p_0+\alpha p_1+\alpha^2 p_2 \cdot\cdot + \alpha^{255}p_{255})^2 = M(p_0+\alpha^2 p_1+\alpha^4 p_2 \cdot\cdot + \alpha^{254}p_{255}),$$

on sait, que la quantité M peut être exprimée en fonction rationnelle de α. Cette fonction une fois connue, donnera tout de suite la valeur de l'expression $(p_0+\alpha p_1+\alpha^2 p_2 \cdot\cdot + \alpha^{255}p_{255})^{256}$ en fonction rationnelle de α, et cela suffit pour resoudre l'équation dont il s'agit.

Une solution du problème a été donnée depuis longtemps par M. ***Richelot*** qui commence par supposer que α soit une racine primitive de l'équation $\alpha^{128}-1=0$. Cette solution est comprise, comme cas particulier, dans celle que je vais donner. La question est d'ailleurs intéressante, à cause de son rapport avec la théorie des nombres. En effet, quoiqu'en tant que je sache, l'on n'a pas encore trouvé la règle pour former à priori la valeur de M, il est clair que les recherches de MM. ***Jacobi*** et ***Kummer*** doivent conduire à cette règle. Le résultat ici bas pourra servir pour la vérifier.

Voici la valeur que j'obtiens pour la fonction M:

$$\begin{aligned} M = -2 &+2\alpha -2\alpha^{4} +2\alpha^{5} +2\alpha^{7} +2\alpha^{9} -2\alpha^{10} -2\alpha^{14} -2\alpha^{16} +2\alpha^{21} +2\alpha^{23} \\ &+2\alpha^{25} -2\alpha^{26} -2\alpha^{28} +2\alpha^{29} -2\alpha^{30} +2\alpha^{33} -2\alpha^{34} -2\alpha^{36} +2\alpha^{37} -2\alpha^{38} +2\alpha^{45} \\ &+2\alpha^{47} -2\alpha^{48} +2\alpha^{49} -2\alpha^{50} +2\alpha^{51} +2\alpha^{53} -2\alpha^{54} -2\alpha^{60} +2\alpha^{61} -2\alpha^{64} +2\alpha^{65} \\ &-2\alpha^{66} +2\alpha^{67} -2\alpha^{68} +2\alpha^{69} -2\alpha^{72} -2\alpha^{74} +2\alpha^{75} -2\alpha^{76} +2\alpha^{79} -2\alpha^{80} -2\alpha^{82} \\ &-2\alpha^{84} -2\alpha^{86} +2\alpha^{89} -2\alpha^{92} -2\alpha^{94} -2\alpha^{100} +2\alpha^{101} -2\alpha^{104} -2\alpha^{106} -2\alpha^{108} +2\alpha^{109} \\ &+2\alpha^{111} +2\alpha^{113} -2\alpha^{114} +2\alpha^{115} +2\alpha^{117} +2\alpha^{119} -2\alpha^{122} +2\alpha^{123} -2\alpha^{124} +2\alpha^{127} -2\alpha^{128} \\ &+2\alpha^{129} -2\alpha^{130} -2\alpha^{134} +2\alpha^{135} -2\alpha^{138} +2\alpha^{141} +2\alpha^{145} +2\alpha^{147} +2\alpha^{151} +2\alpha^{153} -2\alpha^{154} \\ &-2\alpha^{156} - \alpha^{160} +2\alpha^{161} +2\alpha^{163} -2\alpha^{164} +2\alpha^{165} -2\alpha^{166} +2\alpha^{171} +2\alpha^{177} +2\alpha^{181} -2\alpha^{182} \\ &+2\alpha^{183} -2\alpha^{186} +2\alpha^{187} +2\alpha^{189} -2\alpha^{190} -2\alpha^{192} +2\alpha^{195} -2\alpha^{196} -2\alpha^{198} +2\alpha^{199} -2\alpha^{206} \\ &-2\alpha^{212} +2\alpha^{213} -2\alpha^{214} +2\alpha^{215} -2\alpha^{216} +2\alpha^{217} -2\alpha^{220} +2\alpha^{221} +2\alpha^{223} +2\alpha^{225} -2\alpha^{226} \\ &+2\alpha^{227} -2\alpha^{228} +2\alpha^{229} +2\alpha^{233} -2\alpha^{234} +2\alpha^{235} -2\alpha^{236} +2\alpha^{237} -2\alpha^{238} +2\alpha^{239} -2\alpha^{240} \\ &+2\alpha^{243} -2\alpha^{244} -2\alpha^{246} +2\alpha^{247} -2\alpha^{248} +2\alpha^{249} -2\alpha^{252} -2\alpha^{254}. \end{aligned}$$

Représentons par M' ce que devient M, en supposant $\alpha^{128}+1=0$, nous obtiendrons

$$\begin{aligned}M' = {} & 2\alpha^{2} -2\alpha^{4} +2\alpha^{5} +2\alpha^{6} +2\alpha^{9} -2\alpha^{13} -2\alpha^{14} -2\alpha^{16} -2\alpha^{17} -2\alpha^{19} +2\alpha^{21} \\ & +2\alpha^{29} -2\alpha^{30} + \alpha^{32} -2\alpha^{34} -2\alpha^{35} -2\alpha^{43} +2\alpha^{46} +2\alpha^{47} -2\alpha^{48} -2\alpha^{50} +2\alpha^{51} \\ & -2\alpha^{55} +2\alpha^{58} -2\alpha^{59} -2\alpha^{60} +2\alpha^{62} +2\alpha^{65} -2\alpha^{66} +2\alpha^{69} +2\alpha^{70} -2\alpha^{71} -2\alpha^{72} \\ & -2\alpha^{74} +2\alpha^{75} -2\alpha^{76} +2\alpha^{78} +2\alpha^{79} -2\alpha^{80} -2\alpha^{82} -2\alpha^{85} -2\alpha^{87} +2\alpha^{88} -2\alpha^{93} \\ & -2\alpha^{94} -2\alpha^{95} -2\alpha^{97} +2\alpha^{98} -2\alpha^{99} -2\alpha^{104} -2\alpha^{105} -2\alpha^{107} +2\alpha^{110} +2\alpha^{112} +2\alpha^{113} \\ & -2\alpha^{114} +2\alpha^{116} +2\alpha^{117} +2\alpha^{118} +2\alpha^{120} -2\alpha^{121} -2\alpha^{122} +2\alpha^{123} +2\alpha^{126} +2\alpha^{127}.\end{aligned}$$

Soient M, M_1' ce que devient M en supposant successivement $\alpha^{128}-1=0$, $\alpha^{64}+1=0$, et soient M_2, M_2' ce que deviennent M ou M_1 en supposant successivement $\alpha^{64}-1=0$, $\alpha^{32}+1=0$, et ainsi de suite, jusqu'à M_7, M_7' qui seront ce que deviennent M ou M_1 etc. en supposant successivement $\alpha^{2}-1=0$, $\alpha+1=0$, nous aurons:

$$\begin{aligned}M_1 = {} & -4 +4\alpha -2\alpha^{2} -2\alpha^{4} +2\alpha^{5} -2\alpha^{6} +4\alpha^{7} +2\alpha^{9} -4\alpha^{10} +2\alpha^{13} -2\alpha^{14} \\ & -2\alpha^{16} +2\alpha^{17} +2\alpha^{19} +2\alpha^{21} +4\alpha^{23} +4\alpha^{25} -4\alpha^{26} -4\alpha^{28} +2\alpha^{29} -2\alpha^{30} - \alpha^{32} \\ & +4\alpha^{33} -2\alpha^{34} +2\alpha^{35} -4\alpha^{36} +4\alpha^{37} -4\alpha^{38} +2\alpha^{43} +2\alpha^{45} +2\alpha^{47} -2\alpha^{48} +4\alpha^{49} \\ & -2\alpha^{50} +2\alpha^{51} +4\alpha^{53} -4\alpha^{54} +2\alpha^{55} -2\alpha^{58} +2\alpha^{59} -2\alpha^{60} +4\alpha^{61} -2\alpha^{62} -4\alpha^{64} \\ & +2\alpha^{65} -2\alpha^{66} +4\alpha^{67} -4\alpha^{68} +2\alpha^{69} -2\alpha^{70} +2\alpha^{71} -2\alpha^{72} -2\alpha^{74} +2\alpha^{75} -2\alpha^{76} \\ & -2\alpha^{78} +2\alpha^{79} -2\alpha^{80} -2\alpha^{82} -4\alpha^{84} +2\alpha^{85} -4\alpha^{86} +2\alpha^{87} -2\alpha^{88} +4\alpha^{89} -4\alpha^{92} \\ & +2\alpha^{93} -2\alpha^{94} +2\alpha^{95} +2\alpha^{97} -2\alpha^{98} +2\alpha^{99} -4\alpha^{100} +4\alpha^{101} -2\alpha^{104} +2\alpha^{105} -4\alpha^{106} \\ & +2\alpha^{107} -4\alpha^{108} +4\alpha^{109} -2\alpha^{110} +4\alpha^{111} -2\alpha^{112} +2\alpha^{113} -2\alpha^{114} +4\alpha^{115} -2\alpha^{116} +2\alpha^{117} \\ & -2\alpha^{118} +4\alpha^{119} -2\alpha^{120} +2\alpha^{121} -2\alpha^{122} +2\alpha^{123} -4\alpha^{124} -2\alpha^{126} +2\alpha^{127}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M_1' = {} & 2\alpha -4\alpha^{3} +2\alpha^{4} +2\alpha^{7} +2\alpha^{8} +2\alpha^{9} -2\alpha^{10} -2\alpha^{11} +2\alpha^{12} +2\alpha^{13} -2\alpha^{15} +2\alpha^{17} \\ & +2\alpha^{18} +2\alpha^{19} +4\alpha^{20} +4\alpha^{22} +2\alpha^{23} +2\alpha^{24} -4\alpha^{26} -2\alpha^{31} - \alpha^{32} +2\alpha^{33} -4\alpha^{38} +2\alpha^{40} \\ & -2\alpha^{41} +4\alpha^{42} +4\alpha^{44} -2\alpha^{45} +2\alpha^{46} -2\alpha^{47} +2\alpha^{49} -2\alpha^{51} +2\alpha^{52} +2\alpha^{53} -2\alpha^{54} -2\alpha^{55} \\ & +2\alpha^{56} -2\alpha^{57} +2\alpha^{60} +4\alpha^{61} -2\alpha^{63}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M_2 = {} & -8 +6\alpha -4\alpha^{2} +4\alpha^{3} -6\alpha^{4} +4\alpha^{5} -4\alpha^{6} +6\alpha^{7} -2\alpha^{8} +2\alpha^{9} -6\alpha^{10} +2\alpha^{11} \\ & -2\alpha^{12} +2\alpha^{13} -2\alpha^{14} +2\alpha^{15} -4\alpha^{16} +2\alpha^{17} -2\alpha^{18} +2\alpha^{19} -4\alpha^{20} +4\alpha^{21} -4\alpha^{22} +6\alpha^{23} \\ & -2\alpha^{24} +8\alpha^{25} -4\alpha^{26} -8\alpha^{28} +4\alpha^{29} -4\alpha^{30} +2\alpha^{31} - \alpha^{32} +6\alpha^{33} -4\alpha^{34} +4\alpha^{35} -8\alpha^{36} \\ & +8\alpha^{37} -4\alpha^{38} -2\alpha^{40} +2\alpha^{41} -4\alpha^{42} +4\alpha^{43} -4\alpha^{44} +6\alpha^{45} -2\alpha^{46} +6\alpha^{47} -4\alpha^{48} +6\alpha^{49} \\ & -4\alpha^{50} +6\alpha^{51} -2\alpha^{52} +6\alpha^{53} -6\alpha^{54} +6\alpha^{55} -2\alpha^{56} +2\alpha^{57} -4\alpha^{58} +4\alpha^{59} -6\alpha^{60} +4\alpha^{61} \\ & -4\alpha^{62} +2\alpha^{63}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M_2' = {} & -7 +2\alpha^{4} -4\alpha^{5} +6\alpha^{7} -2\alpha^{10} -2\alpha^{11} +2\alpha^{12} -4\alpha^{13} -2\alpha^{14} -4\alpha^{15} -4\alpha^{17} +2\alpha^{18} \\ & -4\alpha^{19} -2\alpha^{20} -2\alpha^{21} +2\alpha^{22} +6\alpha^{23} -4\alpha^{27} -2\alpha^{28}.\end{aligned}$$

$$M_3 = -9 +12\alpha -8\alpha^2 + 8\alpha^3 -14\alpha^4 +12\alpha^5 -8\alpha^6 + 6\alpha^7 -4\alpha^8 +4\alpha^9 -10\alpha^{10}+6\alpha^{11}- 6\alpha^{12}+ 8\alpha^{13}- 6\alpha^{14}+8\alpha^{15}- 8\alpha^{16}+8\alpha^{17} -6\alpha^{18}+ 8\alpha^{19}-6\alpha^{20}+10\alpha^{21}-10\alpha^{22}+12\alpha^{23}-4\alpha^{24}+10\alpha^{25}-8\alpha^{26} +4\alpha^{27}-14\alpha^{28}+8\alpha^{29}- 8\alpha^{30}+ 4\alpha^{31}.$$

$$M_3' = -1 +4\alpha -2\alpha^2 -8\alpha^4 +2\alpha^5 +2\alpha^6 -6\alpha^7 -8\alpha^8 -6\alpha^9 -2\alpha^{10} +2\alpha^{11}+8\alpha^{12}+2\alpha^{14}+4\alpha^{15}.$$

$$M_4 = -17 +20\alpha -14\alpha^2 +16\alpha^3 -20\alpha^4 +22\alpha^5 -18\alpha^6 +18\alpha^7 -8\alpha^8 +14\alpha^9-18\alpha^{10}+10\alpha^{11}-20\alpha^{12}+16\alpha^{13}-14\alpha^{14}+12\alpha^{15}.$$

$$M_4' = -9+6\alpha+4\alpha^2+6\alpha^3+6\alpha^5-4\alpha^6+6\alpha^7.$$

$$M_5 = -25+34\alpha-32\alpha^2+26\alpha^3-40\alpha^4+38\alpha^5-32\alpha^6+30\alpha^7.$$

$$M_5' = 15-4\alpha-4\alpha^3.$$

$$M_6 = -65+72\alpha-64\alpha^2+56\alpha^3. \qquad M_6' = -1+16\alpha.$$

$$M_7 = -129+128\alpha. \qquad M_7' = -257.$$

Ces différentes expressions étant trouvées, supposons que α soit une racine primitive, et représentons par $F, F_1, F_2, \ldots F_7$ ce que deviennent M', M_1', M_2', $\ldots M_7'$ en substituant $\alpha, \alpha^2, \alpha^4, \ldots \alpha^{128}$ au lieu de α ($F=M'$, $F_7=-257$), nous aurons

$$(p_0+\alpha p_1+\alpha^2 p_2 \,..\, +\alpha^{255}p_{255})^{256} = -F^{128}.F_1^{64}.F_2^{32}.F_3^{16}.F_4^{8}.F_5^{4}.F_6^{2}.F_7.$$

Cette l'équation constitue la solution dont il s'agit.

Ajoutons encore les formules beaucoup plus simples qui correspondent à l'équation $x^{17}-1=0$. En supposant $\alpha^{16}-1=0$, nous aurons

$$M = -2-\alpha^4+2\alpha^6+2\alpha^7-2\alpha^8+2\alpha^9-2\alpha^{10}+2\alpha^{13}-2\alpha^{14}.$$

$$M' = -2\alpha+2\alpha^2-\alpha^4+2\alpha^6+2\alpha^7.$$

$$M_1 = -4+2\alpha-2\alpha^2-\alpha^4+4\alpha^5-2\alpha^6+2\alpha^7.$$

$$M_1' = -3-2\alpha-2\alpha^3.$$

$$M_2 = -5+6\alpha-4\alpha^2+2\alpha^3. \qquad M_2' = -1+4\alpha.$$

$$M_3 = -9+8\alpha. \qquad M_3' = -17;$$

et delà, en supposant que α soit une racine primitive:

$$(p_0+\alpha p_1+ \cdot\cdot +\alpha^{15}p_{15})^{16}$$
$$= (-2\alpha+2\alpha^2-\alpha^4+2\alpha^6+2\alpha^7)^8.(-3-2\alpha^2-2\alpha^6)^4.(-1+4\alpha^4)^2.17.$$

Pour $x^5-1=0$ on obtient sans peine

$$(p_0+\alpha p_1+\alpha^2p_2+\alpha^3p^3)^4 = (-2-\alpha^2+2\alpha^3)^2.5,$$

où α est une racine primitive de l'équation $\alpha^4-1=0$, savoir $\alpha=\pm i$.

Londres 3 Septembre 1849.

8.

Note relative à la sixième section du „Mémoire sur quelques théorèmes de la géométrie de position." Tome 38 page 98.

(Par M. *A. Cayley* à Londres.)

En remarquant que les trois droites sur lesquelles sont situées les neuf points de la table générale (𝔇) se rencontrent dans un même point, la démonstration que j'ai donnée de l'existence des droites X, fait voir que la droite $\{bcd\}$ passe par le point d'intersection des droites $ae.ef$, $ef.fa$, savoir par le point afe, ou bien que chacune des vingt droites X passe non seulement par trois points h, mais aussi par un seul point g. Ce théorème est dû à M. *Salmon* qui, indépendamment de mes recherches, à trouvé l'existence des vingt droites X.

8 août 1849.

9.

Note sur quelques formules qui se rapportent à la multiplication des fonctions elliptiques.

(Suite de la note tome 39 page 16.)

(Par M. *A. Cayley* à Londres.)

En revenant sur l'équation

$$\begin{aligned}&\{-l\lambda-m\mu+(l-m)^2\}P_{l,m}\\&+l(\lambda-2l+2m+2)(\lambda-2l+2m+1)P_{l-1,m}\\&+m(\mu+2l-2m+2)(\mu+2l-2m+1)P_{l,m-1}\\&-16lm\{\lambda\mu-(2l+2m-4)(\lambda+\mu)\}P_{l-1,m-1}=0,\end{aligned}$$

dans laquelle $P_{0,0}=1$, les expressions que j'ai données pour $P_{l,0}$, $P_{l,1}$ peuvent être écrites comme suit:

$$\begin{aligned}P_{l,0}&=\lambda[\lambda-l-1]^{l-1}\\P_{l,1}&=\mu\lambda[\lambda-l-1]^{l-1}+l\lambda[\lambda-l]^{l-2}\left(18l-16+\frac{2(l-1)(l-2)}{\lambda-l}\right)\\&\qquad+\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}(-10l\lambda[\lambda-l]^{l-2}):\end{aligned}$$

équations qui peuvent être représentées par

$$\begin{aligned}P_{l,0}&=Q_{l,0},\\P_{l,1}&=Q_{l,1}+R_{l,1;1}\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu},\end{aligned}$$

ce qui conduisent à la forme

$$P_{l,2}=Q_{l,2}+R_{l,2;1}\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}+R_{l,2;2}\frac{\lambda^2\mu^2}{(\lambda+\mu)^2},$$

où les coefficients R ne contiennent que la seule quantité λ, et où $Q_{l,2}$ est une fonction intégrale du $l^{\text{ième}}$ ordre par rapport à λ, et du second ordre par rapport à μ.

Cela donne

$$\begin{aligned}&\{-l\lambda-2\mu+(l-2)^2\}\left\{Q_{l,2}+R_{l,2;1}\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}+R_{l,2;2}\frac{\lambda^2\mu^2}{(\lambda+\mu)^2}\right\}\\&+l(\lambda-2l+6)(\lambda-2l+5)\left\{Q_{l-1,2}+R_{l-1,2;1}\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}+R_{l-1,2;2}\frac{\lambda^2\mu^2}{(\lambda+\mu)^2}\right\}\\&+2(\mu+2l-2)(\mu+2l-3)\left\{Q_{l,1}+R_{l,1;1}\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}\right\}\\&-32l\{\lambda\mu-2l(\lambda+\mu)\}\left\{Q_{l-1,1}+R_{l-1,1;1}\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}\right\}=0,\end{aligned}$$

ce qui se réduit à

$$\{-l\lambda-2\mu+(l-2)^2\}Q_{l,2}-(l-2)(\lambda-l+2)\left\{R_{l,2;1}\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}+R_{l,2;2}\frac{\lambda^2\mu^2}{(\lambda+\mu)^2}\right\}$$
$$-2\lambda\mu R_{l,2;1}-2\lambda^2\mu R_{l,2;2}+2\lambda^2 R_{l,2;2}\frac{\lambda\mu}{(\lambda+\mu)}$$
$$+l(\lambda-2l+6)(\lambda-2l+5)\left\{Q_{l-1,2}+R_{l-1,2,1}\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}+R_{l-1,2;2}\frac{\lambda^2\mu^2}{(\lambda+\mu)^2}\right\}$$
$$+2(\mu+2l-2)(\mu+2l-3)Q_{l,1}+2(\mu-\lambda+4l-5)\lambda\mu R_{l,1;1}$$
$$+2(\lambda-2l+2)(\lambda-2l+3)R_{l,1;1}\frac{\lambda\mu}{(\lambda+\mu)}$$
$$-32l\{\lambda\mu-2l(\lambda+\mu)\}Q_{l-1,1}-32l\lambda\mu(\lambda-2l)R_{l-1,1;1}+32l\lambda^2 R_{l-1,1;1}\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}=0.$$

En ne fesant attention d'abord qu'aux termes qui contiennent des puissances négatives de $\lambda+\mu$, nous obtenons

$$-(l-2)(\lambda-l+2)R_{l,2;2}+l(\lambda-2l+6)(\lambda-2l+5)R_{l-1,2;2}=0$$

et

$$-(l-2)(\lambda-l+2)R_{l,2;1}+l(\lambda-2l+6)(\lambda-2l+5)R_{l-1,2;1}$$
$$+2(\lambda-2l+2)(\lambda-2l+3)R_{l,1;1}+32l\lambda^2 R_{l-1,1;1}+2\lambda^2 R_{l,2;2}=0.$$

La première équation, en calculant la constante arbitraire au moyen de $R_{2,2,2}=200$, donne

$$R_{l,2;2}=100l(l-1)\lambda[\lambda-l+1]^{l-3}.$$

L'expression de $R_{2,2,2}=200$ se trouve par celle de $P_{2,2}$ qui peut être écrite sous la forme

$$P_{2,2}=\lambda(\lambda-3)\mu(\mu-3)+152\lambda\mu+336-40\lambda^2\mu+(40\lambda^2-1156)\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}$$
$$+\frac{200\lambda^2\mu^2}{(\lambda+\mu)^2}.$$

En substituant la valeur de $R_{l,2;2}$ et celles de

$$R_{l,1;1}=-10l\lambda[\lambda-l]^{l-2},\quad R_{l-1,1;1}=-10(l-1)\lambda[\lambda-l+1]^{l-3}$$

dans la seconde équation, on obtient

$$-(l-2)(\lambda-l+2)R_{l,2;1}+l(\lambda-2l+6)(\lambda-2l+5)R_{l-1,2;1}$$
$$-20l\lambda(\lambda-2l+3)[\lambda-l]^{l-1}-120l(l-1)\lambda^3[\lambda-l+1]^{l-3}=0,$$

c'est à dire

$$-(l-2)(\lambda-l+2)R_{l,2;1}+l(\lambda-2l+6)(\lambda-2l+5)R_{l-1,2;1}$$
$$-20l\lambda[\lambda-l]^{l-4}\{6(l-1)\lambda^2(\lambda-l+1)+(\lambda-21+4)(\lambda-2l+3)^2(\lambda-2l+2)\}.$$

Mettons

$$R_{l,2;2}=l(l-1)\lambda[\lambda-l+1]^{l-3}\psi_l.$$

Cela donne

$$\Psi_l - \Psi_{l-1}$$

$$= \frac{-20}{(l-1)(l-2)(\lambda-l+1)(\lambda-l+2)}\{6(l-1)\lambda^2(\lambda-l+1)+(\lambda-2l+4)(\lambda-2l+3)^2(\lambda-2l+2)\},$$

ce qui devient, quelques réductions faites:

$$\Psi_l - \Psi_{l-1} = \frac{-20}{(l-1)(l-2)}\{(\lambda+1)(\lambda+2)+17(l-1)(l-2)\}$$
$$-\frac{20(l-2)(l-3)}{\lambda-l+1}+\frac{20(l-2)(l-4)}{\lambda-l+2}$$

et delà on tire

$$\Psi_l = C - 340l + \frac{20(\lambda+1)(\lambda+2)}{l-1} - \frac{20(l-2)(l-3)}{\lambda-l+1}.$$

Or $R_{2,2;1} = 2\Psi_2 = 40\lambda^2 - 1156$; donc $\Psi_2 = 20\lambda^2 - 578$, et delà $C = 62 - 60\lambda$; donc enfin, en restituant la valeur de $R_{l,2;1}$:

$$R_{l,2;1} = l(l-1)\lambda[\lambda-l+1]^{l-3}\left\{62-340l-60\lambda+\frac{20(\lambda+1)(\lambda+2)}{l-1}-\frac{20(l-2)(l-3)}{\lambda-l+1}\right\}.$$

Passons à l'expression de $Q_{l,2}$. Elle donne

$$\{-l\lambda-2\mu+(l-2)^2\}Q_{l,2}+l(\lambda-2l+6)(\lambda-2l+5)Q_{l-1,2}$$
$$+2(\mu+2l-2)(\mu+2l-3)Q_{l,1}-32l\{\lambda\mu-2l(\lambda+\mu)\}Q_{l-1,1}$$
$$+2(\mu-\lambda+4l-5)\lambda\mu R_{l,1;1}$$
$$-2\lambda\mu R_{l,2;1}-2\lambda^2\mu R_{l,2;2}-32l\lambda\mu(\lambda-2l)R_{l-1,1;1} = 0.$$

La dernière ligne se réduit à

$$-2l(l-1)\mu\lambda^2[\lambda-l+1]^{l-3}\left\{62-20l-120\lambda-\frac{20(\lambda+1)(\lambda+2)}{l-1}-\frac{20(l-1)(l-2)}{\lambda-l+1}\right\}.$$

Donc on a

$$\{l\lambda+2\mu-(l-2)^2\}Q_{l,2}-l(\lambda-2l+6)(\lambda-2l+5)Q_{l-1,2}$$
$$=2(\mu+2l-2)(\mu+2l-3)\left\{\mu\lambda[\lambda-l-1]^{l-1}+l\lambda[\lambda-l]^{l-2}\left(18l-16+\frac{2(l-1)(l-2)}{\lambda-l}\right)\right\}$$
$$-32l\{\lambda\mu-2l(\lambda+\mu)\}\left\{\mu\lambda[\lambda-l]^{l-2}+(l-1)\lambda[\lambda-l+1]^{l-3}\left(18l-34+\frac{2(l-2)(l-3)}{\lambda-l+1}\right)\right\}$$
$$-20l(4l-5+\mu-\lambda)\lambda^2\mu[\lambda-l]^{l-2}$$
$$-2l(l-1)\lambda^2\mu[\lambda-l+1]^{l-3}\left\{62-20l-120\lambda+\frac{20(\lambda+1)(\lambda+2)}{l-1}-\frac{20(\lambda-1)(\lambda-2)}{\lambda-l+1}\right\},$$

équation qui peut être représentée par

$$\{l\lambda+2\mu-(l-2)^2\}Q_{l,2}-l(\lambda-2l+6)(\lambda-2l+5)Q_{l-1,2}=\mathfrak{A}\mu+\mathfrak{B}\mu^2+\mathfrak{C}\mu+\mathfrak{D},$$

où les valeurs de $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ sont données par les formules

$$\mathfrak{A} = 2\lambda[\lambda-l-1]^{l-1},$$

$$\mathfrak{B} = 2(4l-5)\lambda[\lambda-l-1]^{l-1}+2l\lambda[\lambda-l]^{l-2}\left(18l-16+\frac{2(l-1)(l-2)}{\lambda-l}\right)$$
$$-32l\lambda(\lambda-2l)[\lambda-l]^{l-2}-20l\lambda^2[\lambda-l]^{l-2},$$

$$\mathfrak{C} = 2(2l-2)(2l-3)\lambda[\lambda-l-1]^{l-1}$$
$$+2(4l-5)l\lambda[\lambda-l]^{l-2}\left\{18l-16+\frac{2(l-1)(l-2)}{\lambda-l}\right\}$$
$$+64l^2\lambda^2[\lambda-l]^{l-2}$$
$$-32l(l-1)(\lambda-2l)\lambda[\lambda-l+1]^{l-3}\left\{18l-34+\frac{2(l-2)(l-3)}{\lambda-l+1}\right\}$$
$$-20l(4l-5-\lambda)\lambda^2[\lambda-l]^{l-2}$$
$$-2l(l-1)\lambda^2[\lambda-l+1]^{l-3}\left\{62-20l-120\lambda+\frac{20(\lambda+1)(\lambda+2)}{l-1}-\frac{20(l-1)(l-2)}{\lambda-l+1}\right\},$$

$$\mathfrak{D} = 2(2l-2)(2l-3)l\lambda[\lambda-l]^{l-2}\left\{18l-16+\frac{2(l-1)(l-2)}{\lambda-l}\right\}$$
$$+64l^2(l-1)\lambda^2[\lambda-l+1]^{l-3}\left\{18l-34+\frac{2(l-2)(l-3)}{\lambda-l+1}\right\}.$$

Sans m'arrêter à réduire ces expressions aux formes les plus simples, j'écris

$$Q_{l,2} = \mu(\mu-3)\lambda[\lambda-l-1]^{l-1}+\mu I_l+J_l.$$

En substituant cette valeur de $Q_{l,2}$, les termes qui contiennent μ^3 se détruisent, et la comparaison des autres termes donne

$$2I_l-6\lambda[\lambda-l-1]^{l-1}+\{l\lambda-(l-2)^2\}\lambda[\lambda-l-1]^{l-1}$$
$$-l(\lambda-2l+6)(\lambda-2l+5)\lambda[\lambda-l]^{l-2}-\mathfrak{B} = 0,$$

$$2J_l+\{l\lambda-(l-2)^2\}\{-3\lambda[\lambda-l-1]^{l-1}+I_l\}$$
$$-l(\lambda-2l+6)(\lambda-2l+5)\{-3\lambda[\lambda-l]^{l-2}+I_{l-1}\}-\mathfrak{C} = 0,$$
$$\{l\lambda-(l-2)^2\}J_l-l(\lambda-2l+6)(\lambda-2l+5)J_{l-1}-\mathfrak{D} = 0.$$

Les valeurs de I_l et J_l peuvent être tirées sans intégration de la première et de la seconde de ces équations. La valeur ainsi trouvée de J_l satisfera à la troisième équation (ce qui cependant doit être vérifié a posteriori). Il m'a paru plus simple de tirer la fonction I_l de la première équation, et celle de J_l en intégrant la troisième équation; alors ce sera la seconde équation qu'il y a à vérifier. En effet on obtient

$$I_l = l\lambda[\lambda-l]^{l-2}\left\{36l+4-20\lambda+\frac{4(l-1)(l-2)}{\lambda-l}\right\}.$$

L'équation qui sert à déterminer J_l devient, en substituant la valeur de $\mathfrak{P}$:

$$\{l\lambda-(l-2)^2\}J_l-l(\lambda-2l+6)(\lambda-2l+5)J_{l-1}$$
$$=4l(l-1)(2l-3)\lambda[\lambda-l]^{l-2}\left\{18l-16+\frac{2(l-1)(l-2)}{\lambda-l}\right\}$$
$$+64l^2(l-1)\lambda^2[\lambda-l+1]^{l-3}\left\{18l-34+\frac{2(l-2)(l-3)}{\lambda-l+1}\right\}.$$

En écrivant

$$J_l=l(l-1)\lambda[\lambda-l+1]^{l-3}V_l,$$

on trouve

$$\{l\lambda-(l-2)^2\}V_l-(l-2)(\lambda-l+2)V_{l-1}$$
$$=8(2l-3)\frac{(\lambda-2l+3)(\lambda-2l+4)}{\lambda-l+1}\left\{(9l-8)+\frac{(l-1)(l-2)}{\lambda-l}\right\}$$
$$+128l\lambda\left\{9l-17+\frac{(l-2)(l-3)}{\lambda-l+1}\right\}.$$

En fesant

$$V_l=M_l+\frac{A_l}{\lambda-l+1}+\frac{B_l}{(\lambda-l+1)(\lambda-l)},$$

cette équation se réduit à

$$\{l\lambda-(l-2)^2\}M_l-(l-2)(\lambda-l+2)M_{l-1}$$
$$+lA_l-(l-2)A_{l-1}+\frac{(3l-4)A_l+lB_l-(l-2)B_{l-1}}{\lambda-l+1}+\frac{4(l-1)B_l}{(\lambda-l+1)(\lambda-l)}$$
$$=8(2l-3)(9l-8)\left\{(\lambda-3l+6)+\frac{(l-2)(l-3)}{\lambda-l+1}\right\}$$
$$+8(2l-3)(l-1)(l-2)\left\{1-\frac{2(l-3)}{\lambda-l+1}+\frac{(l-3)(l-4)}{(\lambda-l+1)(\lambda-l)}\right\}$$
$$+128l\lambda(9l-17)+128\cdot\frac{l(l-1)(l-2)(l-3)}{\lambda-l+1},$$

et cela donne tout de suite la valeur de B_l, et après quelques réductions celle de A_l. On obtient ainsi

$$A_l=2(l-2)(l-3)(36l+7),$$
$$B_l=2(l-2)(l-3)(l-4)(2l-3).$$

En substituant ces valeurs, on a, toute réduction faite:

$$\{l\lambda-(l-2)^2\}M_l-(l-2)(\lambda-l+2)M_{l-1}$$
$$=8\lambda(162l^2-315l+24)-24(l-2)^2(27l-26),$$

c'est à dire

$$lM_l-(l-2)M_{l-1}=1296l^2-2520l+192,$$
$$M_l-M_{l-1}\quad=\quad 648l-624,$$

ou enfin

$$M_l = 324 l^2 - 300 l - 528,$$
$$M_{l-1} = 324 l^2 - 948 l + 192:$$

valeurs qui (comme cela doit être) se changent l'une dans l'autre en entrechangeant les quantités l, $l-1$.

Delà on a pour la valeur de J_l:

$$J_l = l(l-1)\lambda[\lambda-l+1]^{l-3}\left\{324 l^2 - 300 l - 528 + \frac{2(l-2)(l-3)(36l+7)}{\lambda-l+1} + \frac{2(2l-3)(l-2)(l-3)(l-4)}{(\lambda-l+1)(\lambda-l)}\right\}:$$

valeur qu'on trouverait aussi par l'autre procédé indiqué ci-dessus. Or nous avons

$$Q_{l,2} = \mu(\mu-3)\lambda[\lambda-l-1]^{l-1} + \mu I_l + J_l,$$
$$P_{l,2} = Q_{l,2} + R_{l,2;1}\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} + R_{l,2;2}\frac{\lambda^2\mu^2}{(\lambda+\mu)^2}:$$

donc enfin, en réunissant les valeurs des différentes parties de $P_{l,2}$ on obtient

$$\begin{aligned}P_{l,2} = {} & \mu(\mu-3)\lambda[\lambda-l-1]^{l-1} \\ & + \mu l\lambda[\lambda-l]^{l-2}\left\{36l + 4 - 20\lambda + \frac{4(l-1)(l-2)}{\lambda-l}\right\} \\ & + l(l-1)\lambda[\lambda-l+1]^{l-3}\left\{324 l^2 - 300 l - 528 + \frac{2(l-2)(l-3)(36l+7)}{\lambda-l+1} + \frac{2(2l-3)(l-2)(l-3)(l-4)}{(\lambda-l+1)(\lambda-l)}\right\} \\ & + l(l-1)\lambda[\lambda-l+1]^{l-3}\left\{62 - 340 l - 60\lambda + \frac{20(\lambda+1)(\lambda+2)}{l-1} - \frac{20(l-2)(l-3)}{\lambda-l+1}\right\}\cdot\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} \\ & + 100\, l(l-1)\lambda[\lambda-l+1]^{l-3}\cdot\frac{\lambda^2\mu^2}{(\lambda+\mu)^2},\end{aligned}$$

équation qui fait suite aux équations

$$\begin{aligned}P_{l,1} = {} & \mu\lambda[\lambda-l-1]^{l-1} \\ & + l\lambda[\lambda-l]^{l-2}\left\{18 l - 16 + \frac{2(l-1)(l-2)}{\lambda-l}\right\} \\ & - 10 l\lambda[\lambda-l]^{l-2}\cdot\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu},\end{aligned}$$
$$P_{l,0} = \lambda[\lambda-l-1]^{l-1}.$$

Je vais essayer maintenant à chercher d'une manière plus systématique les termes de $P_{l,m}$ qui ne contiennent pas la quantité μ, ou bien de chercher la solution de l'équation

$$\begin{aligned}&\{-l\lambda+(l-m)^2\}P_{l,m}\\&+l(\lambda-2l+2m+2)(\lambda-2l+2m+1)P_{l-1,m}\\&+2m(l-m+1)(2l-2m+1)P_{l,m-1}\\&+32lm(l+m-2)P_{l-1,m-1}=0.\end{aligned}$$

En supposant que

$$P_{l,m}=[l]^m\lambda[\lambda-l+m-1]^{l-m-1}\Sigma\frac{A_{l,m,p}}{[\lambda-l+m-1]^p}$$

(où la sommation se rapporte à p, nombre qui doit être étendu depuis $p=0$ jusqu'à $p=m$), on obtiendra sans peine

$$\begin{aligned}&\{-l\lambda+(l-m)^2\}\Sigma\frac{A_{l,m,p}}{[\lambda-l+m-1]^p}\\&+(l-m)\Sigma\frac{A_{l-1,m,p}}{[\lambda-l+m-1]^{p-1}}\\&+2m(2l-2m+1)[\lambda-2l+2m]^2\Sigma\frac{A_{l,m-1,p}}{[\lambda-l+m-1]^{p+1}}\\&+32lm(l+m-2)\lambda\Sigma\frac{A_{l-1,m-1,p}}{[\lambda-l+m-1]^p}=0;\end{aligned}$$

où p s'étend seulement jusqu'à $m-1$ dans la troisième et dans la quatrième ligne.

Pour réduire la première ligne, j'écris

$$-l\lambda+(l-m)^2=-l(\lambda-l+m-p)+[m^2-(m+p)l],$$

ce qui réduit le terme général à

$$\frac{-lA_{l,m,p}}{[\lambda-l+m-1]^{p-1}}\;\frac{[m^2-(m+p)l]A_{l,m,p}}{[\lambda-l+m-1]^p}:$$

expression qui, en écrivant $r+1$ au lieu de p dans le premier terme, et r dans le second terme, peut être remplacée par

$$(\alpha.)\quad\frac{-lA_{l,m,r+1}}{[\lambda-l+m-1]^r}+\frac{\{m^2-(m+r)l\}A_{l,m,r}}{[\lambda-l+m-1]^r}.$$

La seconde ligne donne tout de suite le terme général

$$(\beta.)\quad\frac{(l-m)A_{l-1,m,r+1}}{[\lambda-l+m-1]^r}.$$

Pour réduire la troisième ligne, je mets,

$$\begin{aligned}&[\lambda-2l+2m]^2\\&=[\lambda-l+m-p]^2-2[l-m-p+1]^1[\lambda-l+m-p-1]^1+[l-m-p]^2,\end{aligned}$$

ce qui réduit le terme général à

$$\begin{aligned}2m(2l-2m+1)\frac{A_{l,m-1,p}}{[\lambda-l+m-1]^{p-1}}-4m(2l-2m+1)\frac{[l-m-p+1]^1A_{l,m-1,p}}{[\lambda-l+m-1]^p}\\+\frac{2m(2l-2m+1)[l-m-p]^2A_{l,m-1,p}}{[\lambda-l+m-1]^{p+1}}:\end{aligned}$$

expression qui (en écrivant $r+1$ au lieu de p dans le premier terme, r dans le second terme et $r-1$ dans le troisième terme) peut être remplacée par

$$(\gamma.)\quad 2m(2l-2m+1)\frac{A_{l,m-1,r+1}}{[\lambda-l+m-1]^r}-4m(2l-2m+1)\frac{[l-m-r+1]^1 A_{l,m-1,r}}{[\lambda-l+m-1]^r}$$
$$+\frac{2m(2l-2m+1)[l-m-r+1]^2 A_{l,m-1,r-1}}{[\lambda-l+m-1]^r}.$$

Pour réduire la quatrième ligne, je mets

$$\lambda=(\lambda-l+m-p)+(l-m+p),$$

ce qui réduit le terme général à

$$32lm(l+m-2)\frac{A_{l-1,m-1,p}}{[\lambda-l+m-1]^{p-1}}+32lm(l+m-2)\frac{(l-m+p)A_{l-1,m-1,p}}{[\lambda-l+m-1]^p}:$$

expression qui (en écrivant $r+1$ au lieu de p dans le premier et r dans le second terme) peut être remplacée par

$$(\delta.)\quad 32lm(l+m-2)\frac{A_{l-1,m-1,r+1}}{[\lambda-l+m-1]^r}+32lm(l+m-2)\frac{(l-m+p)A_{l-1,m-1,r}}{[\lambda-l+m-1]^r}.$$

Donc en réunissant les expressions ($\alpha.$, $\beta.$, $\gamma.$, $\delta.$) et en fesant attention que le coefficient du terme qui contient $[\lambda-l+m-1]^r$ au dénominateur, doit se réduire à zéro, on obient, en arrangeant encore les termes d'une manière convenable:

$$2m(2l-2m+1)A_{l,m-1,r+1}+32lm(l+m-2)A_{l-1,m-1,r+1}$$
$$-lA_{l,m,r+1}+(l-m)A_{l-1,m,r+1}-4m(2l-2m+1)(l-m-r+1)A_{l,m-1,r}$$
$$+32lm(l+m-2)(l+m-r)A_{l-1,m-1,r}$$
$$+(m^2-(m+r)l)A_{l,m,r}+2m(2l-2m+1)(l-m-r+1)(l-m-r)A_{l,m-1,r-1}=0,$$

où r s'étend depuis $r=0$ jusqu'à $r=m$, en réduisant à zero les termes pour lesquels le troisième suffixe est négatif ou plus grand que le second suffixe. Par exemple dans le cas de $r=m$, on obtient l'équation très simple

$$(2l-m)A_{l,m,m}=2(2l-2m+1)(l-2m+1)(l-2m)A_{l,m-1,m-1}$$

qui (sous la condition $A_{l,0,0}=1$) donne sans peine la valeur générale de $A_{l,m,m}$, savoir:

$$A_{l,m,m}=[2l-m-1]^m[l-m-1]^m:$$

valeur qui peut être présentée sous d'autres formes en considérant à part les deux cas de m pair et de m impair. En supposant $m=1$, $m=2$, on obtient $A_{l,1,1}=2(l-1)(l-2)$, $A_{l,2,2}=2(2l-3)(l-2)(l-3)(l-4)$: valeurs qui servent à vérifier des résultats déjà trouvés.

Londres, 21 Mars 1850.

10.

Entwicklung der Modular-Integrale oder der elliptischen Transcendenten aller Arten nach Potenzen des Moduls, nach Functionen der Amplitude und nach neuen Functionen des Parameters; sammt einer Theorie dieser neuen Functionen.

(Von Herrn Dr. *Chr. Gudermann*, ord. Prof. der Mathematik an der Universität zu Münster.)

Vorbemerkung.

Wird die Theorie der Modular-Functionen und der Modular-Integrale in der Geometrie oder in der Mechanik angewandt, und werden, wie es nicht selten ist, die unbekannten Gröfsen durch Modular-Integrale ausgedrückt, so sind, aufser dem Modul der Functionen, auch die Amplituden des Arguments und des Parameters, sammt den Amplituden ihrer Complemente bekannt, oder können aus andern gegebenen Gröfsen leicht berechnet werden. Nicht selten sind diese Amplituden sogar Winkel, welche durch die Construction nachgewiesen werden können. Daher stellt sich dann die unabweisbare Aufgabe dar, die gefundenen Integrale aus den genannten Moduln und Amplituden unmittelbar zu berechnen. Im vierten, achten und zwölften Abschnitte meiner Theorie der Modular-Functionen und der Modular-Integrale ist allerdings schon ein zweifaches, oder wenn man will, sogar ein vierfaches Verfahren der Berechnung aller Modular-Integrale aus dem Modul und den Amplituden auseinandergesetzt, wobei aufser den logarithmischen Tafeln auch die Tafeln der cyklischen und hyperbolischen Potential-Functionen zur Anwendung kommen; aber bei diesem Verfahren werden die Integrale nicht unmittelbar durch die gegebenen Gröfsen ausgedrückt. Im zehnten und achtzehnten Abschnitte des genannten Werks sind daher Reihen entwickelt worden, welche dazu dienen, die gesuchten Integrale unmittelbar aus den gegebenen Gröfsen zu berechnen. Ein weiteres Nachdenken über die im achtzehnten Abschnitte gefundenen Resultate ist von dem glücklichsten Erfolge gewesen. Die Modular-Integrale zweiter Art (die von Andern sogenannten elliptischen Integrale oder Transcendenten dritter Art) sind ausgedrückt worden durch die bekannten

Functionen $\lambda^1(\text{am}\,u)$, $\lambda^2(\text{am}\,u)$, $\lambda^3(\text{am}\,u)$, ... der Amplitude des Arguments und durch zwei neue Functionen $\overset{r}{\Theta}_p$ und $\overset{r}{\Phi}_p$ einer mit der Amplitude des Parameters in sehr einfachem Zusammenhange stehenden Zahl p von algebraischer Natur, die aber unter einander selbst so zusammenhangen, dafs man aus dem Werthe der einen Function von p sehr leicht auch den Werth der zugehörigen andern Function desselben p herleiten kann.

Es ist nun die Aufgabe des Staates oder seiner für Unterricht und Wissenschaft thätigen Behörden und Institute, Tafeln für die genannten drei Arten von Functionen berechnen zu lassen, welche den wissenschaftlichen Forderungen Genüge leisten.

Sind solche Tafeln vorhanden, so ist die Aufgabe der Berechnung aller Arten von Modular-Integralen auf die vollständigste Weise gelöset, und es geht dann eine solche Berechnung jeder Zeit auf die leichteste Art von Statten. Erst dann hört die durch die glänzenden Entdeckungen der Analytiker dieses und des vorigen Jahrhunderts geschaffene Theorie der Modular-Functionen, welche noch fortwährend der Gegenstand des eifrigsten Studiums ist und auch noch lange sein wird, auf, eine blofse Theorie zu sein; sie wird dann erst ihre reellen Anwendungen auf fast alle Zweige der reinen und angewandten Mathematik dem Gebrauche des Lebens übergeben und seine gesteigerten Bedürfnisse damit befriedigen können. Erst dann ist es möglich, die zahlreichen wissenschaftlichen Resultate mit gebührender Einfachheit in Zahlen-Resultate sofort umzusetzen. Nicht gering ist allerdings der geforderte und unumgängliche Aufwand für die Berechnung der Tafeln der drei Arten von Functionen $\lambda^r(\varphi)$, $\overset{r}{\Theta}_p$ und $\overset{r}{\Phi}_p$, aber er ist gar nicht in Anschlag zu bringen gegen den Nutzen, welcher dadurch gestiftet wird.

Münster, den 29ten August 1850.

Der Verfasser.

Erster Abschnitt.

Von den Functionen $\overset{r}{\Theta}_p$ und $\overset{r}{\Phi}_p$ des Parameters.

§. 1.

Die Function $\overset{r}{\Theta}_p$ für ein positives p.

Da von den Functionen $\lambda^1(\varphi)$, $\lambda^2(\varphi)$, $\lambda^3(\varphi)$, ... der Amplitude $\varphi = \text{am}\, u$ bereits im zehnten Abschnitte der Theorie der Modular-Functionen und der Modular-Integrale gehandelt worden ist, so schicken wir sogleich eine kurze Theorie der Functionen $\overset{r}{\Theta}_p$ und $\overset{r}{\Phi}_p$ des Parameters voraus; und zwar betrachten wir zuerst die Function

$$(1.)\quad \overset{r}{\Theta}_p = \frac{2r+1}{2r+2}\cdot\frac{1}{p} + \frac{(2r+1)(2r+3)}{(2r+2)(2r+4)}\cdot\frac{1}{p^2} + \frac{(2r+1)(2r+3)(2r+5)}{(2r+2)(2r+4)(2r+6)}\cdot\frac{1}{p^3} + \cdots,$$

unter der Voraussetzung, dafs die Zahl p positiv sei. Wendet man die in §. 90. des erwähnten Buchs angegebene Bezeichnung der Facultäten und Permutationszahlen an, so ist

$$\overset{r}{\Theta}_p = S\frac{[2r+1,-2]^{\alpha+1}}{[2r+2,-2]^{\alpha+1}}\cdot\frac{1}{p^{\alpha+1}} = S\frac{[-\tfrac{1}{2}(2r+1)]^{\alpha+1}}{[-r-1]^{\alpha+1}}\cdot\frac{1}{p^{\alpha+1}}.$$

Damit die für $\overset{r}{\Theta}_p$ aufgestellte Reihe convergire, mufs $p > 1$ sein. Wächst die Zeigezahl r ohne Ende, so nähert sich $\overset{r}{\Theta}_p$ der Reihe $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p^4} + \cdots$ als ihrer Grenze; daher ist

$$(2.)\quad \overset{r}{\Theta}_p = \frac{1}{p-1},\ \text{für einen unendlich grofsen Index } r.$$

Setzt man für r der Reihe nach die Werthe 0, 1, 2, 3, u. s. w., so erhält man die speciellen Reihen

$$(3.)\quad \begin{cases} \overset{0}{\Theta}_p = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{p^2} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{p^3} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{1}{p^4} + \cdots \\ \overset{1}{\Theta}_p = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{p} + \frac{3.5}{4.6}\cdot\frac{1}{p^2} + \frac{3.5.7}{4.6.8}\cdot\frac{1}{p^3} + \frac{3.5.7.9}{4.6.8.10}\cdot\frac{1}{p^4} + \cdots \\ \overset{2}{\Theta}_p = \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{p} + \frac{5.7}{6.8}\cdot\frac{1}{p^2} + \frac{5.7.9}{6.8.10}\cdot\frac{1}{p^3} + \frac{5.7.9.11}{6.8.10.12}\cdot\frac{1}{p^4} + \cdots \\ \overset{3}{\Theta}_p = \frac{7}{8}\cdot\frac{1}{p} + \frac{7.9}{8.10}\cdot\frac{1}{p^2} + \frac{7.9.11}{8.10.12}\cdot\frac{1}{p^3} + \frac{7.9.11.13}{8.10.12.14}\cdot\frac{1}{p^4} + \cdots \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Die unendliche Reihe für $\overset{0}{\Theta}_p$ läfst sich leicht summiren. Es ist zunächst $1+\overset{0}{\Theta}_p = 1+\frac{1}{2}p+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{p^2}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{p^3}+\cdots$, oder $1+\overset{0}{\Theta}_p = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{p}\right)}}$, also

$$(4.)\quad \overset{0}{\Theta}_p = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{p}\right)}}-1.$$

Aus diesem Ausdrucke ersieht man nun zunächst, dafs p negativ sein und dann jede Gröfse haben kann. Ist aber p positiv und > 1, so ist $\overset{0}{\Theta}_p$ jedesmal imaginair. Unanwendbar sind also nur solche positive Werthe von p, welche zwischen den Grenzen 0 und 1 liegen; sammt diesen Grenzwerthen $p=0$ und $p=1$ selbst.

Betrachtet und vergleicht man mit einander die einzelnen Reihen (3.), so überzeugt man sich leicht von der Richtigkeit der nachstehenden einfachen Recursionsformeln:

$$(5.)\quad \begin{cases} \overset{1}{\Theta}_p = \frac{1}{2}p.\overset{0}{\Theta}_p-1 \\ \overset{2}{\Theta}_p = \frac{4}{3}p.\overset{1}{\Theta}_p-1 \\ \overset{3}{\Theta}_p = \frac{6}{5}p.\overset{2}{\Theta}_p-1 \\ \overset{4}{\Theta}_p = \frac{8}{7}p.\overset{3}{\Theta}_p-1 \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Im Allgemeinen ist

$$(6.)\quad \overset{r}{\Theta}_p = \frac{2r}{2r-1}p.\overset{r-1}{\Theta}_p-1.$$

Hiernach erhält man für die in Rede stehenden Functionen $\overset{r}{\Theta}_p$ die folgenden geschlossenen Ausdrücke, welche zum Geschlechte der algebraischen Functionen gehören:

$$(7.)\quad \begin{cases} \overset{0}{\Theta}_p = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{p}\right)}}-1, \\ \overset{1}{\Theta}_p = \frac{2}{1}\cdot p.\overset{0}{\Theta}_p-1, \\ \overset{2}{\Theta}_p = \frac{2.4}{1.3}\cdot p^2.\overset{0}{\Theta}_p-\frac{4}{3}p-1, \\ \overset{3}{\Theta}_p = \frac{2.4.6}{1.3.5}\cdot p^3.\overset{0}{\Theta}_p-\frac{4.6}{3.5}\cdot p^2-\frac{6}{5}\cdot p-1, \\ \overset{4}{\Theta}_p = \frac{2.4.6.8}{1.3.5.7}\cdot p^4.\overset{0}{\Theta}_p-\frac{4.6.8}{3.5.7}\cdot p^3-\frac{6.8}{5.7}\cdot p^2-\frac{8}{7}\cdot p-1, \\ \overset{5}{\Theta}_p = \frac{2.4.6.8.10}{1.3.5.7.9}\cdot p^5.\overset{0}{\Theta}_p-\frac{4.6.8.10}{3.5.7.9}\cdot p^4-\frac{6.8.10}{5.7.9}\cdot p^3-\frac{8.10}{7.9}\cdot p^2-\frac{10}{9}p-1, \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Ist p positiv, also gröfser als 1, so ist in der allgemeinen **Recursionsformel** der Factor $\frac{2r}{2r-1}p$ noch gröfser, und eine Folge davon ist, dafs ein Fehler in der Bestimmung von $\overset{r-1}{\Theta}_p$ durch die Multiplication mit jenem Factor vergröfsert wird. Da nun aber schon die Bestimmung der Gröfse $\overset{0}{\Theta}_p$ einen unvermeidlichen Fehler mit sich bringt, so ist der Fehler in der Bestimmung von $\overset{r}{\Theta}_p$ beträchtlich gröfser; ist jener Fehler $=\overset{0}{\mathfrak{F}}$, so ist der allein davon herrührende Fehler in der Bestimmung von $\overset{r}{\Theta}$ schon

$$\overset{r}{\mathfrak{F}} = \frac{2.4.6.8\ldots(2r)}{1.3.5.7\ldots(2r-1)}.p_r.\overset{0}{\mathfrak{F}}.$$

Um diesem Übelstande zu begegnen, welcher mit der Zunahme der Gröfse von p noch schlimmer wird, berechne man $\overset{r}{\Theta}_p$ für ein hinreichend grofses r, etwa mittels der Reihe (1.); die dieser Function vorhergehenden Functionen wird man dann zwar nicht leichter, aber viel sicherer nach der Formel

$$(8.)\quad \overset{r-1}{\Theta}_p = \frac{2r-1}{2r}\cdot\frac{1+\overset{r}{\Theta}_p}{p}$$

berechnen. Man wird mit solcher Berechnung bis zu $\overset{0}{\Theta}_p$ fortfahren, und der auf diesem Wege berechnete Werth von $\overset{0}{\Theta}_p$ wird dann mit dem nach der Formel $\overset{0}{\Theta}_p = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{p}\right)}}-1$ berechneten Werthe übereinstimmen, wenn keine vermeidliche Fehler gemacht worden sind. Man wird hierin zugleich eine erwünschte Probe für die Richtigkeit der ganzen Rechnung haben.

Auf gleiche Weise entstehen auch die allgemeinen Formeln

$$\overset{r-1}{\Theta}_p = \frac{2r-1}{2r}\cdot\frac{1}{p}(1+\overset{r}{\Theta}_p),$$

$$\overset{r-2}{\Theta}_p = \frac{2r-3}{2r-2}\cdot\frac{1}{p}+\frac{(2r-3)(2r-1)}{(2r-2)(2r)}\cdot\frac{1}{p^2}\cdot(1+\overset{r}{\Theta}_p),$$

$$\overset{r-3}{\Theta}_p = \frac{2r-5}{2r-4}\cdot\frac{1}{p}+\frac{(2r-5)(2r-3)}{(2r-4)(2r-2)}\cdot\frac{1}{p^2}+\frac{(2r-5)(2r-3)(2r-1)}{(2r-4)(2r-2)(2r)}\cdot\frac{1}{p^3}\cdot(1+\overset{r}{\Theta}_p),$$

$$\overset{r-4}{\Theta}_p = \frac{2r-7}{2r-6}\cdot\frac{1}{p}+\frac{(2r-7)(2r-5)}{(2r-6)(2r-4)}\cdot\frac{1}{p^2}+\frac{(2r-7)(2r-5)(2r-3)}{(2r-6)(2r-4)(2r-2)}\cdot\frac{1}{p^3}$$
$$+\frac{(2r-7)(2r-5)(2r-3)(2r-1)}{(2r-6)(2r-4)(2r-2)(2r)}\cdot\frac{1}{p^4}\cdot(1+\overset{r}{\Theta}_p),$$

u. s. w.

Im Allgemeinen ist

$$(9.)\quad \overset{r-n-1}{\Theta}_p = \frac{2r-2n-1}{2r-2n}\cdot\frac{1}{p} + \frac{[2r-2n-1,\,-2]^2}{[2r-2n,\,-2]^2}\cdot\frac{1}{p^2} + \frac{[2r-2n-1,\,-2]^3}{[2r-2n,\,-2]^3}\cdot\frac{1}{p^3} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{[2r-2n-1,\,-2]^{n+1}}{[2r-2n,\,-2]^{n+1}}\cdot\frac{1}{p^{n+1}}\cdot(1+\overset{r}{\Theta}_p),$$

und zuletzt

$$(10.)\quad \overset{0}{\Theta}_p = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{p^2} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{p^3} + \cdots + \frac{1.3.5\ldots(2r-1)}{2.4.6\ldots(2r)}\cdot\frac{1}{p^r}\cdot(1+\overset{r}{\Theta}_p).$$

Diesen Formeln fügen wir der Bequemlichkeit wegen noch die Formeln

$$(11.)\quad \begin{cases} \overset{0}{\Theta}_p = \frac{1}{2p}(1+\overset{1}{\Theta}_p), \\ \overset{1}{\Theta}_p = \frac{3}{4p}(1+\overset{2}{\Theta}_p), \\ \overset{2}{\Theta}_p = \frac{5}{6p}(1+\overset{3}{\Theta}_p), \\ \overset{3}{\Theta}_p = \frac{7}{8p}(1+\overset{4}{\Theta}_p), \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

hinzu, welche sich aus Formel (8.) ergeben.

§. 2.

Die Function $\overset{r}{\Phi}_p$ für ein positives p.

Betrachten wir nun auch noch eine zweite Function von p, welche wir durch die Reihe

$$(1.)\quad \overset{r}{\Phi}_p = \frac{2r-1}{2r+2}\cdot\frac{1}{p} + \frac{(2r-1)(2r+1)}{(2r+2)(2r+4)}\cdot\frac{1}{p^2} + \frac{(2r-1)(2r+1)(2r+3)}{(2r+2)(2r+4)(2r+6)}\cdot\frac{1}{p^3} + \cdots$$

oder durch

$$\overset{r}{\Phi}_p = S\frac{[2r-1,\,-2]^{\alpha+1}}{[2r+2,\,-2]^{\alpha+1}}\cdot\frac{1}{p^{\alpha+1}} = S\frac{[-\frac{1}{2}(2r-1)]^{\alpha+1}}{[-r-1]^{\alpha+1}}\cdot\frac{1}{p^{\alpha+1}}$$

definiren und welche offenbar ebenfalls nur dann convergirt, wenn die absolute Gröfse von $p > 1$ ist, und desto rascher convergirt, je gröfser p ist.

Wird der Index r ohne Ende vergröfsert, so nähert sich auch in dieser Reihe jeder Coëfficient der Grenze 1; daher ist auch nun

$$(2.)\quad \overset{r}{\Phi}_p = \frac{1}{p-1},\ \text{für einen unendlich grofsen Index } r.$$

Betrachtet man die einzelnen Reihen

$$\overset{0}{\Phi}_p = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p} - \frac{1}{2.4}\cdot\frac{1}{p^2} - \frac{1.3}{2.4.6}\cdot\frac{1}{p^3} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}\cdot\frac{1}{p^4} - \dots$$

oder

$$(3.)\quad \left\{\begin{array}{ll} -\overset{0}{\Phi}_p = & \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p} + \frac{1}{2.4}\cdot\frac{1}{p^2} + \frac{1.3}{2.4.6}\cdot\frac{1}{p^3} + \frac{1.3.5}{2.4.6.8}\cdot\frac{1}{p^4} + \dots \\ \overset{1}{\Phi}_p = & \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p} + \frac{1.3}{4.6}\cdot\frac{1}{p^2} + \frac{1.3.5}{4.6.8}\cdot\frac{1}{p^3} + \frac{1.3.5.7}{4.6.8.8}\cdot\frac{1}{p^4} + \dots \\ \overset{2}{\Phi}_p = & \frac{3}{6}\cdot\frac{1}{p} + \frac{3.5}{6.8}\cdot\frac{1}{p^2} + \frac{3.5.7}{6.8.10}\cdot\frac{1}{p^3} + \frac{3.5.7.9}{6.8.10.12}\cdot\frac{1}{p^4} + \dots \\ \overset{3}{\Phi}_p = & \frac{5}{8}\cdot\frac{1}{p} + \frac{5.7}{8.10}\cdot\frac{1}{p^2} + \frac{5.7.9}{8.10.12}\cdot\frac{1}{p^3} + \frac{5.7.9.11}{8.10.12.14}\cdot\frac{1}{p^4} + \dots \\ \text{u. s. w.,} & \end{array}\right.$$

so läfst sich die erste wieder summiren, wodurch man

$$1 + \overset{0}{\Phi}_p = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{p}\right)}$$

erhält; also

$$(4.)\quad \overset{0}{\Phi}_p = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{p}\right)} - 1, \text{ oder besser } -\overset{0}{\Phi}_p = 1 - \sqrt{\left(1 - \frac{1}{p}\right)}.$$

Auch hier sieht man sogleich, dafs p negativ und dann von jeder Gröfse sein kann; und dafs ferner p jedesmal > 1 sein mufs, falls sein Werth positiv ist. Es sind demnach auch hier alle Werthe von p auszuschliefsen, welche zwischen den Grenzen Null und Eins liegen; sammt diesen beiden Grenzwerthen selbst.

Ferner befolgen diese Functionen ein sehr einfaches Gesetz, welches durch die Recursionsformeln

$$(5.)\quad \left\{\begin{array}{l} \overset{1}{\Phi}_p = -2p.\overset{0}{\Phi}_p - 1 \quad \text{oder} \quad \overset{1}{\Phi}_p = \frac{2}{-1}p.\overset{0}{\Phi}_p - 1, \\ \overset{2}{\Phi}_p = \frac{4}{1}p.\overset{1}{\Phi}_p - 1, \\ \overset{3}{\Phi}_p = \frac{6}{3}p.\overset{2}{\Phi}_p - 1, \\ \overset{4}{\Phi}_p = \frac{8}{5}p.\overset{3}{\Phi}_p - 1, \\ \text{u. s. w.} \end{array}\right.$$

ausgedrückt wird; woraus rückwärts

$$(6.)\quad \begin{cases} \overset{0}{\Phi}_p = \dfrac{-1}{2p}\cdot(1+\overset{1}{\Phi}_p), \\ \overset{1}{\Phi}_p = \dfrac{1}{4p}\cdot(1+\overset{2}{\Phi}_p), \\ \overset{2}{\Phi}_p = \dfrac{3}{6p}\cdot(1+\overset{3}{\Phi}_p), \\ \overset{3}{\Phi}_p = \dfrac{1}{8p}\cdot(1+\overset{4}{\Phi}_p), \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

folgt. Das allgemeine Gesetz dieses Fortschritts und Rückschritts wird ausgedrückt durch die Formeln

$$(7.)\quad \overset{r}{\Phi}_p = \frac{2r}{2r-3}\cdot p.\overset{r-1}{\Phi}_p - 1 \quad \text{und} \quad \overset{r-1}{\Phi}_p = \frac{2r-3}{2r}\cdot\frac{1}{p}\cdot(1+\overset{r}{\Phi}_p).$$

Aus den Formeln (5.) ergeben sich folgende geschlossene Ausdrücke:

$$(8.)\quad \begin{cases} -\overset{0}{\Phi}_p = 1-\sqrt{\left(1-\frac{1}{p}\right)}, \\ \overset{1}{\Phi}_p = \frac{2}{1}\cdot p - \overset{0}{\Phi}_p - 1., \\ \overset{2}{\Phi}_p = \frac{2.4}{1.1}\cdot p^2 - \overset{0}{\Phi}_p - \frac{4}{1}\cdot p - 1, \\ \overset{3}{\Phi}_p = \frac{2.4.6}{1.1.3}\cdot p^3 - \overset{0}{\Phi}_p - \frac{4.6}{1.3}\cdot p^2 - \frac{6}{3}\cdot p - 1, \\ \overset{4}{\Phi}_p = \frac{2.4.6.8}{1.1.3.5}\cdot p^4 - \overset{0}{\Phi}_p - \frac{4.6.8}{1.3.5}\cdot p^3 - \frac{6.8}{3.5}\cdot p^2 - \frac{8}{5}\cdot p - 1, \\ \overset{5}{\Phi}_p = \frac{2.4.6.8.10}{1.1.3.5.7}\cdot p^5 - \overset{0}{\Phi}_p - \frac{4.6.8.10}{1.3.5.7}\cdot p^4 - \frac{6.8.10}{3.5.7}\cdot p^3 - \frac{8.10}{5.7}\cdot p^2 - \frac{10}{7}\cdot p - 1, \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Ist in der Bestimmung des Werths von $-\overset{0}{\Phi}_p$ ein unvermeidlicher Fehler $\overset{0}{\mathfrak{F}}$, so folgt bei der Anwendung der recurrirenden Berechnung daraus allein schon in der Bestimmung des Werths von $\overset{r}{\Phi}_p$ ein Fehler

$$\overset{r}{\mathfrak{F}} = \frac{2.4.6\ldots(2r)}{1.3\ldots(2r-3)}\cdot p^r.\overset{0}{\mathfrak{F}}.$$

Daher ist die gleiche Vorsicht anzuwenden, welche in dem vorigen Paragraphen empfohlen wurde. Man wird für ein bekanntes, hinlänglich grofses r, die Function $\overset{r}{\Phi}_p$ etwa mittels der Reihe (1.) aus p entwickeln und daraus die Functionen $\overset{r-1}{\Phi}_p$, $\overset{r-2}{\Phi}_p$, $\overset{r-3}{\Phi}_p$, ... bis herab zu $\overset{0}{\Phi}_p$ recurrirend berechnen; der

also gefundene Werth von $\overset{0}{\Phi}_p$ mufs dann mit dem nach der Formel (4.) bestimmten übereinstimmen, wodurch man zugleich eine Probe für die ganze Berechnung hat. Es gilt nun auch die Formel

$$(9.)\quad -\overset{0}{\Phi}_p = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p}+\frac{1}{2.4}\cdot\frac{1}{p^2}+\frac{1.3}{2.4.6}\cdot\frac{1}{p^3}+\cdots+\frac{1.3.5\ldots(2r-3)}{2.4.6.8\ldots(2r)}\cdot\frac{1}{p^r}(1+\overset{r}{\Phi}_p).$$

§. 3.

Zurückführung der beiden Functionen $\overset{r}{\Theta}_p$ und $\overset{r}{\Phi}_p$ auf einander.

Da $1+\overset{0}{\Phi}_p=\sqrt{\left(1-\frac{1}{p}\right)}$ und $1+\overset{0}{\Theta}_p=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{p}\right)}}$, so erhält man durch die Division:

$$\frac{1+\overset{0}{\Phi}_p}{1+\overset{0}{\Theta}_p}=1-\frac{1}{p},\quad \text{oder auch}$$

$$(1.)\quad -\overset{0}{\Phi}_p=\frac{1}{p}-\left(1-\frac{1}{p}\right)\overset{0}{\Theta}_p.$$

Substituirt man hierin die beiden Werthe $-\overset{0}{\Phi}_p=\frac{1}{2p}(1+\overset{1}{\Phi}_p)$ und $\overset{0}{\Theta}_p=\frac{1}{2p}(1+\overset{1}{\Theta}_p)$, so ergiebt sich nach einer leichten Reduction:

$$(2.)\quad \overset{1}{\Phi}_p=\frac{1}{p}-\left(1-\frac{1}{p}\right)\overset{1}{\Theta}_p.$$

Substituirt man hierin $\overset{1}{\Phi}_p=\frac{1}{4p}(1+\overset{2}{\Phi}_p)$ und $\overset{1}{\Theta}_p=\frac{3}{4p}(1+\overset{2}{\Theta}_p)$, so entsteht

$$(3.)\quad \frac{\overset{2}{\Phi}_p}{3}=\frac{1}{p}-\left(1-\frac{1}{p}\right)\overset{2}{\Theta}_p.$$

Setzt man noch $\frac{3}{6p}(1+\overset{3}{\Phi}_p)$ statt $\overset{2}{\Phi}_p$ und $\frac{5}{6p}(1+\overset{3}{\Theta}_p)$ statt $\overset{2}{\Theta}_p$, so entsteht

$$(4.)\quad \frac{\overset{3}{\Phi}_p}{5}=\frac{1}{p}-\left(1-\frac{1}{p}\right)\overset{3}{\Theta}_p.$$

Eben so findet sich

$$(5.)\quad \frac{\overset{4}{\Phi}_p}{7}=\frac{1}{p}-\left(1-\frac{1}{p}\right)\overset{4}{\Theta}_p.$$

Auf diesem Wege der Induction findet sich also die allgemeine Formel

$$(6.)\quad \frac{1}{2r-1}\cdot\overset{r}{\Phi}_p=\frac{1}{p}-\left(1-\frac{1}{p}\right)\overset{r}{\Theta}_p.$$

Substituiren wir hierin noch einmal die Ausdrücke

$$\overset{r}{\Phi}_p = \frac{2r-1}{(2r+2)p}(1+\overset{r+1}{\Phi}_p) \quad \text{und} \quad \overset{r}{\Theta}_p = \frac{2r+1}{(2r+2)p}(1+\overset{r+1}{\Theta}_p),$$

so ergiebt sich

$$\frac{1+\overset{r+1}{\Phi}_p}{(2r+2)p} = \frac{1}{p}-\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\frac{2r+1}{(2r+2)p}(1+\overset{r+1}{\Theta}_p), \text{ oder auch}$$

$$1+\overset{r+1}{\Phi}_p = 2r+2-(2r+1)\Big(1-\frac{1}{p}\Big)(1+\overset{r+1}{\Theta}_p), \text{ also}$$

$$\overset{r+1}{\Phi}_p = -1+2r+2-2r-1+\frac{2r+1}{p}-(2r+1)\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\overset{r+1}{\Theta}_p,$$

oder einfacher

$$(7.)\quad \frac{1}{2r+1}\overset{r+1}{\Phi}_p = \frac{1}{p}-\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\overset{r+1}{\Theta}_p;$$

wodurch bewiesen ist, dafs die Formel (6.), eben wie für den Index r, auch für den nächst höhern Index $r+1$ gilt.

Der Formel (6.) gemäfs läfst sich also die Function $\overset{r}{\Phi}_p$ aus der Function $\overset{r}{\Theta}_p$ unmittelbar berechnen; und zwar auf eine höchst einfache Weise. Umgekehrt hat man

$$(8.)\quad \overset{r}{\Theta}_p = \frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{2r-1}\cdot\overset{r}{\Phi}_p}{1-\frac{1}{p}} = \frac{1-\frac{p}{2r-1}\cdot\overset{r}{\Phi}_p}{p-1}.$$

Stellt man die Gleichung (6.) also dar:

$$-\frac{1}{2r-1}\cdot\overset{r}{\Phi}_p = -\frac{1}{p}+\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\cdot\overset{r}{\Theta}_p$$

und addirt auf beiden Seiten 1, so verwandelt sie sich in

$$(9.)\quad 1-\frac{1}{p} = \frac{1-\frac{1}{2r-1}\cdot\overset{r}{\Phi}_p}{1+\overset{r}{\Theta}_p}.$$

Will man also Tafeln für die Werthe der Functionen $\overset{r}{\Phi}_p$ und $\overset{r}{\Theta}_p$ berechnen, so lassen sich auch aus den Tafeln für die Werthe der einen Function sofort die Werthe der andern herleiten. Oder hat man solche Zahlen für dieselbe Gröfse von p berechnet, so können sie geprüft werden, weil sie der Formel (9.) jedesmal Genüge leisten müssen.

Das so eben auf dem Wege der Induction gefundene und durch die Gleichung

$$\left(1-\frac{1}{p}\right)(1+\overset{r}{\Theta}_p) = 1-\frac{1}{2r-1}\cdot\overset{r}{\Phi}_p$$

ausgedrückte Gesetz wollen wir seiner Wichtigkeit wegen auch noch direct beweisen. Da

$$\overset{r}{\Theta}_p = S\frac{[2r+1,-2]^{\alpha+1}}{[2r+2,-2]^{\alpha+1}}\cdot\frac{1}{p^{\alpha+1}}$$

ist, so erhält man, wenn man der Reihe ihr Anfangsglied vorsetzt:

$$1+\overset{r}{\Theta}_p = S\frac{[2r+1,-2]^{\alpha}}{[2r+2,-2]^{\alpha}}\cdot\frac{1}{p^{\alpha}};$$

daher ist

$$\left(1-\frac{1}{p}\right)(1+\overset{r}{\Theta}_p) = S\frac{[2r+1,-2]^{\alpha}}{[2r+2,-2]^{\alpha}}\cdot\frac{1}{p^{\alpha}} - S\frac{[2r+1,-2]^{\alpha}}{[2r+2,-2]^{\alpha}}\cdot\frac{1}{p^{\alpha+1}}, \quad \text{oder auch}$$

$$= 1+S\left(\frac{[2r+1,-2]^{\alpha+1}}{[2r+2,-2]^{\alpha+1}}-\frac{[2r+1,-2]^{\alpha}}{[2r+2,-2]^{\alpha}}\right)\frac{1}{p^{\alpha+1}}$$

$$= 1+S\left(\frac{2r+2\alpha+1}{2r+2\alpha+2}-1\right)\frac{[2r+1,-2]^{\alpha}}{[2r+2,-2]^{\alpha}}\cdot\frac{1}{p^{\alpha+1}}.$$

Da nun $\frac{2r+2\alpha+1}{2r+2\alpha+2}-1 = \frac{-1}{2r+2\alpha+2}$ ist, so erhält man die Reihe

$$\left(1-\frac{1}{p}\right)(1+\overset{r}{\Theta}_p) = 1-S\frac{[2r+1,-2]^{\alpha}}{[2r+2,-2]^{\alpha+1}}\cdot\frac{1}{p^{\alpha+1}} \quad \text{oder}$$

$$\left(1-\frac{1}{p}\right)(1+\overset{r}{\Theta}_p) = 1-\frac{1}{2r-1}\cdot S\frac{[2r-1,-2]^{\alpha+1}}{[2r+2,-2]^{\alpha+1}}\cdot\frac{1}{p^{\alpha+1}}, \quad \text{also}$$

$$\left(1-\frac{1}{p}\right)(1+\overset{r}{\Theta}_p) = 1-\frac{1}{2r-1}\cdot\overset{r}{\Phi}_p.$$

Zusatz. Da für $r=0$ und ein positives p die Function $\overset{r}{\Phi}_p$ negativ, aber für $r>0$ und ein positives p die Function $\overset{r}{\Phi}_p$, so wie auch $1-\frac{1}{p}$ sammt dem Nenner $1+\overset{r}{\Theta}_p$ positiv sind, so mufs auch der Zähler in der Formel (9.) immer positiv sein. Daher ist immer

$$\overset{r}{\Phi}_p<2r-1 \text{ für } r>0 \text{ und ein } +p, \text{ welches } >1 \text{ ist.}$$

§. 4.

Analytisches Hülfstheorem zur Umformung der ursprünglichen Reihen für $\overset{r}{\Theta}_p$ und $\overset{r}{\Phi}_p$.

Die für $\overset{r}{\Theta}_p$ und $\overset{r}{\Phi}_p$ aufgestellten Reihen in (§. 1. und §. 2.), welche als Erklärungen der beiden Functionen dienen, sind wenig geeignet, die Werthe dieser Functionen dann zu berechnen, wenn p negativ ist. Glücklicherweise sind geschlossene algebraische Ausdrücke für jene Functionen hergeleitet worden, welche zu den genannten Berechnungen immer dienen können, es mag p positiv, oder negativ sein. Es kommt dabei vorzüglich darauf an, dafs man die Werthe von

$$\Theta_p = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{p}\right)}}-1 \quad \text{und} \quad \overset{1}{\Phi}_p = \sqrt{\left(1-\frac{1}{p}\right)}-1$$

mit einem höheren Grade von Genauigkeit berechnet habe, als derjenige ist, welcher bei der Bestimmung der Werthe der darauf folgenden Functionen $\overset{r}{\Theta}_p$ und $\overset{r}{\Phi}_p$ erzielt wird. Indessen kann doch die Forderung gestellt werden: die Werthe dieser Functionen in anwendbaren Reihen auszudrücken, welche zumal dann convergiren, wenn p negativ und der absoluten Gröfse nach <1 ist, weil in diesem Falle die anfänglichen Reihen für $\overset{r}{\Theta}_p$ und $\overset{r}{\Phi}_p$ ganz unanwendbar sind. Um solche Reihen auf eine leichte Weise herleiten zu können, schicken wir ein analytisches Hülfstheorem voraus, welches nur eine Anwendung eines noch viel allgemeineren Theorems ist. Setzt man, wie in (§. 100. und 101.) der Theorie der Potenzial- oder cyklisch-hyperbolischen Functionen:

$$F(a,b,c,x) = S\frac{\overset{\alpha}{[a]}.\overset{\alpha}{[b]}}{\alpha'.\overset{\alpha}{[c]}}.x^{\alpha} = S(-1)^{\alpha}.\frac{\overset{\alpha}{[c-a]}}{\alpha'}.\frac{\overset{\alpha}{[b]}}{\overset{\alpha}{[c]}}.(1+x)^{b-\alpha}.x^{\alpha}$$
$$= S(-1)^{\alpha}.\frac{\overset{\alpha}{[c-b]}}{\alpha'}.\frac{\overset{\alpha}{[a]}}{\overset{\alpha}{[c]}}.(1+x)^{a-\alpha}.x^{\alpha},$$

so ist, wenn das Element $b=-1$ genommen wird, wodurch die Facultät $\overset{\alpha}{[b]}=(-1)^{\alpha}.\alpha'$ wird:

$$F(a,-1,c,x) = S(-1)^{\alpha}.\frac{\overset{\alpha}{[a]}}{\overset{\alpha}{[c]}}.x^{\alpha} = S\frac{\overset{\alpha}{[c-a]}}{\overset{\alpha}{[c]}}.(1+x)^{-1-\alpha}.x^{\alpha}$$
$$= S(-1)^{\alpha}.\frac{\overset{\alpha}{[c+1]}.\overset{\alpha}{[a]}}{\alpha'.\overset{\alpha}{[c]}}.(1+x)^{a-\alpha}.x^{\alpha}.$$

Da nun $[c+1]^{\alpha} = (c+1)[c]^{\alpha-1}$ und $[c]^{\alpha} = (c-\alpha+1).[c]^{\alpha-1}$, also

$$\frac{[c+1]^{\alpha}}{[c]^{\alpha}} = \frac{c+1}{c+1-\alpha} \text{ ist, so ist}$$

$$F(a,-1,c,x) = S(-1)^{\alpha}.\frac{[a]^{\alpha}}{[c]^{\alpha}}.x^{\alpha} = S\frac{[c-a]^{\alpha}}{[c]^{\alpha}}.(1+x)^{-1-\alpha}.x^{\alpha}$$

$$= S(-1)^{\alpha}.\frac{[a]^{\alpha}}{\alpha'}.\frac{c+1}{c+1-\alpha}.(1+x)^{a-\alpha}.x^{\alpha}, \text{ oder auch}$$

$$F(a,-1,c,x) = S(-1)^{\alpha}.\frac{[a]^{\alpha}}{[c]^{\alpha}}.x^{\alpha} = \frac{1}{1+x}.S\frac{[c-a]^{\alpha}}{[c]^{\alpha}}.\left(\frac{x}{1+x}\right)^{\alpha}$$

$$= (1+x)^{a}.S(-1)^{\alpha}.\frac{[a]^{\alpha}}{\alpha'}.\frac{c+1}{c+1-\alpha}.\left(\frac{x}{1+x}\right)^{\alpha}.$$

Wird diese Gleichung mit $\frac{a+1}{c+1}.x$ multiplicirt, so erhält man

$$\frac{a+1}{c+1}.x.F(a,-1,c,x) = S(-1)^{\alpha}.\frac{[a+1]^{\alpha+1}}{[c+1]^{\alpha+1}}.x^{\alpha+1}$$

$$= S\frac{(a+1)[c-a]^{\alpha}}{[c+1]^{\alpha+1}}.\left(\frac{x}{1+x}\right)^{\alpha+1}$$

$$= (1+x)^{a+1}.S(-1)^{\alpha}.\frac{[a+1]^{\alpha+1}}{\alpha'}.\frac{1}{c+1-\alpha}.\left(\frac{x}{1+x}\right)^{\alpha+1}.$$

Wird hierin endlich $a-1$ statt a, $c-1$ statt c und $\frac{1}{p}$ statt x gesetzt, so erhält man das gesuchte Theorem ausgedrückt in der allgemeinen Formel

$$\frac{a}{cp}.F(a-1,-1,c-1,x) = S(-1)^{\alpha}.\frac{[a]^{\alpha+1}}{[c]^{\alpha+1}}.\left(\frac{1}{p}\right)^{\alpha+1}$$

$$= S\frac{a[c-a]^{\alpha}}{[c]^{\alpha+1}}.\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\alpha+1}$$

$$= \left(1+\frac{1}{p}\right)^{a}.S(-1)^{\alpha}.\frac{a-\alpha}{c-\alpha}.\frac{[a]^{\alpha}}{\alpha'}.\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\alpha+1}.$$

§. 5

Formeln zur Berechnung von $\overset{r}{\theta}{}'_p = -\overset{r}{\theta}_{(-p)}$.

Da nach (§. 1.)

$$\overset{r}{\theta}_{-p} = -\frac{2r+1}{2r+2}\cdot\frac{1}{p}+\frac{(2r+1)(2r+3)}{(2r+2)(2r+4)}\cdot\frac{1}{p^2}-\frac{(2r+1)(2r+3)(2r+5)}{(2r+2)(2r+4)(2r+6)}\cdot\frac{1}{p^3}+-\cdots$$

ist, so setzen wir zur Abkürzung

$$(1.)\qquad -\overset{r}{\theta}_{(-p)} = \overset{r}{\theta}{}'_p.$$

Dann ist

$$(2.)\quad \overset{r}{\theta}{}'_p = \frac{2r+1}{2r+2}\cdot\frac{1}{p}-\frac{(2r+1)(2r+3)}{(2r+2)(2r+4)}\cdot\frac{1}{p^2}+\frac{(2r+1)(2r+3)(2r+5)}{(2r+2)(2r+4)(2r+6)}\cdot\frac{1}{p^3}-+\cdots.$$

Da nun aber, wie schon gezeigt wurde, p in diesem Falle jede Gröfse haben und also auch kleiner als 1 sein kann, so ist diese Reihe so umzuformen, dafs sie auch dann convergirt, wenn $p<1$ ist. Da ferner nach (§. 4.)

$$S(-1)^a\cdot\frac{\overset{a+1}{[a]}}{\underset{}{\overset{a+1}{[c]}}}\cdot\frac{1}{p^{a+1}} = S\frac{a\overset{a}{[c-a]}}{\overset{a+1}{[c]}}\cdot\left(\frac{1}{p+1}\right)^{a+1}$$

ist, so erhält man, wenn man $a=\frac{2r+1}{-2}$ und $c=\frac{2r+2}{-2}$, also $c-a=-\frac{1}{2}$ setzt, die umgeformte Reihe

$$(3.)\begin{cases} \overset{r}{\theta}{}'_p = S\dfrac{(2r+1)\overset{a}{[1,-2]}}{\overset{a+1}{[2r+2,-2]}}\cdot\dfrac{1}{(p+1)^{a+1}}, \\ \text{oder auch} \\ \dfrac{\overset{r}{\theta}{}'_p}{2r+1} = \dfrac{1}{2r+2}\cdot\dfrac{1}{p+1}+\dfrac{1}{(2r+2)(2r+4)}\cdot\dfrac{1}{(p+1)^2}+\dfrac{1.3}{(2r+2)(2r+4)(2r+6)}\cdot\dfrac{1}{(p+1)^3} \\ \qquad +\dfrac{1.3.5}{(2r+2)(2r+4)(2r+6)(2r+8)}\cdot\dfrac{1}{(p+1)^4}+\cdots. \end{cases}$$

Diese Reihe hat einen hohen Grad von Convergenz; selbst dann, wenn $p<1$ ist. Da nun die Reihe, so lange p positiv, also $-p$ negativ ist, einen positiven Werth hat, so ist gleichzeitig bewiesen worden, dafs unter derselben Voraussetzung die Function $-\overset{r}{\theta}_{-p}$ immer positiv, also $\overset{r}{\theta}_{-p}$ immer negativ ist.

Giebt man dem r nach einander die Werthe 0, 1, 2, 3 u. s. w., so erhält man die einzelnen Reihen:

$$(4.)\begin{cases}\overset{0}{\theta}_p = -\overset{0}{\theta}_{(-p)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p+1}+\frac{1}{2.4}\cdot\frac{1}{(p+1)^2}+\frac{1.3}{2.4.6}\cdot\frac{1}{(p+1)^3}+\frac{1.3.5}{2.4.6.8}\cdot\frac{1}{(p+1)^4}+\cdots\\ \frac{\overset{1}{\theta'}_p}{3} = \frac{-\overset{1}{\theta}_{(-p)}}{3} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p+1}+\frac{1}{4.6}\cdot\frac{1}{(p+1)^2}+\frac{1.3}{4.6.8}\cdot\frac{1}{(p+1)^3}+\frac{1.3.5}{4.6.8.10}\cdot\frac{1}{(p+1)^4}+\cdots\\ \frac{\overset{2}{\theta'}_p}{5} = \frac{-\overset{2}{\theta}_{(-p)}}{5} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{p+1}+\frac{1}{6.8}\cdot\frac{1}{(p+1)^2}+\frac{1.3}{6.8.10}\cdot\frac{1}{(p+1)^3}+\frac{1.3.5}{6.8.10.12}\cdot\frac{1}{(p+1)^4}+\cdots\\ \frac{\overset{3}{\theta'}_p}{7} = \frac{-\overset{3}{\theta}_{(-p)}}{7} = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{p+1}+\frac{1}{8.10}\cdot\frac{1}{(p+1)^2}+\frac{1.3}{8.10.12}\cdot\frac{1}{(p+1)^3}+\frac{1.3.5}{8.10.12.14}\cdot\frac{1}{(p+1)^4}+\cdots\\ \text{u. s. w.}\end{cases}$$

Der hohe Grad der Convergenz dieser Reihen steigt noch um so mehr, je größer die Zeigezahl der zu berechnenden Function ist. Es folgt hieraus zunächst, dafs

$$1-\overset{0}{\theta'}_p = \sqrt{\left(1-\frac{1}{p+1}\right)} = \sqrt{\frac{p}{p+1}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{p}\right)}},\ \text{also}$$

$$(5.)\quad \overset{0}{\theta}_p = 1-\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{p}\right)}},\quad \text{oder}\quad \overset{0}{\theta}_{(-p)} = \frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{p}\right)}}-1$$

ist; was mit der früheren Formel $\overset{0}{\theta}_p = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{p}\right)}}-1$ ganz übereinstimmt.

Da ferner

$$S(-1)^a\cdot\frac{[a]^{a+1}}{[c]^{a+1}}\cdot\frac{1}{p^{a+1}} = \left(1+\frac{1}{p}\right)^a . S(-1)^a\cdot\frac{a-\alpha}{c-\alpha}\cdot\frac{[a]^a}{a'}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{a+1}$$

ist, so erhält man durch dieselbe Substitution, wie oben, noch die Reihe

$$(6.)\begin{cases}\sqrt{\left(1+\frac{1}{p}\right)}^{2r+1}\cdot\overset{r}{\theta'}_p = S\frac{[2r+1,-2]^a}{[2,-2]^a}\cdot\frac{2r+1+2a}{2r+2+2a}\cdot\left(\frac{1}{p+1}\right)^{a+1},\\ \text{oder auch}\\ \sqrt{\left(1+\frac{1}{p}\right)}^{2r+1}\cdot\overset{r}{\theta'}_p = \frac{2r+1}{2r+2}\cdot\frac{1}{p+1}+\frac{(2r+1)(2r+3)}{2.(2r+4)}\cdot\frac{1}{(p+1)^2}+\frac{(2r+1)(2r+3)(2r+5)}{2.4.(2r+6)}\cdot\frac{1}{(p+1)^3}\\ \qquad+\frac{(2r+1)(2r+3)(2r+5)(2r+7)}{2.4.6.(2r+8)}\cdot\frac{1}{(p+1)^4}+\cdots,\end{cases}$$

welche aber minder rasch convergirt, als die vorige. Setzt man in den Formeln (5, 6, 8 und 11, §. 1.) ebenfalls $-p$ für p, so geben sie

$$(7.)\quad \begin{cases} \overset{1}{\Theta}'_p = 1-\frac{2}{1}\cdot p\cdot\overset{0}{\Theta}_p \\ \overset{2}{\Theta}'_p = 1-\frac{4}{3}\cdot p\cdot\overset{1}{\Theta}'_p \\ \overset{3}{\Theta}'_p = 1-\frac{6}{5}\cdot p\cdot\overset{2}{\Theta}'_p \\ \overset{4}{\Theta}'_p = 1-\frac{8}{7}\cdot p\cdot\overset{3}{\Theta}'_p \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \overset{r}{\Theta}'_p = 1-\frac{2r}{2r-1}\cdot p\cdot\overset{r-1}{\Theta}'_p \end{cases} \quad\text{und}\quad \begin{aligned} \overset{0}{\Theta}'_p &= \frac{1}{2p}(1-\overset{1}{\Theta}'_p), \\ \overset{1}{\Theta}'_p &= \frac{3}{4p}(1-\overset{2}{\Theta}'_p), \\ \overset{2}{\Theta}'_p &= \frac{5}{6p}(1-\overset{3}{\Theta}'_p), \\ \overset{3}{\Theta}'_p &= \frac{7}{8p}(1-\overset{4}{\Theta}'_p), \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \overset{r-1}{\Theta}'_p &= \frac{2r-1}{2rp}(1-\overset{r}{\Theta}'_p). \end{aligned}$$

Hieraus folgt, dafs die Functionen $\overset{0}{\Theta}'_p$, $\overset{1}{\Theta}'_p$, $\overset{2}{\Theta}'_p$, $\overset{3}{\Theta}'_p$, ... $\overset{r}{\Theta}'_p$ sämmtlich positive und echte Brüche sind, welche sich, wenn der Index r ohne Ende wächst,

der Gränze $\frac{1}{1+p}$ nähern.

Die geschlossenen Ausdrücke für diese Functionen sind:

$$(8.)\quad \begin{cases} \overset{0}{\Theta}'_p = \dfrac{-1}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{p}\right)}}+1, \\ \overset{1}{\Theta}'_p = -2p\cdot\overset{0}{\Theta}'_p+1, \\ \overset{2}{\Theta}'_p = +\frac{2.4}{1.3}p^2\cdot\overset{0}{\Theta}'_p-\frac{4}{3}p+1, \\ \overset{3}{\Theta}'_p = -\frac{2.4.6}{1.3.5}\cdot p^3\cdot\overset{0}{\Theta}'_p+\frac{4.6}{3.5}\cdot p^2-\frac{6}{5}p+1, \\ \overset{4}{\Theta}'_p = +\frac{2.4.6.8}{1.3.5.7}\cdot p^4\cdot\overset{0}{\Theta}'_p-\frac{4.6.8}{3.5.7}\cdot p^3+\frac{6.8}{5.7}\cdot p^2-\frac{8}{7}p+1, \\ \overset{5}{\Theta}'_p = -\frac{2.4.6.8.10}{1.3.5.7.9}\cdot p^5\cdot\overset{0}{\Theta}'_p+\frac{4.6.8.10}{3.5.7.9}\cdot p^4-\frac{6.8.10}{5.7.9}\cdot p^3+\frac{8.10}{7.9}\cdot p^2-\frac{10}{9}\cdot p+1, \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Zusatz. Setzt man in der Gleichung (3.) $-p$ statt p und dividirt durch -1, so giebt sie

$$\frac{\overset{r}{\Theta}_p}{2r+1} = \frac{1}{2r+2}\cdot\frac{1}{p-1}-\frac{1}{(2r+2)(2r+4)}\cdot\frac{1}{(p-1)^2}+\frac{1.3}{(2r+2)(2r+4)(2r+6)}\cdot\frac{1}{(p-1)^3}$$
$$-\frac{1.3.5}{(2r+2)(2r+4)(2r+6)(2r+8)}\cdot\frac{1}{(p-1)^4}+-\cdots,$$

und da

$$\frac{\overset{r}{\Theta}'_p}{2r+1} = \frac{1}{2r+2}\cdot\frac{1}{p+1} + \frac{1}{(2r+2)(2r+4)}\cdot\frac{1}{(p+1)^2} + \frac{1.3}{(2r+2)(2r+4)(2r+6)}\cdot\frac{1}{(p+1)^3}$$
$$+ \frac{1.3.5}{(2r+2)(2r+4)(2r+6)(2r+8)}\cdot\frac{1}{(p+1)^4} + \dots \text{ ist,}$$

so kann man, damit beide Reihen nach Potenzen von $\frac{1}{p}$ fortschreiten, in der ersten $p+1$ statt p und in der zweiten $p-1$ statt p setzen; alsdann ist für $p>1$:

$$\frac{\overset{r}{\Theta}'_{(p-1)} + \overset{r}{\Theta}_{(p+1)}}{4r+2} = \frac{1}{2r+2}\cdot\frac{1}{p} + \frac{1.3}{(2r+2)(2r+4)(2r+6)}\cdot\frac{1}{p^3}$$
$$+ \frac{1.3.5.7}{(2r+2)(2r+4)\dots(2r+10)}\cdot\frac{1}{p^5} + \dots \quad \text{und}$$

$$\frac{\overset{r}{\Theta}'_{(p-1)} - \overset{r}{\Theta}_{(p+1)}}{4r+2} = \frac{1}{(2r+2)(2r+4)}\cdot\frac{1}{p^2} + \frac{1.3.5}{(2r+2)(2r+4)\dots(2r+8)}\cdot\frac{1}{p^4}$$
$$+ \frac{1.3.5.7.9}{(2r+2)(2r+4)\dots(2r+12)}\cdot\frac{1}{p^6} + \dots$$

Eben so erhält man, unter der Voraussetzung dafs $p>1$, die Reihen

$$\tfrac{1}{2}(\overset{r}{\Theta}_p + \overset{r}{\Theta}'_p) = \frac{2r+1}{2r+2}\cdot\frac{1}{p} + \frac{(2r+1)(2r+3)(2r+5)}{(2r+2)(2r+4)(2r+6)}\cdot\frac{1}{p^3}$$
$$+ \frac{(2r+1)(2r+3)\dots(2r+9)}{(2r+2)(2r+4)\dots(2r+10)}\cdot\frac{1}{p^5} + \dots$$

$$\tfrac{1}{2}(\overset{r}{\Theta}_p - \overset{r}{\Theta}'_p) = \frac{(2r+1)(2r+2)}{(2r+2)(2r+4)}\cdot\frac{1}{p^2} + \frac{(2r+1)(2r+3)(2r+5)(2r+7)}{(2r+2)(2r+4)(2r+6)(2r+8)}\cdot\frac{1}{p^4}$$
$$+ \frac{(2r+1)(2r+3)\dots(2r+11)}{(2r+2)(2r+4)\dots(2r+12)}\cdot\frac{1}{p^6} + \dots$$

Nach Anleitung dieser und der vorigen Formeln kann man die Berechnung der Tafeln für die Werthe der Function $\overset{r}{\Theta}_p$ sogleich mit der Berechnung der Tafeln für die Werthe der Function $\overset{r}{\Theta}'_p$ verbinden; wodurch fast die Hälfte der Arbeit, wenigstens bei der independenten Berechnung, gespart wird.

§. 6

Formeln zur Berechnung von $\overset{r}{\Phi}'_p = -\overset{r}{\Phi}_{(-p)}$, und Relation zwischen $\overset{r}{\Theta}'_p$ und $\overset{r}{\Phi}'_p$.

Wir haben schon oben gesehen, dafs für ein positives p die Functionen $-\overset{0}{\Phi}_p$, $\overset{1}{\Phi}_p$, $\overset{2}{\Phi}_p$, $\overset{3}{\Phi}_p$, ... positiv sind. Dafs sie sämmtlich negativ werden, wenn $-p$ statt p gesetzt wird, werden wir nun beweisen. Setzt man, schon

zur Abkürzung, im Allgemeinen

$$(1.)\qquad \overset{r}{\Phi}{}'_p = -\overset{r}{\Phi}_{(-p)},$$

so erhält man aus Formel (1. in §. 2.) die Reihe

$$(2.)\quad \overset{r}{\Phi}{}'_p = \frac{2r-1}{2r+2}\cdot\frac{1}{p} - \frac{(2r-1)(2r+1)}{(2r+2)(2r+4)}\cdot\frac{1}{p^2} + \frac{(2r-1)(2r+1)(2r+3)}{(2r+2)(2r+4)(2r+6)}\cdot\frac{1}{p^3} - \frac{(2r-1)(2r+1)(2r+3)(2r+5)}{(2r+2)(2r+4)(2r+6)(2r+8)}\cdot\frac{1}{p^4} + - \dots,$$

und insbesondere:

$$(3.)\quad -\overset{\bullet}{\Phi}{}'_p = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p} - \frac{1}{2.4}\cdot\frac{1}{p^2} + \frac{1.3}{2.4.6}\cdot\frac{1}{p^3} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}\cdot\frac{1}{p^4} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10}\cdot\frac{1}{p^5} - + \dots,$$

also

$$1 - \overset{\bullet}{\Phi}{}'_p = \sqrt{\left(1+\frac{1}{p}\right)},$$

oder

$$(4.)\qquad -\overset{\bullet}{\Phi}{}'_p = \sqrt{\left(1+\frac{1}{p}\right)} - 1;$$

woraus folgt, dafs die Function $-\overset{\bullet}{\Phi}{}'_p$ positiv, mithin $\overset{\bullet}{\Phi}{}'_p$ selbst negativ ist für ein positives p.

Da hiernach p jede positive Gröfse haben und also kleiner als 1 sein kann, so ist die Reihe (2.) so umzuformen, dafs sie für $p < 1$ convergirt. Nach (§. 4.) ist aber

$$S(-1)^{\alpha}\cdot\frac{[a]^{\alpha+1}}{[c]^{\alpha+1}}\cdot\left(\frac{1}{p}\right)^{\alpha+1} = S\frac{a[c-a]^{\alpha}}{[c]^{\alpha+1}}\cdot\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\alpha+1},$$

daher wollen wir $a = \frac{2r-1}{-2}$ und $c = \frac{2r+2}{-2}$, also $c - a = -\frac{3}{2}$ setzen. Dies giebt sofort die umgeformte Reihe

$$(5.)\quad \begin{cases} \dfrac{\overset{r}{\Phi}{}'_p}{2r-1} = S\dfrac{[3,-2]^{\alpha}}{[2r+2,-2]^{\alpha+1}}\cdot\left(\dfrac{1}{p+1}\right)^{\alpha+1} = S\dfrac{[1,-2]^{\alpha+1}}{[2r+2,-2]^{\alpha+1}}\cdot\left(\dfrac{1}{p+1}\right)^{\alpha+1}, \\ \text{oder aufgelöset:} \\ \dfrac{\overset{r}{\Phi}{}'_p}{2r-1} = \dfrac{1}{2r+2}\cdot\dfrac{1}{p+1} + \dfrac{1.3}{(2r+2)(2r+4)}\cdot\dfrac{1}{(p+1)^2} + \dfrac{1.3.5}{(2r+2)(2r+4)(2r+6)}\cdot\dfrac{1}{(p+1)^3} \\ + \dfrac{1.3.5.7}{(2r+2)(2r+4)(2r+6)(2r+8)}\cdot\dfrac{1}{(p+1)^4} + \dfrac{1.3.5.7.9}{(2r+2)(2r+4)\dots(2r+10)}\cdot\dfrac{1}{(p+1)^5} + \dots; \end{cases}$$

woraus erhellet, dafs $\overset{r}{\Phi}'_p$ immer positiv ist für ein positives p und für $r>0$, aber $\overset{0}{\Phi}'_p$ negativ; wie schon anderweitig gezeigt wurde.

Die Reihe hat Ähnlichkeit mit der Reihe (3. in §. 5.); sie convergirt auch für jeden positiven Werth von p, nur nicht ganz so rasch, wie die so eben erwähnte.

Da aber auch

$$S(-1)^a \cdot \frac{[a]^{a+1}}{[c]^{a+1}} \cdot \frac{1}{p^{a+1}} = \left(1+\frac{1}{p}\right)^a \cdot S(-1) \cdot \frac{[a]^a}{a'} \cdot \frac{a-a}{c-a}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{a+1}$$

ist, so erhält man durch dieselben Substitutionen auch noch die Reihe

(6.)
$$\sqrt{\left(1+\frac{1}{p}\right)^{2r-1}} \cdot \overset{r}{\Phi}'_p = S\frac{[2r-1,-2]^a}{[2,-2]^a} \cdot \frac{2r-1+2a}{2r+2+2a} \cdot \frac{1}{(p+1)^{a+1}},$$

oder

$$\sqrt{\left(1+\frac{1}{p}\right)^{2r+1}} \cdot \overset{r}{\Phi}'_p = \frac{2r-1}{2r+2} \cdot \frac{1}{p+1} + \frac{(2r-1)(2r+1)}{2.(2r+4)} \cdot \frac{1}{(p+1)^2} + \frac{(2r-1)(2r+1)(2r+3)}{2.4.(2r+6)} \cdot \frac{1}{(p+1)^3}$$
$$+ \frac{(2r-1)(2r+1)(2r+3)(2r+5)}{2.4.6.(2r+8)} \cdot \frac{1}{(p+1)^4} + \dots,$$

welche viel langsamer convergirt, als die Reihe (5.).

Setzt man nun in den Formeln (5, 6 und 7. §. 2.) ebenfalls $-p$ statt p, so verwandeln sie sich in

(7.)
$$\begin{aligned}
\overset{1}{\Phi}'_p &= 1-2p-\overset{0}{\Phi}'_p \\
\overset{2}{\Phi}'_p &= 1-\frac{4}{1}p.\overset{1}{\Phi}'_p \\
\overset{3}{\Phi}'_p &= 1-\frac{6}{3}p.\overset{2}{\Phi}'_p \\
\overset{4}{\Phi}'_p &= 1-\frac{8}{5}p.\overset{3}{\Phi}'_p \\
&\dots\dots \\
\overset{r}{\Phi}'_p &= 1-\frac{2r}{2r-3}p.\overset{r-1}{\Phi}'_p
\end{aligned}
\quad \text{und} \quad
\begin{aligned}
-\overset{0}{\Phi}'_d &= \frac{1}{2p}(1-\overset{1}{\Phi}'_p), \\
\overset{1}{\Phi}'_p &= \frac{1}{4p}(1-\overset{2}{\Phi}'_p), \\
\overset{2}{\Phi}'_p &= \frac{3}{6p}(1-\overset{3}{\Phi}'_p), \\
\overset{3}{\Phi}'_p &= \frac{5}{8p}(1-\overset{4}{\Phi}'_p), \\
&\dots\dots \\
\overset{r-1}{\Phi}'_p &= \frac{2r-3}{2r.p}(1-\overset{r}{\Phi}'_p).
\end{aligned}$$

Die geschlossenen Ausdrücke der neuen Functionen sind endlich

$$(8.)\begin{cases} -\overset{0}{\Phi}{}'_p = \sqrt{\left(1+\frac{1}{p}\right)}-1 \\ \overset{1}{\Phi}{}'_p = -2p-\overset{0}{\Phi}{}'_p+1, \\ \overset{2}{\Phi}{}'_p = +\frac{2.4}{1}p^2-\overset{0}{\Phi}{}'_p-\frac{4}{1}p+1, \\ \overset{3}{\Phi}{}'_p = -\frac{2.4.6}{1.3}p^3-\overset{0}{\Phi}{}'_p+\frac{4.6}{1.3}p^2-\frac{6}{3}p+1, \\ \overset{4}{\Phi}{}'_p = +\frac{2.4.6.8}{1.3.5}p^4-\overset{0}{\Phi}{}'_p-\frac{4.6.8}{1.3.5}p^3+\frac{6.8}{3.5}p^2-\frac{8}{5}p+1, \\ \overset{5}{\Phi}{}'_p = -\frac{2.4.6.8.10}{1.3.5.7}p^5-\overset{0}{\Phi}{}'_p+\frac{4.6.8.10}{1.3.5.7}p^4-\frac{6.8.10}{3.5.7}p^3+\frac{8.10}{5.7}p^2-\frac{10}{7}p+1, \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Der Zusammenhang zwischen den beiden Functionen $\overset{r}{\Theta}{}'_p$ und $\overset{r}{\Phi}{}'_p$ wird ebenfalls unmittelbar aus der Formel (9. §. 3.) hergeleitet, indem man nur $-p$ statt p setzt. Dadurch entsteht schon die gesuchte Formel

$$(9.)\quad 1+\frac{1}{p} = \frac{1+\frac{1}{2r-1}\cdot\overset{r}{\Phi}{}'_p}{1-\overset{r}{\Theta}{}'_p},$$

oder auch

$$(10.)\begin{cases} \frac{1}{2r-1}\cdot\overset{r}{\Phi}{}'_p = \frac{1}{p}-\left(1+\frac{1}{p}\right)\overset{r}{\Theta}{}'_p, \\ \text{also umgekehrt} \\ \overset{r}{\Theta}{}'_p = \dfrac{1-\frac{p}{2r-1}\cdot\overset{r}{\Phi}{}'_p}{p+1}. \end{cases}$$

Hieraus erhellet, dafs für $r>0$,

$$(11.)\quad \overset{r}{\Phi}{}'_p < \frac{2r-1}{p} \quad\text{und}\quad \overset{r}{\Theta}{}'_p < 1 \text{ sei.}$$

Zusatz. Setzt man in der Reihe (5.) noch $-p$ statt p, so erhält man

$$\frac{\overset{r}{\Phi}_p}{2r-1} = \frac{1}{2r+2}\cdot\frac{1}{p-1}-\frac{1.3}{(2r+2)(2r+4)}\cdot\frac{1}{(p-1)^2}+-\cdots,\quad\text{also}$$

$$1)\quad \frac{\overset{r}{\Phi}_{(p+1)}}{2r-1} = \frac{1}{2r+2}\cdot\frac{1}{p}-\frac{1.3}{(2r+2)(2r+4)}\cdot\frac{1}{p^2}+\frac{1.3.5}{(2r+2)(2r+4)(2r+6)}\cdot\frac{1}{p^3}$$
$$-\frac{1.3.5.7}{(2r+2)(2r+4)(2r+6)(2r+8)}\cdot\frac{1}{p^4}+-\cdots,$$

und da nach Formel (5.) auch

$$2)\quad \frac{\overset{r}{\Phi'}_{(p-1)}}{2r-1} = \frac{1}{2r+2}\cdot\frac{1}{p} + \frac{1.3}{(2r+2)(2r+4)}\cdot\frac{1}{p^2} + \frac{1.3.5}{(2r+2)(2r+4)(2r+6)}\cdot\frac{1}{p^3} + \frac{1.3.5.7}{(2r+2)\ldots(2r+8)}\cdot\frac{1}{p^4} + \ldots$$

ist, so erhält man durch die Verbindung der beiden Formeln:

$$3)\quad \frac{\overset{r}{\Phi'}_{(p-1)} + \overset{r}{\Phi}_{(p+1)}}{4r-2} = \frac{1}{2r+2}\cdot\frac{1}{p} + \frac{1.3.5}{(2r+2)(2r+4)(2r+6)}\cdot\frac{1}{p^3} + \frac{1.3.5.7.9}{(2r+2)(2r+4)\ldots(2r+10)}\cdot\frac{1}{p^5} + \ldots,$$

$$4)\quad \frac{\overset{r}{\Phi'}_{(p-1)} - \overset{r}{\Phi}_{(p+1)}}{4r-2} = \frac{1.3}{(2r+2)(2r+4)}\cdot\frac{1}{p^2} + \frac{1.3.5.7}{(2r+2)(2r+4)(2r+6)(2r+8)}\cdot\frac{1}{p^4} + \ldots,$$

unter der Voraussetzung, dafs p positiv und gröfser als 1 sei.

Unter derselben Voraussetzung hat man aber auch die Reihen

$$\tfrac{1}{2}(\overset{r}{\Phi}_p + \overset{r}{\Phi'}_p) = \frac{2r-1}{2r+2}\cdot\frac{1}{p} + \frac{(2r-1)(2r+1)(2r+3)}{(2r+2)(2r+4)(2r+6)}\cdot\frac{1}{p^3} + \frac{(2r-1)(2r+1)(2r+3)(2r+5)(2r+7)}{(2r+2)(2r+4)(2r+6)(2r+8)(2r+10)}\cdot\frac{1}{p^5} + \ldots,$$

$$\tfrac{1}{2}(\overset{r}{\Phi}_p - \overset{r}{\Phi'}_p) = \frac{(2r-1)(2r+1)}{(2r+2)(2r+4)}\cdot\frac{1}{p^2} + \frac{(2r-1)(2r+1)(2r+3)(2r+5)}{(2r+2)(2r+4)(2r+6)(2r+8)}\cdot\frac{1}{p^4} + \frac{(2r-1)(2r+1)\ldots(2r+9)}{(2r+2)(2r+4)\ldots(2r+12)}\cdot\frac{1}{p^6} + \ldots$$

Diese Formeln wird man bei der independenten Berechnung der Werthe der Functionen $\overset{r}{\Phi}_p$ und $\overset{r}{\Phi'}_p$ mit Vortheil benutzen können.

Zweiter Abschnitt.

Reihen zur Berechnung der Werthe der Modular-Integrale.

§. 7.

I. Reihen für die Modular-Integrale von der ersten Art.

Die Modular-Integrale von der ersten Art haben keinen Parameter; es ist daher bei der Entwickelung derselben in Reihen von den neuen Functionen des Parameters noch kein Gebrauch zu machen. Auch sind diese Reihen gröfstentheils in der Theorie der Modular-Functionen hergeleitet worden.

Setzt man zur Abkürzung

$$(1.)\quad \begin{cases} \delta_0 = 1; \quad \delta_1 = \frac{1^2}{2^2}; \quad \delta_2 = \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}; \quad \delta_3 = \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}; \quad \ldots \\ \qquad \delta_r = \frac{1^2.3^2.5^2\ldots(2r-1)^2}{2^2.4^2.6^2\ldots(2r)^2}; \\ \varepsilon_0 = 1; \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{2^2}; \quad \varepsilon_2 = \frac{1^2.3}{2^2.4^2}; \quad \varepsilon_3 = \frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6^2}; \quad \ldots \\ \qquad \varepsilon_r = \frac{1^2.3^2.5^2\ldots(2r-3)^2.(2r-1)}{2^2.4^2.6^2\ldots(2r-2)^2.(2r)^2}; \\ \eta_0 = 0; \quad \eta_1 = \frac{1}{2}; \quad \eta_2 = \frac{1^2.3}{2^2.4}; \quad \eta_3 = \frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6}; \quad \ldots \\ \qquad \eta_r = \frac{1^2.3^2.5^2\ldots(2r-3)^2.(2r-1)}{2^2.4^2.6^2\ldots(2r-2)^2.(2r)}; \\ \nu_0 = 1; \quad \nu_1 = \frac{3}{2^2}; \quad \nu_2 = \frac{3^2.5}{2^2.4^2}; \quad \nu_3 = \frac{3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2}; \quad \ldots \\ \qquad \nu_r = \frac{3^2.5^2.7^2\ldots(2r-1)^2.(2r+1)}{2^2.4^2.6^2\ldots(2r-2)^2.(2r)^2}; \end{cases}$$

so ist eine Bezeichnung gewählt worden, die wir auch später häufig anwenden werden. Jede dieser Reihen convergirt; nur ist eine solche Convergenz allerdings verzögernd, da die Factoren, mit welchen man in einer solchen Reihe jedesmal ein Glied multipliciren mufs, um das nächst folgende Glied derselben Reihe zu erhalten, immer echte Brüche sind, die sich wachsend ohne Ende der Grenze 1 nähern. Es ist nämlich

$$(2.)\quad \begin{cases} \delta_{r+1} = \delta_r\cdot\left(\frac{2r+1}{2r+2}\right)^2, \\ \varepsilon_{r+1} = \varepsilon_r\cdot\frac{(2r-1)(2r+1)}{(2r+2)^2} \text{ für } r>0, \\ \eta_{r+1} = \eta_r\cdot\frac{(2r-1)(2r+1)}{2r(2r+2)} \text{ für } r>0, \\ \nu_{r+1} = \nu_r\cdot\frac{(2r+1)(2r+3)}{(2r+2)^2}. \end{cases}$$

Wächst r ohne Ende, so nähert sich wirklich jeder der vier Brüche $\left(\frac{2r+1}{2r+2}\right)^2$, $\frac{(2r-1)(2r+1)}{(2r+2)^2}$, $\frac{(2r-1)(2r+1)}{2r(2r+2)}$ und $\frac{(2r+1)(2r+3)}{(2r+2)^2}$ der gemeinschaftlichen Gränze 1; aufserdem ist jeder dieser Brüche <1; und dafs namentlich der letzte Bruch ebenfalls <1 sei, erhellet daraus, dafs man ihn auf die Gestalt $\frac{(2r+2)^2-1}{(2r+2)^2}$ bringen kann; woraus ersichtlich ist, dafs der Zähler jedesmal, d. h. für jeden Werth von r, um 1 kleiner ist, als der Nenner.

Die Coëfficienten η_r und ν_r lassen sich aus den Coëfficienten δ_r und ε_r zusammensetzen, in Anwendung der Formeln

$$(3.)\quad \eta_1=\delta_1+\varepsilon_1;\quad \eta_2=\delta_2+\varepsilon_2;\quad \varepsilon_3=\delta_3+\varepsilon_3;\quad \dots\quad \eta_r=\delta_r+\varepsilon_r,$$

und da aufserdem

$$(4.)\quad \varepsilon_1=\nu_0-\nu_1;\quad \varepsilon_2=\nu_1-\nu_2;\quad \varepsilon_3=\nu_2-\nu_3;\quad \dots\quad \varepsilon_r=\nu_{r-1}-\nu_r$$

ist, so folgt hieraus leicht:

$$(5.)\quad \begin{cases} \nu_0 = 1, \\ \nu_1 = 1-\varepsilon_1, \\ \nu_2 = 1-\varepsilon_1-\varepsilon_2, \\ \nu_3 = 1-\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3, \\ \nu_4 = 1-\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4, \\ \dots\dots\dots\dots, \dots \\ \nu_r = 1-\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4-\dots-\varepsilon_r. \end{cases}$$

Ist nun am u sammt dem Modul k gegeben, so ist dadurch zunächst

$$\text{amc}\, u = \tfrac{1}{2}\pi - \text{arc tang}(k'\,\text{tn}\, u)$$

bestimmt, und dann gelten die folgenden in (§. 105.) der Theorie der Modular-Functionen hergeleiteten, sehr rasch convergirenden Reihen:

$$(6.)\quad u = \operatorname{am} u + \delta_1 k^2 \lambda^1(\operatorname{am} u) + \delta_2 k^4 \lambda^2(\operatorname{am} u) + \delta_3 k^6 \lambda^3(\operatorname{am} u) + \cdots,$$

$$(7.)\quad K - u = \operatorname{amc} u + \delta_1 k^2 \lambda^1(\operatorname{amc} u) + \delta_2 k^4 \lambda^2(\operatorname{amc} u) + \delta_3 k^6 \lambda^3(\operatorname{amc} u) + \cdots,$$

$$(8.)\quad \operatorname{el} u = \operatorname{am} u - \varepsilon_1 k^2 \lambda^1(\operatorname{am} u) - \varepsilon_2 k^4 \lambda^2(\operatorname{am} u) - \varepsilon_3 k^6 \lambda^3(\operatorname{am} u) - \cdots,$$

$$(9.)\quad \operatorname{elc} u = \operatorname{amc} u - \varepsilon_1 k^2 \lambda^1(\operatorname{amc} u) - \varepsilon_2 k^4 \lambda^2(\operatorname{amc} u) - \varepsilon_3 k^6 \lambda^3(\operatorname{amc} u) - \cdots,$$

$$(10.)\quad u - \operatorname{el} u = \eta_1 k^2 \lambda^1(\operatorname{am} u) + \eta_2 k^4 \lambda^2(\operatorname{am} u) + \eta_3 k^6 \lambda^3(\operatorname{am} u) + \cdots,$$

$$(11.)\quad K - u - \operatorname{elc} u = \eta_1 k^2 \lambda^1(\operatorname{amc} u) + \eta_2 k^4 \lambda^2(\operatorname{amc} u) + \eta_3 k^6 \lambda^3(\operatorname{amc} u) + \cdots,$$

$$(12.)\quad E - \operatorname{elc} u = k'^2 \{\operatorname{am} u + \nu_1 k^2 \lambda^1(\operatorname{am} u) + \nu_2 k^4 \lambda^2(\operatorname{am} u) + \nu_3 k^6 \lambda^3(\operatorname{am} u) + \cdots\},$$

$$(13.)\quad E - \operatorname{el} u = k'^2 \{\operatorname{amc} u + \nu_1 k^2 \lambda^1(\operatorname{amc} u) + \nu_2 k^4 \lambda^3(\operatorname{amc} u) + \nu_3 k^6 \lambda^3(\operatorname{amc} u) + \cdots\}.$$

Und für die Quadranten selbst hat man die Formeln

$$(14.)\quad \begin{cases} K = \tfrac{1}{2}\pi(1 + \delta_1 k^2 + \delta_2 k^4 + \delta_3 k^6 + \delta_4 k^8 + \cdots), \\ E = \tfrac{1}{2}\pi(1 - \varepsilon_1 k^2 - \varepsilon_2 k^4 - \varepsilon_3 k^6 - \varepsilon_4 k^8 - \cdots), \\ E = \tfrac{1}{2}\pi k'^2(1 + \nu_1 k^2 + \nu_2 k^4 + \nu_3 k^6 + \nu_4 k^8 + \cdots). \end{cases}$$

§. 8.

Zusätze zur Theorie der Function $\lambda^r(\varphi)$.

Die Function $\lambda^r(\varphi)$ convergirt, falls $\varphi < \frac{1}{2}\pi$ und der Index r zunimmt, bekanntlich gegen die Grenze Null, und zwar desto rascher, je kleiner die Amplitude φ selbst ist. Nimmt ferner φ um $\Delta\varphi$ zu, so ist

$$\lambda^r(\varphi + \Delta\varphi) = \lambda^r(\varphi) + \sqrt{\frac{1}{\delta_r}} \cdot \Big[\sin^{2r}\varphi . \Delta\varphi + r . \sin^{2r-1}\varphi . \cos\varphi \Delta\varphi^2 + \tfrac{1}{3}(r(2r-1))\Big(1 - \frac{2r}{2r-1} \cdot \sin^2\varphi\Big)\sin^{2r-2}\varphi . \Delta\varphi^3 + \cdots\Big].$$

Diese Reihe, deren allgemeines Glied ebenfalls leicht anzugeben ist, kann auch bei Anfertigung der Tafeln für die Functionen $\lambda^1(\varphi)$, $\lambda^2(\varphi)$, $\lambda^3(\varphi)$, ... benutzt werden.

Auch eine nach Potenzen von $\sin\varphi$ fortschreitende Reihe für $\lambda^r(\varphi)$ möge hier noch einen Platz finden.

Da

$$\sin^{2r}\varphi = \sin^{2r}\varphi . \cos\varphi \sqrt{}(1 - \sin^2\varphi)^{-1}$$

ist, so ist

$$\sin^{2r}\varphi = \sin^{2r}\varphi \cos\varphi + \tfrac{1}{2}\sin^{2r+2}\varphi . \cos\varphi + \frac{1.3}{2.4} \cdot \sin^{2r+4}\varphi . \cos\varphi + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \sin^{2r+6}\varphi . \cos\varphi + \cdots.$$

Wird nun noch auf beiden Seiten mit $\partial\varphi$ multiplicirt und integrirt, so ergiebt

sich sofort die Reihe

$$(1.)\quad \lambda^r(\varphi) = \sqrt{\left(\frac{1}{\delta_r}\right)}\cdot\left\{\frac{\sin^{2r+1}\varphi}{2r+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^{2r+3}\varphi}{2r+3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{\sin^{2r+5}\varphi}{2r+5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{\sin^{2r+7}\varphi}{2r+7}+\dots\right\}.$$

Da

$$\cos^{2r}\varphi = (1-\sin^2\varphi)^r = S(-1)^\alpha\cdot\frac{[r]^{\alpha}}{\alpha'}\cdot\sin^{2\alpha}\varphi$$

ist, so erhält man, wenn man mit $\partial\varphi$ multiplicirt, und integrirt,

$$\frac{1.3.5\dots(2r-1)}{2.4.6\dots(2r)}[\text{const.}-\lambda^r(\tfrac{1}{2}\pi-\varphi)]$$

$$= \varphi - r.\frac{1}{2}\cdot\lambda^1(\varphi)+\frac{r(r-1)}{2'}\cdot\frac{1.3}{2.4}\cdot\lambda^2(\varphi)-\frac{[r]^3}{3'}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\lambda^3(\varphi)+\dots.$$

Wird $\varphi=0$ gesetzt, so ist const. $=\frac{1}{2}\pi$, folglich

$$\frac{1.3.5\dots(2r-1)}{2.4.6\dots(2r)}[\tfrac{1}{2}\pi-\lambda^r(\tfrac{1}{2}\pi-\varphi)]$$

$$= \varphi - r.\tfrac{1}{2}\lambda^1(\varphi)+\frac{[r]^2}{2'}\cdot\frac{1.3}{2.4}\cdot\lambda^2(\varphi)-\frac{[r]^3}{3'}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\lambda^3(\varphi)+-\dots$$

$$\dots(-1)^{r-1}.r.\frac{1.3.5\dots(2r-3)}{2.4.6\dots(2r-2)}\cdot\lambda^{r-1}(\varphi)+(-1)^r\cdot\frac{1.3.5\dots(2r-1)}{2.4.6\dots(2r)}\cdot\lambda^r(\varphi),$$

oder auch

$$(2.)\quad \lambda^r(\tfrac{1}{2}\pi-\varphi) = \tfrac{1}{2}\pi-(-1)^r\Big\{\lambda^r(\varphi)-\frac{r^2}{1.(2r-1)}\cdot 2.\lambda^{r-1}(\varphi)$$

$$+\frac{r^2(r-1)^2}{1.2.(2r-1)(2r-3)}\cdot 2^2.\lambda^{r-2}(\varphi)-\frac{([r]^3)^2.2^3}{3'.(2r-1)(2r-3)(2r-5)}\cdot\lambda^{r-3}(\varphi)\dots$$

$$\dots\frac{(-1)^\alpha([r]^\alpha)^2}{\alpha'[2r-1,-2]^\alpha}\cdot 2^\alpha.\lambda^{r-\alpha}(\varphi)\dots(-1)^r\cdot\frac{r'.2^r}{1.3.5\dots(2r-1)}\cdot\varphi\Big\}.$$

Hiernach läfst sich also $\lambda^r(\frac{1}{2}\pi-\varphi)$ aus $\lambda^0(\varphi)=\varphi$, $\lambda^1(\varphi)$, $\lambda^2(\varphi)$, ... $\lambda^r(\varphi)$ berechnen

Da nach (§. 100.) der Theorie der Modular-Functionen

$$\lambda^r(\tfrac{1}{2}\pi-\varphi) = \tfrac{1}{2}\pi-\varphi-\frac{r}{r+1}\cdot\cos 2\varphi+\frac{r(r-1)}{(r+1)(r+2)}\cdot\tfrac{1}{2}(\sin 4\varphi)$$

$$+\frac{r(r-1)(r-2)}{(r+1)(r+2)(r+3)}\cdot\tfrac{1}{3}(\cos 6\varphi)-\frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)}\cdot\tfrac{1}{4}(\sin 8\varphi)$$

$$-\frac{r(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)}{(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)(r+5)}\cdot\tfrac{1}{5}(\cos 10\varphi)++--\dots$$ oder

$$\lambda^r(\tfrac{1}{4}\pi+\varphi) = \tfrac{1}{4}\pi+\varphi-\frac{r}{r+1}\cos 2\varphi-\frac{r(r-1)}{(r+1)(r+2)}\cdot\tfrac{1}{2}(\sin 4\varphi)++--\cdots$$

ist, so erhält man durch Addition:

$$\tfrac{1}{2}(\lambda^r(\tfrac{1}{4}\pi-\varphi)+\lambda^r(\tfrac{1}{4}\pi+\varphi))$$

$$= \tfrac{1}{4}\pi-\frac{r}{r+1}\cdot\cos 2\varphi+\frac{r(r-1)(r-2)}{(r+1)(r+2)(r+3)}\cdot\tfrac{1}{3}(\cos 6\varphi)$$

$$-\frac{r(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)}{(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)(r+5)}\cdot\tfrac{1}{5}(\cos 10\varphi)+\cdots,$$

oder auch

$$\tfrac{1}{2}(\lambda^r(\tfrac{1}{4}\pi+\varphi)+\lambda^r(\tfrac{1}{4}\pi-\varphi))$$

$$= \tfrac{1}{4}\pi-\overset{1}{[r]}\overset{-1}{[r]}\cos 2\varphi+\overset{3}{[r]}\overset{-3}{[r]}\tfrac{1}{3}(\cos 6\varphi)-\overset{5}{[r]}\overset{-5}{[r]}\tfrac{1}{5}(\cos 10\varphi)+-\cdots$$

$$\ldots(-1)^\alpha.\overset{2\alpha-1}{[r]}.\overset{-(2\alpha-1)}{[r]}\cdot\frac{\cos(4\alpha-2)\varphi}{2\alpha-1}+\cdots,$$

also

$$(3.)\quad \tfrac{1}{2}(\lambda^r(\tfrac{1}{4}\pi+\varphi)+\lambda^r(\tfrac{1}{4}\pi-\varphi)) = \tfrac{1}{4}\pi+S(-1)^\alpha.\overset{2\alpha-1}{[r]}.\overset{-2\alpha+1}{[r]}\cdot\frac{\cos(4\alpha-2)\varphi}{2\alpha-1}$$

für $\alpha>0$.

Eben so ist

$$\tfrac{1}{2}(\lambda^r(\tfrac{1}{4}\pi+\varphi)-\lambda^r(\tfrac{1}{4}\pi-\varphi)) = \varphi-\overset{2}{[r]}\overset{-2}{[r]}.\tfrac{1}{2}(\sin 4\varphi)+\overset{4}{[r]}\overset{-4}{[r]}.\tfrac{1}{4}(\sin 8\varphi)$$

$$-\overset{6}{[r]}\overset{-6}{[r]}.\tfrac{1}{6}(\sin 12\varphi)+\overset{8}{[r]}\overset{-8}{[r]}.\tfrac{1}{8}(\sin 16\varphi)-+\cdots$$

oder auch

$$(4.)\quad \tfrac{1}{2}(\lambda^r(\tfrac{1}{4}\pi+\varphi)-\lambda^r(\tfrac{1}{4}\pi-\varphi)) = \varphi+S(-1)^\alpha\overset{2\alpha}{[r]}\overset{-2\alpha}{[r]}.\frac{\sin 4\alpha\varphi}{2\alpha} \quad \text{für } \alpha>0.$$

Diese *geschlossenen* Ausdrücke dienen ebenfalls dazu, die Function $\lambda(\varphi)$ zu berechnen, wenn φ zwischen den Grenzen $-\frac{1}{4}\pi$ und $\frac{1}{4}\pi$ liegt.

Insbesondere erhält man für $\varphi=0$ den geschlossenen Ausdruck:

$$(5.)\quad \lambda^r(\tfrac{1}{4}\pi) = \tfrac{1}{4}\pi-\frac{\overset{1}{[r]}\overset{-1}{[r]}}{1}+\frac{\overset{3}{[r]}\overset{-3}{[r]}}{3}-\frac{\overset{5}{[r]}\overset{-5}{[r]}}{5}+-\cdots(-1)^{\alpha+1}\frac{\overset{2\alpha+1}{[r]}\overset{-2\alpha+1}{[r]}}{2\alpha+1}.$$

II. Reihen für die Modular-Integrale von der zweiten Art.

1. Reihen für die Integrale vierter Classe.

§. 9.

a. Für die bekannten drei Integrale vierter Classe.

Im elften Abschnitte der Theorie der Modular-Functionen und der Modular-Integrale sind die Modular-Integrale von der zweiten Art, welche Parameter haben, in vier Classen getheilt worden. Zu den Integralen vierter Classe rechnen wir die folgenden, in (§. 121.) aufgestellten:

$$(1.)\quad \begin{cases} '\mathfrak{S}(u,a) = \int_0 \frac{k'^2 \operatorname{tn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn}^2 u \,\partial u}{\operatorname{cn}^2 a\left(1-\frac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{snc}^2 a}\right)} = \int_0 \frac{\operatorname{dnc} a}{\operatorname{tnc} a \operatorname{snc}^2 a}\cdot\frac{\operatorname{sn}^2 u\,\partial u}{1-\frac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{snc}^2 a}}; \\ '\mathfrak{C}(u,a) = \int_0 \frac{k'^2 \operatorname{tn} a}{\operatorname{dn} a}\cdot\frac{\partial u}{1-\frac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{snc}^2 a}} = \int_0 \frac{\operatorname{dnc} a}{\operatorname{tnc} a}\cdot\frac{\partial u}{1-\frac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{snc}^2 a}}; \\ '\mathfrak{D}(u,a) = \int_0 \frac{\operatorname{tn} a \operatorname{dn} a . \operatorname{dn}^2 u\,\partial u}{1-\frac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{snc}^2 a}}. \end{cases}$$

Im achtzehnten Abschnitt sind diese Integrale auch bereits in Reihen entwickelt worden. Die Reihe für das Sinus-Integral von dieser Classe ist im (§. 254.) gefunden, nemlich die dortige Reihe (4.)

$$'\mathfrak{S}(u,a) = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\operatorname{tn} u}{\operatorname{tnc} a}\right) - \frac{\operatorname{am} u}{\operatorname{tnc} a} - \overset{1}{\varDelta}\lambda^1(\operatorname{am} u) - \overset{2}{\varDelta}\lambda^2(\operatorname{am} u) - \overset{3}{\varDelta}\lambda^3(\operatorname{am} u) - \cdots$$

und in ihr ist im Allgemeinen

$$\overset{r}{\varDelta} = \frac{1.3.5\ldots(2r-1)}{2.4.6\ldots(2r)}\cdot\frac{\operatorname{dnc} a}{\operatorname{tnc} a}\cdot\frac{1}{\operatorname{snc}^{2r} a}\Big[\frac{1.3.5\ldots(2r-1)}{2.4.6\ldots(2r)}\cdot k^{2r}.\operatorname{snc}^{2r} a + \frac{1.3.5\ldots(2r+1)}{2.4.6\ldots(2r+2)}\cdot k^{2r+2}.\operatorname{snc}^{2r+2} a + \cdots\Big]$$

oder

$$\overset{r}{\varDelta} = \delta_r\cdot\frac{\operatorname{dnc} a}{\operatorname{tnc} a}\cdot k^{2r}\Big[1 + \frac{2r+1}{2r+2}\cdot k^2.\operatorname{snc}^2 a + \frac{(2r+1)(2r+3)}{(2r+2)(2r+4)}\cdot k^4.\operatorname{snc}^4 a + \cdots\Big].$$

Setzt man nun

$$(2.)\quad p = \frac{1}{k^2 \operatorname{snc}^2 a},$$

so erhält man durch Anwendung der Function $\overset{r}{\Theta}_p$ den einfacheren Ausdruck

$$\overset{r}{\varDelta} = \frac{\operatorname{dnc} a}{\operatorname{tnc} a}\cdot\delta_r.k^{2r}.(1+\overset{r}{\Theta}_p).$$

Da nun aber nach (§. 1.) $1+\overset{r}{\Theta}_p=\frac{2r}{2r-1}\cdot p.\overset{r-1}{\Theta}$ ist, so erhält man durch die Substitution dieses Werthes:

$$\overset{r}{\Delta}=\frac{\operatorname{dnc} a}{\operatorname{tnc} a \operatorname{snc}^2 a}\cdot\frac{2r}{2r-1}\cdot\delta_r.k^{2r-2}.\overset{r-1}{\Theta}_p.$$

Da $\frac{2r}{2r-1}\cdot\delta_r=\eta_r$ und $\frac{\operatorname{dnc} a}{\operatorname{tnc} a \operatorname{snc}^2 a}=\frac{k'^2 \operatorname{tn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{cn}^2 a}$ der constante Factor des Sinus-Integrals vierter Classe ist, so ist

$$\overset{r}{\Delta}=\frac{k'^2 \operatorname{tn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{cn}^2 a}\cdot\eta_r.k^{2r-2}.\overset{r-1}{\Theta}_p.$$

Wird dieser Werth substituirt, so erhält man die Reihe

$$(3.)\quad '\mathfrak{S}(u,a)=\mathfrak{Arc\,Tang}\Big(\frac{\operatorname{tn} u}{\operatorname{tnc} a}\Big)-\frac{\operatorname{am} u}{\operatorname{tnc} a}-\frac{k'^2\operatorname{tn} a\operatorname{dn} a}{\operatorname{cn}^2 a}\{\eta_1\lambda^1(\operatorname{am} u)\overset{0}{\Theta}_p$$
$$+\eta_2 k^2\lambda^2(\operatorname{am} u)\overset{1}{\Theta}_p+\eta_3 k^4\lambda^3(\operatorname{am} u)\overset{2}{\Theta}_p+\eta_4 k^6\lambda^4(\operatorname{am} u)\overset{3}{\Theta}_p+\eta_5 k^8\lambda^5(\operatorname{am} u)\overset{4}{\Theta}_p+\cdots\}.$$

Die Formel (4. in §. 255.) der Theorie der Modular-Functionen und Modular-Integrale verwandelt sich auf gleiche Weise in

$$(4.)\quad '\mathfrak{C}(u,a)=\mathfrak{Arc\,Tang}\Big(\frac{\operatorname{tn} u}{\operatorname{tnc} a}\Big)-\frac{\operatorname{dnc} a}{\operatorname{tnc} a}\{\operatorname{am} u\overset{0}{\Theta}_p+\delta_1 k^2\lambda^1(\operatorname{am} u)\overset{1}{\Theta}_p$$
$$+\delta_2 k^2\lambda^2(\operatorname{am} u)\overset{2}{\Theta}_p+\delta_3 k^6\lambda^3(\operatorname{am} u)\overset{3}{\Theta}_p+\delta_4 k^8\lambda^4(\operatorname{am} u)\overset{4}{\Theta}_p+\cdots\}.$$

Dagegen folgt aus Formel (2. §. 256.) des angeführten Buches folgende Reihe:

$$(5.)\quad '\mathfrak{T}(u,a)=\mathfrak{Arc\,Tang}\Big(\frac{\operatorname{tn} u}{\operatorname{tnc} a}\Big)+\frac{\operatorname{sn} a}{\operatorname{snc} a}\{\operatorname{am} u-\overset{0}{\Phi}_p+\varepsilon_1 k^2\lambda^1(\operatorname{am} u)\overset{1}{\Phi}_p$$
$$+\varepsilon_2 k^4\lambda^2(\operatorname{am} u)\overset{2}{\Phi}_p+\varepsilon_3 k^6\lambda^3(\operatorname{am} u)\overset{3}{\Phi}_p+\varepsilon_4 k^8\lambda^4(\operatorname{am} u)\overset{4}{\Phi}_p+\cdots\}.$$

In allen drei Formeln hat die von dem Argumente a des Parameters abhängige Constante p den gleichen, durch die Formel (2.)

$$p=\frac{1}{k^2\operatorname{snc}^2 a}$$

ausgedrückten Werth, welcher positiv und gröfser als 1 ist. Es ist aber;

$$(6.)\quad\begin{cases}\overset{0}{\Theta}_p=\dfrac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{p}\right)}}-1=\dfrac{1}{\operatorname{dnc} a}-1,\\[2ex]-\overset{0}{\Phi}_p=1-\sqrt{\left(1-\frac{1}{p}\right)}=1-\operatorname{dnc} a.\end{cases}$$

Die gemeinschaftliche Grenze der Functionen $\overset{r}{\Theta}_p$ und $\overset{r}{\Phi}_p$ ist in diesem Falle

$\frac{1}{p-1} = \frac{k^2 \mathrm{snc}^2 a}{\mathrm{dnc}^2 a} = \frac{k^2}{k'^2} \cdot \mathrm{cn}^2 a = \left(\frac{k}{k'} \mathrm{cn}\, a\right)^2$, also desto kleiner, je kleiner der Modul k und je gröſser das Argument a des Parameters ist.

Zusatz. Bezeichnet man die Constanten der drei Integrale durch A, B, C, und stellt sie also durch

$$'\mathfrak{S}(u, a) = \int_0 \frac{A \,\mathrm{sn}^2 u\, \partial u}{1 - n\,\mathrm{sn}^2 u}; \quad '\mathfrak{C}(u, a) = \int_0 \frac{B\, \partial u}{1 - n\,\mathrm{sn}^2 u}; \quad '\mathfrak{D}(u, a) = \int_0 \frac{C\,\mathrm{dn}^2 u\, \partial u}{1 - n\,\mathrm{sn}^2 u}$$

dar, so ist $n = \frac{1}{\mathrm{snc}^2 a}$, folglich umgekehrt $\mathrm{snc}^2 a = \frac{1}{n}$, mithin

$$p = \frac{n}{k^2},$$

$$A = \frac{k'^2 \mathrm{tn}\, a\, \mathrm{dn}\, a}{\mathrm{cn}^2 a} = \frac{\mathrm{dnc}\, a}{\mathrm{tnc}\, a\, \mathrm{snc}\, a} = \sqrt{(n(n-1)(n-k^2))},$$

$$B = \frac{k'^2 \mathrm{tn}\, a}{\mathrm{dn}\, a} = \frac{\mathrm{dnc}\, a}{\mathrm{tnc}\, a} = \sqrt{\frac{(n-1)(n-k^2)}{n}},$$

$$C = \mathrm{tn}\, a\, \mathrm{dn}\, a = \frac{\mathrm{sn}\, a}{\mathrm{snc}\, a} = \frac{1}{\mathrm{tnc}\, a\, \mathrm{dnc}\, a} = \sqrt{\frac{n(n-1)}{n-k^2}},$$

und obige drei Reihen heiſsen dann:

$$\begin{aligned} '\mathfrak{S}(u, a) &= \mathfrak{Arc\,Tang}(\mathrm{tn}\, u \sqrt{(n-1)}) - \mathrm{am}\, u \sqrt{(n-1)} - A\{\eta_1 \lambda^1(\mathrm{am}\, u) \overset{0}{\Theta}_p \\ &\quad + \eta_2 k^2 \lambda^2(\mathrm{am}\, u) \overset{1}{\Theta}_p + \eta_3 k^4 \lambda^3(\mathrm{am}\, u) \overset{2}{\Theta}_p + \eta_4 k^6 \lambda^4(\mathrm{am}\, u) \overset{3}{\Theta}_p + \cdots\}, \\ '\mathfrak{C}(u, a) &= \mathfrak{Arc\,Tang}(\mathrm{tn}\, u \sqrt{(n-1)}) - B\{\mathrm{am}\, u . \overset{0}{\Theta}_p + \delta_1 k^2 \lambda^1(\mathrm{am}\, u) \overset{1}{\Theta}_p \\ &\quad + \delta_2 k^4 \lambda^2(\mathrm{am}\, u) \overset{2}{\Theta}_p + \delta_3 k^6 \lambda^3(\mathrm{am}\, u) \overset{3}{\Theta}_p + \delta_4 k^8 \lambda^4(\mathrm{am}\, u) \overset{4}{\Theta}_p + \cdots\}, \\ '\mathfrak{D}(u, a) &= \mathfrak{Arc\,Tang}(\mathrm{tn}\, u \sqrt{(n-1)}) + C\{\mathrm{am}\, u - \overset{0}{\Phi}_p + \varepsilon_1 k^2 \lambda^1(\mathrm{am}\, u) \overset{1}{\Phi}_p \\ &\quad + \varepsilon_2 k^4 \lambda^2(\mathrm{am}\, u) \overset{2}{\Phi}_p + \varepsilon_3 k^6 \lambda^3(\mathrm{am}\, u) \overset{3}{\Phi}_p + \varepsilon_4 k^8 \lambda^4(\mathrm{am}\, u) \overset{4}{\Phi}_p + \cdots\}. \end{aligned}$$

Auſserdem ist

$$\overset{0}{\Theta} = \sqrt{\frac{n}{n-k^2}} - 1$$

$$-\overset{0}{\Phi}_p = 1 - \sqrt{\frac{n-k^2}{n}}$$

und

$$\mathfrak{Arc\,Tang}(\mathrm{tn}\, u \sqrt{(n-1)}) = \mathfrak{Arc\,Sin}\left(\frac{\mathrm{sn}\, u \sqrt{(n-1)}}{\sqrt{(1-n)\mathrm{sn}^2 u}}\right) = \mathfrak{Arc\,Sin}\left(\frac{\mathrm{sn}\, u}{\mathrm{tnc}\, a \sqrt{\left(1 - \frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{snc}^2 a}\right)}}\right).$$

§. 10

b. Für ein viertes Integral vierter Classe.

Setzt man $y = {}'\mathfrak{S}(K, a-K) - {}'\mathfrak{S}(K-u, a-K)$, so ist für $u=0$ auch $y=0$. Ferner ist

$$\partial y = -{}'\mathfrak{S}(K-u, a-K) = -\frac{\text{dn}\,a}{\text{tn}\,a}\cdot\frac{\text{snc}^2 u\,\partial u}{\text{sn}^2 a - \text{snc}^2 u} = \frac{\text{dn}\,a}{\text{tn}\,a}\cdot\frac{\text{snc}^2 u\,\partial u}{\text{snc}^2 u - \text{sn}^2 a}.$$

Substituirt man $\text{snc}\,u = \frac{\text{cn}\,u}{\text{dn}\,u}$, $\text{dn}\,a = \frac{k'}{\text{dnc}\,a}$, $\text{tn}\,a = \frac{1}{k'\,\text{tnc}\,a}$, $\text{sn}\,a = \frac{\text{cnc}\,a}{\text{dnc}\,a}$, so erhält man

$$\partial y = \frac{k'^2\,\text{tnc}\,a\,\text{dnc}\,a\,\text{sn}^2 u\,\partial u}{\text{dnc}^2 a\,\text{cn}^2 u - \text{cnc}^2 a\,\text{dn}^2 u}.$$

Da aber $\text{dnc}^2 a\,\text{cn}^2 u = \text{cnc}^2 a\,\text{dn}^2 u = k'^2(\text{snc}^2 a - \text{sn}^2 u)$ gefunden wird, so ist

$$- \quad \partial y = \frac{\text{dnc}\,a\,\text{cn}^2 u\,\partial u}{\text{snc}\,a\,\text{cnc}\,a\left(1-\frac{\text{sn}^2 u}{\text{snc}^2 a}\right)} = \frac{\text{cn}^2 u\,\partial u}{\text{sn}\,a\,\text{snc}\,a\left(1-\frac{\text{sn}^2 u}{\text{snc}^2 a}\right)},$$

oder

$$(1.)\quad {}'\mathfrak{S}(K, a-K) - {}'\mathfrak{S}(K-u, a-K) = \int_0 \frac{\text{cn}^2 u\,\partial u}{\text{sn}\,a\,\text{snc}\,a\left(1-\frac{\text{sn}^2 u}{\text{snc}^2 a}\right)}.$$

Führt man dieses Integral auf die drei früheren Integrale vierter Classe zurück, so erhält man

$$(2.)\quad \int_0 \frac{\text{cn}^2 u\,\partial u}{\text{sn}\,a\,\text{snc}\,a\left(1-\frac{\text{sn}^2 u}{\text{snc}^2 a}\right)} = \frac{\text{dn}\,a}{\text{tn}\,a}\cdot u + {}'\mathfrak{D}(u, a) = \frac{\text{snc}\,a}{\text{sn}\,a}\cdot u + {}'\mathfrak{C}(u, a)$$

$$\text{———} \quad \text{—} \quad = \frac{u}{\text{sn}\,a\,\text{snc}\,a} + {}'\mathfrak{S}(u, a).$$

Benutzt man die Reihe

$$u = \text{am}\,u + \delta_1 k^2 \lambda^1(\text{am}\,u) + \delta_2 k^4 \lambda^2(\text{am}\,u) + \delta_3 k^6 \lambda^3(\text{am}\,u) + \cdots,$$

so läfst sich auch die Reihe für ${}'\mathfrak{C}(u, a)$ zur Anwendung bringen, weil in ihr dieselben numerischen Coëfficienten $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ vorkommen.

Da nun aber $\frac{\text{snc}\,a}{\text{sn}\,a}\cdot u = \text{tnc}\,a\,\text{dnc}\,a\,.\,u = \frac{\text{dnc}\,a}{\text{tnc}\,a}\cdot u\,.\,\text{tnc}^2 a$ ist, so erhalten wir sofort die Reihe

$$(3.)\quad {}'\mathfrak{S}(K, a-K) - {}'\mathfrak{S}(K-u, a-K) = \int_0 \frac{\text{cn}^2 u\,\partial u}{\text{sn}\,a\,\text{snc}\,a\left(1-\frac{\text{sn}^2 u}{\text{snc}^2 a}\right)}$$

$$= \text{Arc Tang}\left(\frac{\text{tn}\,u}{\text{tnc}\,a}\right) + \frac{\text{dnc}\,a}{\text{tnc}\,a}\{\text{am}\,u(\text{tnc}^2 a - \overset{0}{\Theta}_p) + \delta_1 k^2 \lambda^1(\text{am}\,u)(\text{tnc}^2 a - \overset{1}{\Theta}_p)$$

$$+ \delta_2 k^4 \lambda^2(\text{am}\,u)(\text{tnc}^2 a - \overset{2}{\Theta}_p) + \delta_3 k^6 \lambda^3(\text{am}\,u)(\text{tnc}^2 a - \overset{3}{\Theta}_p) + \cdots\},$$

in welcher wieder $p = \frac{1}{k^2\,\text{snc}^2 a}$ und $\overset{0}{\Theta}_p = \frac{1}{\text{dnc}\,a} - 1$ ist.

Das $r$te Glied der von Klammern umschlossenen Reihe hat $\operatorname{tnc}^2 a - \overset{r}{\Theta}_p$ zum Factor, und da beim Wachsen von r ins Unendliche, $\frac{k^2}{k'^2}\operatorname{cn}^2 a$ die Grenze von Θ_p ist, so ist $\operatorname{tnc}^2 a - \frac{k^2}{k'^2}\operatorname{cn}^2 a = \frac{\operatorname{cn}^2 a}{k'^2 \operatorname{sn}^2 a} - \frac{k^2}{k'^2}\operatorname{cn}^2 a = \frac{\operatorname{cn}^2 a(1-k^2\operatorname{sn}^2 a)}{k'^2\operatorname{sn}^2 a}$ $= \frac{\operatorname{cn}^2 a \operatorname{dn}^2 a}{k'^2 \operatorname{sn}^2 a} = \operatorname{dn}^2 a \operatorname{tnc}^2 a = \frac{1}{\operatorname{tn}^2 a \operatorname{dnc}^2 a}$; also ist die ***Grenze des Factors*** $\operatorname{tnc}^2 a - \overset{r}{\Theta}_p$:

$$(4.)\qquad \operatorname{dn}^2 a \operatorname{tnc}^2 a = \frac{1}{\operatorname{tn}^2 a \operatorname{dnc}^2 a}.$$

In sehr ungünstigen Fällen, in welchen nemlich $\operatorname{tn}^2 a$ einen zu kleinen Werth hat, und also die so eben bestimmte Grenze zu grofs ist, kann man von der Anwendung der Reihe (3.) absehen und unmittelbar nach den Formeln (2.) selbst rechnen. Solche ungünstige Fälle werden aber selten eintreten, da das Integral $'\mathfrak{S}(K-u, a-K)$ schon voraussetzt, dafs die Summe $(K-u)+(a-K) < K$, also $a-u < K$, oder auch

$$a < u + K,$$

dafs dagegen $a-K$ positiv, also

$$a > K$$

sei.

Zusatz. Überhaupt sieht man, dafs die Reihe einen negativen Werth hat, wenn $a > K$ ist, und dafs sie positiv wird, wenn $a < K$ genommen wird. Setzt man $K-a$ statt a, so ergiebt sich

$$\begin{aligned} &'\mathfrak{S}(K, -a) - {'\mathfrak{S}}(K-u, -a) = {'\mathfrak{S}}(K-u, a) - {'\mathfrak{S}}(K, a) \\ &= \frac{\operatorname{dnc} a}{\operatorname{tnc} a}\cdot u + {'\mathfrak{D}}(u, K-a) = \frac{\operatorname{sn} a}{\operatorname{snc} a}\cdot u + {'\mathfrak{C}}(u, K-a) \\ &= \frac{u}{\operatorname{sn} a \operatorname{snc} a} + {'\mathfrak{S}}(u, K-a) = \int_0 \frac{\operatorname{cn}^2 u\, \partial u}{\operatorname{sn} a \operatorname{snc} a\left(1-\frac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{sn}^2 a}\right)} \\ &= \operatorname{Arc\,Tang}\left(\frac{\operatorname{tn} u}{\operatorname{tn} a}\right) + \frac{\operatorname{dn} a}{\operatorname{tn} a}\{\operatorname{am} u(\operatorname{tn}^2 a - \overset{0}{\Theta}_p) + \delta_1 k^2 \lambda^1(\operatorname{am} u)(\operatorname{tn}^2 a - \overset{1}{\Theta}_p) \\ &\qquad + \delta_2 k^4 \lambda^2(\operatorname{am} u)(\operatorname{tn}^2 a - \overset{2}{\Theta}_p) + \delta_3 k^6 \lambda^3(\operatorname{am} u)(\operatorname{tn}^2 a - \overset{3}{\Theta}_p) + \cdots\}, \end{aligned}$$

wenn $p = \frac{1}{k^2 \operatorname{sn}^2 a}$ und $\overset{0}{\Theta}_p = \frac{1}{\operatorname{dn} a} - 1$ genommen wird.

Die Grenze des Factors $\operatorname{tn}^2 a - \overset{r}{\Theta}_p$ ist aber

$$\operatorname{dnc}^2 a \operatorname{tn}^2 a = \frac{1}{\operatorname{tnc}^2 a \operatorname{dn}^2 a}.$$

§. 11.

2. Reihen für die Integrale dritter Classe.

Die Reihen für die Integrale dritter Classe erhält man leicht aus den für die Integrale vierter Classe hergeleiteten, indem man in letztern ai statt u setzt, da bekanntlich

$$'S(u,a) = \frac{'\mathfrak{S}(u,ai)}{i}, \quad 'C(u,a) = \frac{'\mathfrak{C}(u,ai)}{i}, \quad 'D(u,a) = \frac{'\mathfrak{D}(u,ai)}{i}$$

ist. Hiernach erhalten wir sofort für die Integrale

$$'S(u,a) = \int_0 \frac{k'^2 \operatorname{sn}' a \operatorname{cn}' a \operatorname{dn}' a \operatorname{sn}^2 u \, \partial u}{1 - \operatorname{dn}'^2 a \operatorname{sn}^2 u}$$

$$'C(u,a) = \int_0 \frac{k'^2 \operatorname{sn}' a \operatorname{snc}' a \, \partial u}{1 - \operatorname{dn}'^2 a \operatorname{sn}^2 u},$$

$$'D(u,a) = \int_0 \frac{\operatorname{tn}' a \operatorname{dn}' a \operatorname{dn}^2 u \, \partial u}{1 - \operatorname{dn}'^2 a \operatorname{sn}^2 u}$$

folgende Reihen:

$$(1.) \quad 'S(u,a)$$

$$= \operatorname{arc\,tang}(k' \operatorname{sn}' a \operatorname{tn} u) - k' \operatorname{sn}' a \operatorname{am} u - k'^2 \operatorname{sn}' a \operatorname{cn}' a \operatorname{dn}' a \{\eta_1 \lambda^1 (\operatorname{am} u) \overset{0}{\Theta}_p$$
$$+ \eta_2 k^2 \lambda^2 \operatorname{am} u) \overset{1}{\Theta}_p + \eta_3 k^4 \lambda^3 (\operatorname{am} u) \overset{2}{\Theta}_p + \eta_4 k^6 \lambda^4 (\operatorname{am} u) \overset{3}{\Theta}_p + \cdots\},$$

$$(2.) \quad 'C(u,a)$$

$$= \operatorname{arc\,tang}(k' \operatorname{sn}' a \operatorname{tn} u) - k'^2 \operatorname{sn}' a \operatorname{snc}' a \{\operatorname{am} u \overset{0}{\Theta}_p + \delta_1 k^2 \lambda^1 (\operatorname{am} u) \overset{1}{\Theta}_p$$
$$+ \delta_2 k^4 \lambda^2 (\operatorname{am} u) \overset{2}{\Theta}_p + \delta_3 k^6 \lambda^3 (\operatorname{am} u) \overset{3}{\Theta}_p + \delta_4 k^8 \lambda^4 (\operatorname{am} u) \overset{4}{\Theta}_p + \cdots\}$$

$$(3.) \quad 'D(u,a)$$

$$= \operatorname{arc\,tang}(k' \operatorname{sn}' a \operatorname{tn} u) + \frac{\operatorname{sn}' a}{\operatorname{snc}' a} \{\operatorname{am} u - \overset{0}{\Phi}_p + \varepsilon_1 k^2 \lambda^1 (\operatorname{am} u) \overset{1}{\Phi}_p$$
$$+ \varepsilon_2 k^4 \lambda^2 (\operatorname{am} u) \overset{2}{\Phi}_p + \varepsilon_3 k^6 \lambda^3 (\operatorname{am} u) \overset{3}{\Phi}_p + \varepsilon_4 k^8 \lambda^4 (\operatorname{am} u) \overset{4}{\Phi}_p + \cdots\},$$

wenn in diesen drei Reihen

$$(4.) \quad p = \frac{\operatorname{dn}'^2 a}{k^2} = \frac{1}{\operatorname{dnc}'^2 a}; \quad \overset{0}{\Theta}_p = \frac{1}{k' \operatorname{snc}' a} - 1 \quad \text{und} \quad -\overset{0}{\Phi}_p = 1 - k' \operatorname{snc}' a$$

gesetzt wird. Wird $u = K$ gesetzt, so erhält man für die sogenannten vollständigen oder bestimmten Integrale die Reihen:

(5.) $'S(K, a)$

$$=\tfrac{1}{2}\pi\{1-k'\operatorname{sn}'a-k'^2\operatorname{sn}'a\operatorname{cn}'a\operatorname{dn}'a(\eta_1\overset{0}{\Theta}_p+\eta_2k^2\overset{1}{\Theta}_p+\eta_3k^4\overset{2}{\Theta}_p+\eta_4k^6\overset{3}{\Theta}_p+\cdots)\},$$

(6.) $'C(K, a)$

$$=\tfrac{1}{2}\pi\{1-k'^2\operatorname{sn}'a\operatorname{snc}'a(\overset{0}{\Theta}_p+\delta_1k^2\overset{1}{\Theta}_p+\delta_2k^4\overset{2}{\Theta}_p+\delta_3k^6\overset{3}{\Theta}_p+\delta_4k^8\overset{4}{\Theta}_p+\cdots)\},$$

(7.) $'D(K, a)$

$$=\tfrac{1}{2}\pi\left\{1+\frac{\operatorname{sn}'a}{\operatorname{snc}'a}\cdot(-\overset{0}{\Phi}_p+\varepsilon_1k^2\overset{1}{\Phi}_p+\varepsilon_2k^4\overset{2}{\Phi}_p+\varepsilon_3k^6\overset{3}{\Phi}_p+\varepsilon_4k^8\overset{4}{\Phi}_p+\cdots)\right\}.$$

Die gemeinschaftliche Grenze der Functionen $\overset{r}{\Theta}_p$ und $\overset{r}{\Phi}_p$, bei wachsendem Index r, ist

$$(8.)\quad \frac{1}{p-1}=\frac{\operatorname{dnc}'^2a}{k'^2\operatorname{snc}'^2a}=\left(\frac{k}{k'}\cdot\frac{1}{\operatorname{cn}'a}\right)^2,$$

und sie ist desto kleiner, je kleiner der Modul k und das Argument a des Parameters sind. Obgleich hiernach die Functionen $\overset{r}{\Theta}_p$ und $\overset{r}{\Phi}_p$, bei ohne Ende wachsendem Index r, immer zunehmen, so bringt es doch ihre sehr langsame Bewegung gegen eine feste Grenze hin mit sich, dafs dadurch die Convergenz der Reihen wenig leidet und sie so ziemlich als constante Factoren betrachtet werden können, die übrigens einen desto kleineren Werth haben, je gröfser p ist. Gerade auf dieser Eigenschaft beruht aber auch die Möglichkeit der Berechnung und Anwendbarkeit der Tafeln für die Werthe jener Functionen, da es nicht nöthig sein wird, die constante Differenz von $p<0{,}1$ zu nehmen, wenigstens dann nicht, wenn p schon beträchtlich >1 ist.

Zu den Integralen von der dritten Classe gehört auch das Complement $S(K, K'-a)-S(K-u, K'-a)$ des Integrals $S(K-u, K'-a)$ erster Classe, welches $=0$ ist für $u=0$. Bezeichnet man jene Differenz durch y, so folgt aus der Formel

$$\partial S(u, a)=\frac{\operatorname{dnc}'a\operatorname{sn}^2u\,\partial u}{\operatorname{tnc}'a\operatorname{snc}'^2a\left(1+\frac{\operatorname{sn}^2u}{\operatorname{tnc}'^2a}\right)}$$

sofort

$$\partial y=\frac{\operatorname{dn}'a\operatorname{snc}^2u\,\partial u}{\operatorname{tn}'a\operatorname{sn}'^2a\left(1+\frac{\operatorname{snc}^2u}{\operatorname{tn}'^2a}\right)}$$

oder, nach einer leichten Umformung,

$$\partial y=\frac{\operatorname{dn}'a\operatorname{cn}^2u\,\partial u}{\operatorname{tn}'a(1-\operatorname{dn}'^2a\operatorname{sn}^2u)}.$$

Hiernach haben wir also zunächst:

$$(9.)\quad S(K,K'-a)-S(K-u,K'-u)=\int_0\frac{\operatorname{dn}'a\operatorname{cn}^2u\,\partial u}{\operatorname{tn}'a(1-\operatorname{dn}'^2a\operatorname{sn}^2u}$$
$$=\frac{u}{\operatorname{tn}'a\operatorname{dn}'a}-{}'C(u,a).$$

Da nun aber $\frac{u}{\operatorname{tn}'a\operatorname{dn}'a}=\frac{\operatorname{snc}'a}{\operatorname{sn}'a}\cdot u=k'^2\operatorname{sn}'a\operatorname{snc}'a\left(u\cdot\frac{1}{k'^2\operatorname{sn}'^2a}\right)$ ist, so darf man die Reihe

$$u=\operatorname{am}u+\delta_1k^2\lambda^1(\operatorname{am}u)+\delta_2k^4\lambda^2(\operatorname{am}u)+\delta_3k^6\lambda^3(\operatorname{am}u)+\cdots$$

nur mit $\frac{1}{k'^2\operatorname{sn}'^2a}$ multipliciren und die Reihe (2.) vom Producte subtrahiren. Dadurch erhält man die Reihe

$$(10.)\quad S(K,K'-a)-S(K-u,K'-a)=\frac{u}{\operatorname{tn}'a\operatorname{dn}'a}-{}'C(u,a)$$
$$=\int_0\frac{\operatorname{dn}'a\operatorname{cn}^2u\,\partial u}{\operatorname{tn}'a(1-\operatorname{dn}'^2a\operatorname{sn}^2u)}$$
$$=-\operatorname{arc\,tang}(k'\operatorname{sn}'a\operatorname{tn}u)+k'^2\operatorname{sn}'a\operatorname{snc}'a\Big\{\operatorname{am}u\Big(\frac{1}{k'^2\operatorname{sn}'^2a}+\overset{0}{\Theta}_p\Big)$$
$$+\delta_1k^2\lambda^1(\operatorname{am}u)\Big(\frac{1}{k'^2\operatorname{sn}'^2a}+\overset{1}{\Theta}_p\Big)+\delta_2k^4\lambda^2(\operatorname{am}u)\Big(\frac{1}{k'^2\operatorname{sn}'^2a}+\overset{2}{\Theta}_p\Big)+\cdots\Big\},$$

in welcher wieder

$$p=\frac{1}{\operatorname{dnc}'^2a}\quad\text{und}\quad\overset{0}{\Theta}=\frac{1}{k'\operatorname{snc}'a}-1$$

ist. Die Grenze des zweigliedrigen Factors $\frac{1}{k'^2\operatorname{snc}'^2a}+\overset{r}{\Theta}_p$, bei wachsendem Index r, ist aber gleich

$$(11.)\quad\frac{1}{k'^2\operatorname{sn}'^2a}+\frac{k^2}{k'^2\operatorname{cn}'^2a}=\Big(\frac{1}{k'\operatorname{sn}'a\operatorname{snc}'a}\Big)^2.$$

Übrigens läfst sich das Integral auch nach folgenden Formeln finden:

$$(12.)\quad S(K,K'-a)-S(K-u,K'-a)=\int_0\frac{\operatorname{dn}'a\operatorname{cn}^2u\,\partial u}{\operatorname{tn}'a(1-\operatorname{dn}'^2a\operatorname{sn}^2u}$$
$$=\frac{\operatorname{dn}'a}{\operatorname{tn}'a}\cdot u-{}'S(u,a)$$
$$=\frac{\operatorname{snc}'a}{\operatorname{sn}'a}\cdot u-{}'C(u,a)$$
$$=\frac{u}{\operatorname{sn}'a\operatorname{snc}'a}-{}'D(u,a).$$

3. Reihen für die Integrale von der zweiten Classe.

§. 12.

a. **Erste Art von Reihen für die Integrale zweiter Classe.**

Die Integrale zweiter Classe gestatten unmittelbar keine solche Reihen-Entwickelungen, wie die Integrale von der vierten und dritten Classe, weil für sie p positiv und < 1, also die Functionen $\overset{r}{\Theta}_p$ und $\overset{r}{\Phi}_p$ sämmtlich imaginär sein würden; wohl aber lassen sie sich auf die Integrale vierter Classe zurückführen; und zwar auf zwei verschiedene Arten, indem man von den in (§. 134.) der Theorie der Modular-Functionen und der Modular-Integrale zusammengestellten Formeln Gebrauch macht. Benutzen wir zunächst die Formeln

$$\mathfrak{S}(u,a) = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{tn}\,a}\cdot\frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}\right) - {}'\mathfrak{C}(u, K-a),$$

$$\mathfrak{C}(u,a) = {}'\mathfrak{D}(u, K-a) - \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{tn}\,a}\cdot\frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{dn}\,a}\right),$$

so haben wir nach (§. 9.) zunächst

$$(1.)\quad \begin{cases} p = \dfrac{1}{k^2\mathrm{sn}^2 a}, \\ \overset{\bullet}{\Theta}_p = \dfrac{1}{\mathrm{dn}\,a} - 1, \\ -\overset{\bullet}{\Phi}_p = 1 - \mathrm{dn}\,a \end{cases}$$

zu setzen. Dann ist

$$\mathfrak{S}(u,a) = -\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{tn}\,a}\right) + \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,u}\right) + \frac{\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{tn}\,a}\{\mathrm{am}\,u . \overset{\bullet}{\Theta}_p$$

$$+ \delta_1 k^2\lambda^1(\mathrm{am}\,u)\overset{1}{\Theta}_p + \delta_2 k^4\lambda^2(\mathrm{am}\,u)\overset{2}{\Theta}_p + \delta_3 k^6\lambda^3(\mathrm{am}\,u)\overset{3}{\Theta}_p + \cdots\},$$

$$\mathfrak{C}(u,a) = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{tn}\,a}\right) - \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,u}\right) + \frac{\mathrm{snc}\,a}{\mathrm{sn}\,a}\{\mathrm{am}\,u - \overset{\bullet}{\Phi}_p$$

$$+ \varepsilon_1 k^2\lambda^1(\mathrm{am}\,u)\overset{1}{\Phi}_p + \varepsilon_2 k^4\lambda^2(\mathrm{am}\,u)\overset{2}{\Phi}_p + \varepsilon_3 k^6\lambda^3(\mathrm{am}\,u)\overset{3}{\Phi}_p + \cdots\}.$$

Nach (§. 33.) der Theorie der Modular-Functionen ist aber

$$\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{tn}\,a}\right) - \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,u}\right) = \log\sqrt{\frac{1+\mathrm{dn}(a-u)}{1+\mathrm{dn}(a+u)}}:$$

also lassen sich in Anwendung dieser Formel die beiden ersten Glieder

vereinigen. Die Reihen sind dann

$$(2.)\qquad \mathfrak{S}(u,a) = -\log\sqrt{\frac{1+\mathrm{dn}(a-u)}{1+\mathrm{dn}(a+u)}} + \frac{\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{tn}\,a}\{\mathrm{am}\,u\,\overset{0}{\Theta}_p + \delta_1 k^2\lambda^1(\mathrm{am}\,u)\overset{1}{\Theta}_p$$

$$+\delta_2 k^4\lambda^2(\mathrm{am}\,u)\overset{2}{\Theta}_p + \delta_3 k^6\lambda^3(\mathrm{am}\,u)\overset{3}{\Theta}_p + \delta_4 k^8\lambda^4(\mathrm{am}\,u)\overset{4}{\Theta}_p + \cdots\},$$

$$(3.)\qquad \mathfrak{C}(u,a) = \log\sqrt{\frac{1+\mathrm{dn}(a-u)}{1+\mathrm{dn}(a+u)}} + \frac{\mathrm{snc}\,a}{\mathrm{sn}\,a}\{\mathrm{am}\,u - \overset{0}{\Phi}_p + \varepsilon_1 k^2\lambda^1(\mathrm{am}\,u)\overset{1}{\Phi}_p$$

$$+\varepsilon_2 k^4\lambda^2(\mathrm{am}\,u)\overset{2}{\Phi}_p + \varepsilon_3 k^6\lambda^3(\mathrm{am}\,u)\overset{3}{\Phi}_p + \varepsilon_4 k^8\lambda^4(\mathrm{am}\,u)\overset{4}{\Phi}_p + \cdots\}.$$

Aufser diesen beiden Integralen zweiter Classe giebt es noch ein drittes, zu eben dieser Classe gehörendes Integral, welches sich mit gleicher Einfachheit durch eine Reihe ausdrücken läfst; nemlich das Integral:

$$(4.)\qquad \mathfrak{D}(K,K-a)-\mathfrak{D}(K-u,K-a) = \int_0 \frac{\mathrm{dn}\,a\,\partial u}{\mathrm{tn}\,a(1-k^2\mathrm{sn}^2u\,\mathrm{sn}^2u)}$$

$$= \frac{\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{tn}\,a}\cdot u + \mathfrak{S}(u,a)$$

$$= \frac{\mathrm{snc}\,a}{\mathrm{sn}\,a}\cdot u - \mathfrak{C}(u,a)$$

$$= \frac{u}{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a} - \mathfrak{D}(u,a).$$

Benutzt man den Ausdruck $\frac{\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{tn}\,a}\cdot u + \mathfrak{S}(u,a)$, so erhält man sofort die Reihe

$$\mathfrak{D}(K,K-a)-\mathfrak{D}(K-u,K-a) = -\log\sqrt{\frac{1+\mathrm{dn}(a-u)}{1+\mathrm{dn}(a+u)}} + \frac{\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{tn}\,a}\{\mathrm{am}\,u(1+\overset{0}{\Theta}_p)$$

$$+\delta_1 k^2\lambda^1(\mathrm{am}\,u)(1+\overset{1}{\Theta}_p) + \delta_2 k^4\lambda^2(\mathrm{am}\,u)(1+\overset{2}{\Theta}_p) + \cdots \delta_r k^{2r}\lambda^r(\mathrm{am}\,u)(1+\overset{r}{\Theta}_p)\}$$

Da nun aber $1+\overset{r}{\Theta}_p = \frac{2r}{2r-1}\cdot p.\overset{r-1}{\Theta}_p = \frac{2r}{2r-1}\cdot\frac{1}{k^2\mathrm{sn}^2a}\cdot\overset{r-1}{\Theta}_p$, so ist

$$\delta_r k^{2r}\lambda^r(\mathrm{am}\,u)(1+\overset{r}{\Theta}_p) = \frac{1}{k^2\mathrm{sn}^2a}\cdot\frac{2r}{2r-1}\cdot\delta_r\lambda^r(\mathrm{am}\,u)\overset{r-1}{\Theta}_p \text{ für } r>0$$

$$= \frac{1}{k^2\mathrm{sn}^2a}\cdot\eta_r.\lambda^r(\mathrm{am}\,u)\overset{r-1}{\Theta} \text{ für } r>0.$$

Da ferner $1+\overset{0}{\Theta} = \frac{1}{\mathrm{dn}\,a}$ ist, so ergiebt sich die Reihe

(5.)
$$\left\{\begin{aligned}
&\mathfrak{D}(K, K-a)-\mathfrak{D}(K-u, K-a)\\
&\quad = -\log\sqrt{\frac{1+\operatorname{dn}(a-u)}{1+\operatorname{dn}(a+u)}}+\frac{\operatorname{am}u}{\operatorname{tn}a}+\frac{\operatorname{dn}a}{\operatorname{tn}a\operatorname{sn}^2a}\{\eta_1\lambda^1(\operatorname{am}u)\overset{0}{\Theta}_p)\\
&\qquad +\eta_2k^2\lambda^2(\operatorname{am}u)\overset{1}{\Theta}_p+\eta_3k^4\lambda^3(\operatorname{am}u)\overset{2}{\Theta}_p+\eta_4k^6\lambda^4(\operatorname{am}u)\overset{3}{\Theta}_p+\cdots\},\\
&\text{oder auch}\\
&\mathfrak{D}(K, K-a)-\mathfrak{D}(K-u, K-a)\\
&\quad = -\log\sqrt{\frac{1+\operatorname{dn}(a-u)}{1+\operatorname{dn}(a+u)}}+\frac{\operatorname{am}u}{\operatorname{tn}a}+\frac{k'^2\operatorname{tnc}a\operatorname{dnc}a}{\operatorname{cnc}^2a}\{\eta_1\lambda^1(\operatorname{am}u)\overset{0}{\Theta}_p\\
&\qquad +\eta_2k^2\lambda^2(\operatorname{am}u)\overset{1}{\Theta}_p+\eta_3k^4\lambda^3(\operatorname{am}u)\overset{2}{\Theta}_p+\eta_4k^6\lambda^4(\operatorname{am}u)\overset{3}{\Theta}_p+\cdots\}.
\end{aligned}\right.$$

Die gemeinschaftliche Grenze der Functionen $\overset{r}{\Theta}_p$ und $\overset{r}{\Phi}_p$ in den vorstehenden Reihen ist

$$(6.)\qquad \frac{1}{p-1} = \frac{k^2\operatorname{sn}^2a}{\operatorname{dn}^2a} = \frac{k^2}{k'^2}\cdot\operatorname{cnc}^2a.$$

Setzt man $u=K$, so erhält man die Formeln

(7.)
$$\left\{\begin{aligned}
&\mathfrak{S}(K, a) = \frac{\operatorname{dn}a}{\operatorname{tn}a}\cdot\tfrac{1}{2}\pi(\overset{0}{\Theta}_p+\delta_1k^2\overset{1}{\Theta}_p+\delta_2k^4\overset{2}{\Theta}_p+\delta_3k^6\overset{3}{\Theta}_p+\cdots)\\
&\mathfrak{C}(K, a) = \frac{\operatorname{snc}a}{\operatorname{sn}a}\cdot\tfrac{1}{2}\pi(-\overset{0}{\Phi}_p+\varepsilon_1k^2\overset{1}{\Phi}_p+\varepsilon_2k^4\overset{2}{\Phi}_p+\varepsilon_3k^6\overset{3}{\Phi}_p+\cdots)\\
&\mathfrak{D}(K, K-a) = \tfrac{1}{2}\pi\left\{\frac{1}{\operatorname{tn}a}+\frac{k'^2\operatorname{tnc}a\operatorname{dnc}a}{\operatorname{cnc}^2a}(\eta_1\overset{0}{\Theta}_p+\eta_2k^2\overset{1}{\Theta}_p+\eta_3k^4\overset{2}{\Theta}_p+\eta_4k^6\overset{3}{\Theta}_p\cdots)\right\}.
\end{aligned}\right.$$

Zusatz. Setzt man $\psi=\log\sqrt{\frac{P}{Q}}$ für $Q<P$, so ist

$$P=\tfrac{1}{2}(P+Q)+\tfrac{1}{2}(P-Q) \quad\text{und}\quad Q=\tfrac{1}{2}(P+Q)-\tfrac{1}{2}(P-Q),$$

also

$$\psi = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{P-Q}{P+Q}\right)$$

oder

$$\mathfrak{Tang}\,\psi = \frac{P-Q}{P+Q}.$$

Hieraus folgt

$$\mathfrak{Sin}\,\psi = \frac{\frac{1}{2}(P-Q)}{\sqrt{(P.Q)}},$$
$$\mathfrak{Cos}\,\psi = \frac{\frac{1}{2}(P+Q)}{\sqrt{(P.Q)}}.$$

Setzt man nun $\psi=\log\sqrt{\frac{1+\operatorname{dn}(a-u)}{1+\operatorname{dn}(a+u)}}$, also

$$P = 1+\operatorname{dn}(a-u),\quad Q = 1+\operatorname{dn}(a+u),$$

so ist

$$\tfrac{1}{2}(P-Q) = \tfrac{1}{2}(\mathrm{dn}(a-u)-\mathrm{dn}(a+u)) = \frac{k^2 \,\mathrm{sn}\, a \,\mathrm{cn}\, a \,\mathrm{sn}\, u \,\mathrm{cn}\, u}{1-k^2 \mathrm{sn}^2 a \,\mathrm{sn}^2 u}$$

und

$$\tfrac{1}{2}(P+Q) = 1+\tfrac{1}{2}(\mathrm{dn}(a-u)+\mathrm{dn}(a+u)) = \frac{1-k^2\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u+\mathrm{dn}\, a\,\mathrm{dn}\, u}{1-k^2 \mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u}.$$

Da ferner nach (§. 37. Formel 10.) der Theorie der Modular-Functionen und der Modular-Integrale

$$\sqrt{(P.Q)} = \frac{\mathrm{dn}\, a+\mathrm{dn}\, u}{\sqrt{(1-k^2\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u)}}$$

ist, so ist

$$\psi = \mathfrak{Arc\,Sin}\left[\frac{k^2\mathrm{sn}\, a\,\mathrm{cn}\, a\,\mathrm{sn}\, u\,\mathrm{cn}\, u}{(\mathrm{dn}\, a+\mathrm{dn}\, u)\sqrt{(1-k^2\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u)}}\right] = \mathfrak{Arc\,Cos}\left[\frac{1-k^2\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u+\mathrm{dn}\, a\,\mathrm{dn}\, u}{(\mathrm{dn}\, a+\mathrm{dn}\, u)\sqrt{(1-k^2\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u)}}\right]$$

$$= \mathfrak{Arc\,Tang}\left[\frac{k^2\mathrm{sn}\, a\,\mathrm{cn}\, a\,\mathrm{sn}\, u\,\mathrm{cn}\, u}{1-k^2\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u+\mathrm{dn}\, a\,\mathrm{dn}\, u}\right] = \log\sqrt{\frac{1+\mathrm{dn}(a-u)}{1+\mathrm{dn}(a+u)}}.$$

§. 13.

b. Zweite Art von Reihen für die Integrale von der zweiten Classe.

Nach (§. 134.) der Theorie der Modular-Functionen und der Modular-Integrale ist auch

$$\mathfrak{S}(u,a) = {}'\mathfrak{D}(u,a) - \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{sn}\, a}{\mathrm{snc}\, a}\cdot\frac{\mathrm{sn}\, u}{\mathrm{snc}\, u}\right) = \int_0 \frac{k^2\mathrm{sn}\, a\,\mathrm{cn}\, a\,\mathrm{dn}\, a\,\mathrm{sn}^2 u\,\partial u}{1-k^2\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u}$$

$$\mathfrak{C}(u,a) = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{sn}\, a}{\mathrm{snc}\, a}\cdot\frac{\mathrm{sn}\, u}{\mathrm{snc}\, u}\right) - {}'\mathfrak{C}(u,a) = \int_0 \frac{k^2\mathrm{sn}\, a\,\mathrm{snc}\, a\,\mathrm{cn}^2 u\,\partial u}{1-k^2\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u}$$

$$\mathfrak{D}(u,a) = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{sn}\, a}{\mathrm{snc}\, a}\cdot\frac{\mathrm{sn}\, u}{\mathrm{snc}\, u}\right) - {}'\mathfrak{S}(u,a) = \int_0 \frac{\mathrm{tn}\, a\,\mathrm{dn}\, a\,\mathrm{dn}^2 u\,\partial u}{1-k^2\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u}.$$

Setzen wir daher, wie in (§. 9.),

$$(1.)\qquad p = \frac{1}{k^2\mathrm{snc}^2 a};\qquad \overset{0}{\Theta}_p = \frac{1}{\mathrm{dnc}\, a}-1;\qquad -\overset{0}{\Phi}_p = 1-\mathrm{dnc}\, a;$$

so erhalten wir sofort für unsere Integrale die drei Reihen:

$$\mathfrak{S}(u,a) = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{tn}\, u}{\mathrm{tnc}\, a}\right) - \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{sn}\, a.\mathrm{sn}\, u}{\mathrm{snc}\, a.\mathrm{snc}\, u}\right)$$
$$+\frac{\mathrm{sn}\, a}{\mathrm{snc}\, a}\{\mathrm{am}\, u - \overset{0}{\Phi}_p + \varepsilon_1 k^2\lambda^1(\mathrm{am}\, u)\overset{1}{\Phi}_p$$
$$+\varepsilon_2 k^4\lambda^2(\mathrm{am}\, u).\overset{2}{\Phi}_p + \varepsilon_3 k^6\lambda^3(\mathrm{am}\, u)\overset{3}{\Phi}_p + \cdots\},$$

$$\mathfrak{C}(u,a) = \mathfrak{Arc\,Tang}\Big(\frac{\operatorname{sn} a \operatorname{sn} u}{\operatorname{snc} a \operatorname{snc} u}\Big) - \mathfrak{Arc\,Tang}\Big(\frac{\operatorname{tn} u}{\operatorname{tnc} a}\Big)$$
$$+ \frac{\operatorname{dnc} a}{\operatorname{tnc} a}\{\operatorname{am} u\, \overset{0}{\Theta}_p + \delta_1 k^2 \lambda^1 (\operatorname{am} u)\, \overset{1}{\Theta}_p$$
$$+ \delta_2 k^4 \lambda^2 (\operatorname{am} u)\, \overset{2}{\Theta}_p + \delta_3 k^6 \lambda^3 (\operatorname{am} u)\, \overset{3}{\Theta}_p + \cdots\},$$

$$\mathfrak{D}(u,a) = \mathfrak{Arc\,Tang}\Big(\frac{\operatorname{sn} a \operatorname{sn} u}{\operatorname{snc} a \operatorname{snc} u}\Big) - \mathfrak{Arc\,Tang}\Big(\frac{\operatorname{tn} u}{\operatorname{tnc} a}\Big)$$
$$+ \frac{\operatorname{am} u}{\operatorname{tnc} a} + \frac{k'^2 \operatorname{tn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{cn}^2 a}\{\eta_1 \lambda^1 (\operatorname{am} u)\, \overset{0}{\Theta}_p$$
$$+ \eta_2 k^2 \lambda^2 (\operatorname{am} u)\, \overset{1}{\Theta}_p + \eta_3 k^4 \lambda^3 (\operatorname{am} u)\, \overset{2}{\Theta}_p + \cdots\}.$$

Aus der Formel $\operatorname{dn}(a \pm u) = \frac{\operatorname{dn} a \operatorname{tn} a \mp \operatorname{dn} u \operatorname{tn} u}{\operatorname{dn} u \operatorname{tn} a \mp \operatorname{dn} a \operatorname{tn} u}$ in (§. 33.) der Theorie der Modular-Functionen folgt nun aber, in Beachtung dafs $\operatorname{dnc}(a \pm u) = \frac{k'}{\operatorname{dn}(a \pm u)}$ ist, leicht die Formel

$$\log \sqrt{\frac{k' + \operatorname{dnc}(a+u)}{k' + \operatorname{dnc}(a-u)}} = \mathfrak{Arc\,Tang}\Big(\frac{\operatorname{tn} u}{\operatorname{tn} a}\Big) - \mathfrak{Arc\,Tang}\Big(\frac{\operatorname{dn} u \operatorname{tn} u}{\operatorname{dn} a \operatorname{tn} a}\Big),$$

und setzt man hierin $K - a$ statt a, so erhält man

$$\log \sqrt{\frac{k' + \operatorname{dn}(a-u)}{k' + \operatorname{dn}(a+u)}} = \mathfrak{Arc\,Tang}\Big(\frac{\operatorname{tn} u}{\operatorname{tnc} u}\Big) - \mathfrak{Arc\,Tang}\Big(\frac{\operatorname{sn} a}{\operatorname{snc} a} \cdot \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{snc} u}\Big).$$

Durch Anwendung dieser Formel erhält man dann die Reihen:

(2.) $$\mathfrak{S}(u,a) = +\log \sqrt{\frac{k' + \operatorname{dn}(a-u)}{k' + \operatorname{dn}(a+u)}} + \frac{\operatorname{sn} a}{\operatorname{snc} a}\{\operatorname{am} u - \overset{0}{\Phi}_p + \varepsilon_1 k^2 \lambda^1 (\operatorname{am} u)\, \overset{1}{\Phi}_p$$
$$+ \varepsilon_2 k^4 \lambda^2 (\operatorname{am} u)\, \overset{2}{\Phi}_p + \varepsilon_3 k^6 \lambda^3 (\operatorname{am} u)\, \overset{3}{\Phi}_p + \cdots\},$$

(3.) $$\mathfrak{C}(u,a) = -\log \sqrt{\frac{k' + \operatorname{dn}(a-u)}{k' + \operatorname{dn}(a+u)}} + \frac{\operatorname{dnc} a}{\operatorname{tnc} a}\{\operatorname{am} u\, \overset{0}{\Theta}_p + \delta_1 k^2 \lambda^1 (\operatorname{am} u)\, \overset{1}{\Theta}_p$$
$$+ \delta_2 k^4 \lambda^2 (\operatorname{am} u)\, \overset{2}{\Theta}_p + \delta_3 k^6 \lambda^3 (\operatorname{am} u)\, \overset{3}{\Theta}_p + \cdots\},$$

(4.) $$\mathfrak{D}(u,a) = -\log \sqrt{\frac{k' + \operatorname{dn}(a-u)}{k' + \operatorname{dn}(a+u)}} + \frac{\operatorname{am} u}{\operatorname{tnc} a} + \frac{k'^2 \operatorname{tn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{cn}^2 a}\{\eta_1 \lambda^1 (\operatorname{am} u)\, \overset{0}{\Theta}_p$$
$$+ \eta_2 k^2 \lambda^2 (\operatorname{am} u)\, \overset{1}{\Theta}_p + \eta_3 k^4 \lambda^3 (\operatorname{am} u)\, \overset{2}{\Theta}_p + \eta_4 k^6 \lambda^4 (\operatorname{am} u)\, \overset{3}{\Theta}_p + \cdots\}.$$

Setzt man $P = k' + \operatorname{dn}(a-u)$, $Q = k' + \operatorname{dn}(a+u)$, wie am Schlusse des vorigen Paragraphen, so ist

$$\tfrac{1}{2}(P-Q) = \tfrac{1}{2}(\mathrm{dn}(a-u)-\mathrm{dn}(a+u)) = \frac{k^2 \mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u}{1-k^2\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u},$$

$$\tfrac{1}{2}(P+Q) = k'+\tfrac{1}{2}(\mathrm{dn}(a-u)+\mathrm{dn}(a+u)) = \frac{k'(1-k^2\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u)+\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,u}{1-k^2\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u},$$

$$\sqrt{(P.Q)} = \frac{k'+\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,u}{\sqrt{(1-k^2\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u)}},$$

also

$$(5.)\quad \log\sqrt{\frac{k'+\mathrm{dn}(a-u)}{k'+\mathrm{dn}(a+u)}} = \mathrm{Arc\,Sin}\left[\frac{k^2\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u}{(k'+\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,u)\sqrt{(1-k^2\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u)}}\right]$$

$$= \mathrm{Arc\,Cos}\left[\frac{k'(1-k^2\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u)+\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,u}{(k'+\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,u)\sqrt{(1-k^2\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u)}}\right] = \mathrm{Arc\,Tang}\left[\frac{k^2\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u}{k'(1-k^2\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u)+\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,u}\right]$$

$$= \mathrm{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{tnc}\,a}\right) - \mathrm{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{snc}\,u}\right).$$

4. Reihen für die Integrale erster Classe.

§. 14.

a. Erste Art von Reihen für die Integrale erster Classe.

Setzt man in den Integralen dritter Classe $K'+iK-a$ statt a, indem man von den bekannten Formeln

$$\mathrm{sn}'(K'+iK-a) = \frac{1}{k'\mathrm{snc}'a},\qquad \mathrm{tn}'(K'+iK-a) = \frac{i}{\mathrm{dnc}'a},$$

$$\mathrm{cn}'(K'+iK-a) = \frac{k}{ik'}\cdot\frac{1}{\mathrm{cn}'a},\qquad \mathrm{dn}'(K'+iK-a) = -ik\,\mathrm{tn}'a$$

Gebrauch macht, so verwandelt sich

$$k'^2\mathrm{sn}'a\,\mathrm{cn}'a\,\mathrm{dn}'a \;\text{ in }\; -\frac{k^2\mathrm{tn}'a\,\mathrm{dn}'a}{\mathrm{cn}'^2 a},$$

$$k'^2\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a \;\text{ in }\; +\frac{1}{\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a},$$

$\mathrm{tn}'a\,\mathrm{dn}'a$ wieder in $+\mathrm{tn}'a\,\mathrm{dn}'a$, und

$-\mathrm{dn}'^2 a$ in $+k^2\mathrm{tn}'^2 a$:

daher verwandelt sich hierdurch

$-{}'S(u,a)$ in $+S(u,a)$,

$${}'C(u,a) \;\text{ in }\; \int_0 \frac{\partial u}{\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a(1+k^2\mathrm{tn}'^2 a\,\mathrm{sn}^2 u)} = {}'D(K,K'-a)-{}'D(K-u,K'-a),$$

${}'D(u,a)$ in $+D(u,a)$.

Da ferner in den Reihen (1., 2., 3. §. 11.) $p = \dfrac{1}{\mathrm{dnc}'^2 a} = \dfrac{\mathrm{dn}'^2 a}{k^2}$ war,

so verwandelt sich p in $-\mathrm{tn}'^2 a$; es wird also p negativ. Setzen wir daher jetzt $-p$ statt p, wodurch sich

$$\overset{0}{\Theta}_p,\ \overset{1}{\Theta}_p,\ \overset{2}{\Theta}_p,\ \ldots \text{ in } -\overset{0}{\Theta}{}'_p,\ -\overset{1}{\Theta}{}'_p,\ -\overset{2}{\Theta}{}'_p,\ \ldots$$

und

$$\overset{0}{\Phi}_p,\ \overset{1}{\Phi}_p,\ \overset{2}{\Phi}_p,\ \ldots \text{ in } -\overset{0}{\Phi}{}'_p,\ -\overset{1}{\Phi}{}'_p,\ -\overset{2}{\Phi}{}'_p,\ \ldots$$

verwandeln, so erhalten wir die gesuchten neuen Reihen:

$$(1.)\quad S(u,a) = -\operatorname{arctang}\left(\frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{snc}'a}\right) + \frac{\mathrm{am}\,u}{\mathrm{snc}'a} + \frac{k^2\,\mathrm{tn}'a\,\mathrm{dn}'a}{\mathrm{cn}'^2a}\{\eta_1\lambda^1(\mathrm{am}\,u)\overset{0}{\Theta}{}'_p$$
$$+\eta_2 k^2\lambda^2(\mathrm{am}\,u)\overset{1}{\Theta}{}'_p + \eta_3 k^4\lambda^3(\mathrm{am}\,u)\overset{2}{\Theta}{}'_p + \eta_4 k^6\lambda^3(\mathrm{am}\,u)\overset{3}{\Theta}{}'_p + \cdots\},$$

$$(2.)\quad {}'D(K, K'-a) - {}'D(K-u, K'-a) = \int_0 \frac{\partial u}{\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a\,(1+k^2\,\mathrm{tn}'^2a\,\mathrm{sn}^2u)}$$
$$= \frac{u}{\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a} - S(u,a) = \frac{\mathrm{snc}'a}{\mathrm{sn}'u}\cdot u + C(u,a) = \frac{\mathrm{dn}'a}{\mathrm{tn}'a}\cdot u + D(u,a)$$
$$= \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{snc}'a}\right) + \frac{1}{\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a}\{\mathrm{am}\,u\,\overset{0}{\Theta}{}'_p + \delta_1 k^2\lambda^1(\mathrm{am}\,u)\overset{1}{\Theta}{}'_p$$
$$+\delta_2 k^4\lambda^2(\mathrm{am}\,u)\overset{2}{\Theta}{}'_p + \delta_3 k^6\lambda^3(\mathrm{am}\,u)\overset{3}{\Theta}{}'_p + \delta_4 k^8\lambda^4(\mathrm{am}\,u)\overset{4}{\Theta}{}'_p + \cdots\},$$

$$(3.)\quad D(u,a) = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{snc}'a}\right) - \frac{\mathrm{sn}'a}{\mathrm{snc}'a}\{\mathrm{am}\,u - \overset{0}{\Phi}{}'_p + \varepsilon_1 k^2\lambda^1(\mathrm{am}\,u)\overset{1}{\Phi}{}'_p$$
$$+\varepsilon_2 k^4\lambda^2(\mathrm{am}\,u)\overset{2}{\Phi}{}'_p + \varepsilon_3 k^6\lambda^3(\mathrm{am}\,u)\overset{3}{\Phi}{}'_p + \varepsilon_4 k^8\lambda^4(\mathrm{am}\,u)\overset{4}{\Phi}{}'_p + \cdots\},$$

worin nun

$$(4.)\quad p = \mathrm{tn}'^2a;\quad \overset{0}{\Theta}{}'_p = 1-\mathrm{sn}'a;\quad -\overset{0}{\Phi}{}'_p = \frac{1}{\mathrm{sn}'a} - 1$$

ist. Die gemeinschaftliche Grenze der Functionen $\overset{r}{\Theta}{}'_p$ und $\overset{r}{\Phi}{}'_p$, beim Wachsen des Index r ins Unendliche, ist aber

$$\frac{1}{p+1} = \mathrm{cn}'^2a;$$

woraus erhellet, dafs die Reihe

$$\overset{0}{\Theta}{}'_p,\ \overset{1}{\Theta}{}'_p,\ \overset{2}{\Theta}{}'_p,\ \overset{3}{\Theta}{}'_p,\ \ldots\ \overset{r}{\Theta}{}'_p$$

zwar immer divergirt, und die Reihe

$$-\overset{0}{\Phi}{}'_p,\ \overset{1}{\Phi}{}'_p,\ \overset{2}{\Phi}{}'_p,\ \overset{3}{\Phi}{}'_p,\ \ldots\ \overset{r}{\Phi}{}'_p$$

dann divergirt, wenn $\mathrm{sn}'a(1+\mathrm{sn}'a) > 1$, also $\mathrm{sn}'a > \frac{1}{2}(\sqrt{(5}-1))$ ist, dafs aber jede solche Divergenz in so hohem Grade retardirt, dafs diese Func-

tionen auf die von den übrigen Factoren herrührende Convergenz einen ganz unerheblichen Einfluſs haben.

Setzt man $u = K$, so ist die Convergenz in den Reihen am schwächsten und man findet

(5.) $$S(K, a) = \tfrac{1}{2}\pi\left\{\frac{1}{\mathrm{snc}'a} - 1 + \frac{k^2\mathrm{tn}'a\,\mathrm{dn}'a}{\mathrm{cn}'^2a}(\eta_1\overset{0}{\Theta}{}'_p + \eta_2 k^2\overset{1}{\Theta}{}'_p + \eta_3 k^4\overset{2}{\Theta}{}'_p + \eta_4 k^6\overset{3}{\Theta}{}'_p + \cdots)\right\},$$

(6.) $$'D(K, K'-a) = \tfrac{1}{2}\pi\left\{1 + \frac{1}{\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a}(\overset{0}{\Theta}{}'_p + \delta_1 k^2\overset{1}{\Theta}{}'_p + \delta_2 k^4\overset{2}{\Theta}{}'_p + \delta_3 k^6\overset{3}{\Theta}{}'_p + \delta_4 k^8\overset{4}{\Theta}{}'_p + \cdots)\right\},$$

(7.) $$D(K, a) = \tfrac{1}{2}\pi\left\{1 + \frac{\mathrm{sn}'a}{\mathrm{snc}'a}(-\overset{0}{\Phi}{}'_p + \varepsilon_1 k^2\overset{1}{\Phi}{}'_p + \varepsilon_2 k^4\overset{2}{\Phi}{}'_p + \varepsilon_3 k^6\overset{3}{\Phi}{}'_p + \varepsilon_4 k^8\overset{4}{\Phi}{}'_p + \cdots)\right\}.$$

§. 15.

b. Zweite Art von Reihen für die Integrale erster Classe.

Setzen wir in den Reihen (§. 12.) jetzt ai statt a, so wird p wieder negativ; setzt man daher gleichzeitig $-p$ statt p, also

(1.) $$p = \frac{1}{k^2\mathrm{tn}'^2a} = \mathrm{tnc}'^2a;\quad \overset{0}{\Theta}{}'_p = 1 - \mathrm{snc}'a;\quad -\overset{0}{\Phi}{}'_p = \frac{1}{\mathrm{snc}'a} - 1,$$

so erhalten wir die Reihen:

(2.) $$S(u, a) = -\psi + \frac{1}{\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a}\{\mathrm{am}\,u\,\overset{0}{\Theta}{}'_p + \delta_1 k^2\lambda^1(\mathrm{am}\,u)\overset{1}{\Theta}{}'_p + \delta_2 k^4\lambda^2(\mathrm{am}\,u)\overset{2}{\Theta}{}'_p + \delta_3 k^6\lambda^3(\mathrm{am}\,u)\overset{3}{\Theta}{}'_p + \delta_4 k^8\lambda^4(\mathrm{am}\,u)\overset{4}{\Theta}{}'_p + \cdots\},$$

(3.) $$C(u, a) = \psi + \frac{\mathrm{snc}'a}{\mathrm{sn}'a}\{\mathrm{am}\,u - \overset{0}{\Phi}{}'_p + \varepsilon_1 k^2\lambda^1(\mathrm{am}\,u)\overset{1}{\Phi}{}'_p + \varepsilon_2 k^4\lambda^2(\mathrm{am}\,u)\overset{2}{\Phi}{}'_p + \varepsilon_3 k^4\lambda^3(\mathrm{am}\,u)\overset{3}{\Phi}{}'_p + \varepsilon_4 k^6\lambda^4(\mathrm{am}\,u)\overset{4}{\Phi}{}'_p + \cdots\},$$

(4.) $$'D(K, K'-a) - {}'D(K-u, K'-a) = \int_0 \frac{\partial u}{\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a(1 + k^2\mathrm{tn}'^2a\,\mathrm{sn}^2u)}$$
$$= \frac{u}{\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a} - S(u, a)$$
$$= \frac{\mathrm{snc}'a}{\mathrm{sn}'a}\cdot u + C(u, a)$$
$$= \frac{\mathrm{dn}'a}{\mathrm{tn}'a}\cdot u - D(u, a)$$
$$= \psi + \frac{\mathrm{am}\,u}{\mathrm{sn}'a} + \frac{\mathrm{dn}'a}{\mathrm{tn}'a\,\mathrm{sn}'^2a}\{\eta_1\lambda^1(\mathrm{am}\,u)\overset{0}{\Theta}{}'_p + \eta_2 k^2\lambda^2(\mathrm{am}\,u)\overset{1}{\Theta}{}'_p + \eta_3 k^4\lambda^3(\mathrm{am}\,u)\overset{2}{\Theta}{}'_p + \eta_4 k^6\lambda^4(\mathrm{am}\,u)\overset{3}{\Theta}{}'_p + \cdots\}.$$

Der den Reihen an der Spitze stehende Arcus ist nun ein cyclischer, nemlich

$$\psi = \arcsin\left[\frac{\operatorname{dnc}'a \operatorname{sn}u \operatorname{cn}u}{\operatorname{tnc}'a(1-\operatorname{snc}'a \operatorname{dn}u)\sqrt{(1+k^2\operatorname{tn}'^2a\operatorname{sn}^2u)}}\right],$$

$$= \arccos\left[\frac{1-\operatorname{cnc}'^2a\operatorname{cn}^2u+\operatorname{snc}'a\operatorname{dn}u}{\operatorname{snc}'a(1-\operatorname{snc}'a\operatorname{dn}u)\sqrt{(1+k^2\operatorname{tn}'^2a\operatorname{sn}^2u)}}\right],$$

$$= \operatorname{arc\,tang}\left[\frac{\operatorname{cnc}'a\operatorname{dnc}'a\operatorname{sn}u\operatorname{cn}u}{1-\operatorname{cnc}'^2a\operatorname{cn}^2u+\operatorname{snc}'a\operatorname{dn}u}\right],$$

$$= \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{1}{\operatorname{sn}'a\operatorname{snc}'a}\cdot\frac{\operatorname{tn}u}{\operatorname{dn}u}\right)-\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{tn}u}{\operatorname{sn}'a}\right).$$

Die gemeinschaftliche Grenze der Functionen $\overset{r}{\Theta}'_p$ und $\overset{r}{\Phi}'_p$ ist jetzt cnc'^2a.

§. 16.

c. Dritte Art von Reihen für die Integrale von der ersten Classe.

Setzen wir auch in den Reihen (§. 13.) ai statt a, so wird

(1.) $p = \frac{1}{\operatorname{dnc}'^2a}$; $\overset{0}{\Theta}_p = \frac{1}{k'\operatorname{snc}'a}-1$; $-\overset{0}{\Phi} = 1-k'\operatorname{snc}'a$,

und die Reihen sind

(2.) $S(u,a) = \varphi+\frac{\operatorname{sn}'a}{\operatorname{snc}'a}\{\operatorname{am}u-\overset{0}{\Phi}_p+\varepsilon_1k^2\lambda^1(\operatorname{am}u)\overset{1}{\Phi}_p+\varepsilon_2k^4\lambda^2(\operatorname{am}u)\overset{2}{\Phi}_p$
$+\varepsilon_3k^6\lambda^3(\operatorname{am}u)\overset{3}{\Phi}_p+\cdots\}$,

(3.) $C(u,a) = -\varphi+k'^2\operatorname{sn}'a\operatorname{snc}'a\{\operatorname{am}u.\overset{0}{\Theta}_p+\delta_1k^2\lambda^1(\operatorname{am}u)\overset{1}{\Theta}_p+\delta_2k^4\lambda^2(\operatorname{am}u)\overset{2}{\Theta}_p$
$+\delta_3k^6\lambda^3(\operatorname{am}u)\overset{3}{\Theta}_p+\cdots\}$,

(4.) $D(u,a) = -\varphi+k'\operatorname{sn}'a\operatorname{am}u+k'^2\operatorname{sn}'a\operatorname{cn}'a\operatorname{dn}'a\{\eta_1\lambda^1(\operatorname{am}u)\overset{0}{\Theta}_p$
$+\eta_2k^2\lambda^2(\operatorname{am}u)\overset{1}{\Theta}_p+\eta_3k^4\lambda^3(\operatorname{am}u)\overset{2}{\Theta}_p+\cdots\}$.

Der an der Spitze der drei Reihen stehende cyclische Arcus ist

$$\varphi = \arcsin\left[\frac{\operatorname{dnc}'a\operatorname{sn}u\operatorname{cn}u}{\operatorname{tnc}'a(\operatorname{dn}u+k'\operatorname{snc}'a)\sqrt{(1+k^2\operatorname{tn}'^2a\operatorname{sn}^2u)}}\right],$$

$$= \arccos\left[\frac{k'\operatorname{snc}'a(1+k^2\operatorname{tn}'^2a\operatorname{sn}^2u)+\operatorname{dn}u}{(\operatorname{dn}u+k'\operatorname{snc}'a)\sqrt{(1+k^2\operatorname{tn}'^2a\operatorname{sn}^2u)}}\right],$$

$$= \operatorname{arc\,tang}\left[\frac{\operatorname{dnc}'a}{\operatorname{tnc}'a}\cdot\frac{\operatorname{sn}u\operatorname{cn}u}{k'\operatorname{snc}'a(1+k^2\operatorname{tn}'^2a\operatorname{sn}^2u)+\operatorname{dn}u}\right],$$

$$= \operatorname{arc\,tang}(k'\operatorname{sn}'a\operatorname{tn}u)-\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{sn}'a}{\operatorname{snc}'a}\cdot\frac{\operatorname{sn}u}{\operatorname{snc}u}\right).$$

Aus den mitgetheilten Reihen lassen sich andere herleiten, welche nach Functionen von $\lambda^r \operatorname{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right)$ oder $\lambda^r(\frac{1}{2}\pi - \operatorname{amc} u)$ fortschreiten. Da ihre Herleitung sehr einfach ist, so überlassen wir sie füglich dem kundigen Leser.

Benutzen kann man auch zur Vermehrung der Convergenz der Reihen bei den Integralen vierter Classe die Formeln

$$'\mathfrak{D}(u, a) = {}'\mathfrak{C}(K-u, K-a) - {}'\mathfrak{C}(K, K-a),$$
$$'\mathfrak{C}(u, a) = {}'\mathfrak{D}(K-u, K-a) - {}'\mathfrak{D}(K, K-a);$$

bei den Integralen dritter Classe die Formeln

$$'S(u, a) = C(K, K'-a) - C(K-u, K'-a),$$
$$'C(u, a) = D(K, K'-a) - D(K-u, K'-a);$$

bei den Integralen zweiter Classe die Formeln

$$\mathfrak{S}(u, a) = \mathfrak{C}(K, K-a) - \mathfrak{C}(K-u, K-a),$$
$$\mathfrak{C}(u, a) = \mathfrak{S}(K, K-a) - \mathfrak{S}(K-u, K-a);$$

und bei denen erster Classe die Formeln

$$C(u, a) = {}'S(K, K'-a) - {}'S(K-u, K'-a),$$
$$D(u, a) = {}'C(K, K'-a) - {}'C(K-u, K'-a).$$

Münster, im September 1850.

11.

Einige Reihensummirungen, vermittelt durch die bestimmten Integrale $\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx.dx$ und $\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx.dx$.

(Von dem Herrn Dr. *Dienger* zu Sinsheim bei Heidelberg.)

---

§. 1.

Bekanntlich ist für $a > 0$ und für ein reelles b:

$$(1.)\quad \begin{cases} \int_0^\infty e^{-ax}\cos bx.dx = \dfrac{a}{a^2+b^2}, \\ \int_0^\infty e^{-ax}\sin bx.dx = \dfrac{b}{a^2+b^2}. \end{cases}$$

Desgleichen ist:

$$(2.)\quad \begin{cases} \sin\tfrac{1}{2}x\,[\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\dots+\sin nx] = \sin\tfrac{1}{2}(n+1)x.\sin\tfrac{1}{2}nx, \\ \sin\tfrac{1}{2}x\,[\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\dots+\cos nx] = \cos\tfrac{1}{2}(n+1)x.\sin\tfrac{1}{2}nx. \end{cases}$$

Nun ist

$$(3.)\quad \begin{cases} \int_0^\infty e^{-ax}\sin rx.\sin mx.\partial x \\ = \tfrac{1}{2}\left[\int_0^\infty e^{-ax}\cos(m-r)x.\partial x - \int_0^\infty e^{-ax}\cos(m+r)x.dx\right] \\ = \tfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{a^2+(m-r)^2} - \dfrac{a}{a^2+(m+r)^2}\right) = \dfrac{2amr}{[a^2+(m-r)^2][a^2+(m+r)^2]}; \\ \int_0^\infty e^{-ax}\sin mx.\cos rx.dx \\ = \tfrac{1}{2}\left[\int_0^\infty e^{-ax}\sin(m+r)x.\partial x - \int_0^\infty e^{-ax}\sin(r-m)x.\partial x\right] \\ = \tfrac{1}{2}\left[\dfrac{m+r}{a^2+(m+r)^2} - \dfrac{r-m}{a^2+(m-r)^2}\right] = \dfrac{m(a^2+m^2-r^2)}{[a^2+(m+r)^2][a^2+(m-r)^2]}. \end{cases}$$

Multiplicirt man die erste Gleichung (2.) mit e^{-ax} und integrirt von 0 bis ∞, so erhält man, zufolge der Formeln (3.), nach einigen leichten Reductionen:

$$(4.)\quad \frac{1}{[4a^2+1^2][4a^2+3^2]} + \frac{2}{(4a^2+3^2)(4a^2+5^2)} + \frac{3}{(4a^2+5^2)(4a^2+7^2)} + \dots$$
$$\dots + \frac{n}{[4a^2+(2n-1)^2][4a^2+(2n+1)^2]} = \frac{\tfrac{1}{2}(n+1)n}{[4a^2+1][4a^2+(2n+1)^2]}.$$

Eine solche Gleichung drückt aber bekanntlich nichts weiter als eine Iden-

tität aus; sie wird demnach durch *jeden* Werth von a erfüllt: vorausgesetzt, dafs dadurch nicht irgend einer der Nenner sich auf 0 reducire. Setzt man also ai statt a in die Gleichung (4.), so mufs sie ebenfalls noch bestehen. Dies giebt

$$(5.)\quad \frac{1}{(4a^2-1^2)(4a^2-3^2)}+\frac{2}{(4a^2-3^2)(4a^2-5^2)}+\frac{3}{(4a^2-5^2)(4a^2-7^2)}+\cdots$$
$$\cdots+\frac{n}{[4a^2-(2n-1)^2][4a^2-(2n+1)^2]}=\frac{\frac{1}{2}(n+1)n}{(4a^2-1)(4a^2-(2n+1)^2)}.$$

Desgleichen folgt für $a=0$:

$$(6.)\quad \frac{1}{1^2.3^2}+\frac{2}{3^2.5^2}+\cdots+\frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}=\frac{\frac{1}{2}(n+1)n}{(2n+1)^2}.$$

Für $a=1$ zieht man aus (5.):

$$(7.)\quad \frac{2}{1.3.5.7}+\frac{3}{3.5.7.9}+\frac{4}{5.7.9.11}+\cdots+\frac{n}{(2r-3)(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$$
$$=\frac{1}{18}-\frac{(n+1)n}{6(2n-1)(2n+1)}.$$

Läfst man in den Formeln (4. und 5.) n gröfser und gröfser werden, so ergiebt sich:

$$(8.)\quad \frac{1}{(4a^2+1)(4a^2+3^2)}+\frac{2}{(4a^2+3^2)(4a^2+5^2)}+\frac{3}{(4a^2+5^2)(4a^2+7^2)}+\cdots$$
$$\ldots \text{ in inf.} = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4a^2+1},$$

$$(9.)\quad \frac{1}{(4a^2-1)(4a^2-3^2)}+\frac{2}{(4a^2-3^2)(4a^2-5^2)}+\frac{3}{(4a^2-5^2)(4a^2-7^2)}+\cdots$$
$$\ldots \text{ in inf.} = -\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4a^2-1}.$$

Für $a=0$ folgt aus (8.):

$$(10.)\quad \frac{1}{1^2.3^2}+\frac{2}{3^2.5^2}+\frac{3}{5^2.7^2}+\cdots \text{ in inf.} = \frac{1}{8}.$$

Für $a=1$ folgt aus (9.):

$$(11.)\quad \frac{2}{1.3.5.7}+\frac{3}{3.5.7.9}+\frac{4}{5.7.9.11}+\cdots \text{ in inf.} = \frac{1}{48}.$$

Desgleichen erhält man aus (9.) für $a=\frac{1}{2}$:

$$(12.)\quad \frac{1}{1.3.5.7}+\frac{2}{5.7.9.11}+\frac{3}{9.11.13.15}+\cdots \text{ in inf.} = \frac{1}{3.2^5}=\frac{1}{96}, \text{ u. s. w.}$$

Verfährt man auf gleiche Weise mit der zweiten Gleichung (2.), so erhält man aus ihr:

$$(13.)\quad \frac{8(a^2-1^2)+2}{(4a^2+1^2)(4a^2+3^2)}+\frac{8(a^2-2^2)+2}{(4a^2+3^2)(4a^2+5^2)}+\frac{8(a^2-3^2)+2}{(4a^2+5^2)(4a^2+7^2)}+\cdots$$
$$\cdots+\frac{8(a^2-n^2)+2}{[4a^2+(2n-1)^2][4a^2+(2n+1)^2]}=\frac{2n(4a^2-2n-1)}{(4a^2+1)(4a^2+(2n+1)^2)}.$$

Hieraus folgt, wenn man ai statt a setzt:

$$(14.)\quad \frac{8(a^2+1^2)-2}{(4a^2-1^2)(4a^2-3^2)}+\frac{8(a^2+2^2)-2}{(4a^2-3^2)(4a^2-5^2)}+\cdots$$
$$\cdots+\frac{8(a^2+n^2)-2}{[4a^2-(2n-1)^2][4a^2-(2n+1)^2]}=\frac{2n(4a^2+2n+1)}{(4a^2-1)[4a^2-(2n+1)^2]}.$$

Läfst man n bis ins Unendliche zunehmen, so erhält man aus den beiden letzten Formeln

$$(15.)\quad \begin{cases} \dfrac{8(a^2-1^2)+2}{(4a^2+1^2)(4a^2+3^2)}+\dfrac{8(a^2-2^2)+2}{(4a^2+3^2)(4a^2+5^2)}+\dfrac{8(a^2-3^2)+2}{(4a^2+5^2)(4a^2+7^2)}+\cdots \text{in inf.} \\ \qquad = -\dfrac{1}{4a^2+1}. \\ \dfrac{8(a^2+1^2)-2}{(4a^2-1^2)(4a^2-3^2)}+\dfrac{8(a^2+2^2)-2}{(4a^2-3^2)(4a^2-5^2)}+\dfrac{8(a^2+3^2)-2}{(4a^2-5^2)(4a^2-7^2)}+\cdots \text{in inf.} \\ \qquad = \dfrac{1}{4a^2-1}. \end{cases}$$

Es lassen sich specielle Reihen aus diesen letztern ziehen; was ähnliche interessante Resultate wie oben giebt.

§. 2.

Allgemeiner als in (§. 1.) ist

$$\sin rx[\sin x+\sin(2r+1)x+\sin(4r+1)x+\cdots+\sin(2nr+1)x]$$
$$=\sin(nr+1)x.\sin(n+1)rx,$$
$$\sin rx[\cos x+\cos(2r+1)x+\cos(4r+1)x+\cdots+\cos(2nr+1)x]$$
$$=\cos(nr+1)x.\sin(n+1)rx.$$

Behandelt man diese Formeln, in welchen r irgend eine (reelle oder imaginäre) Gröfse sein kann, wie die analogen in (§. 1.) und setzt speciell r als reell voraus, so erhält man:

$$(1.)\quad \frac{1}{[a^2+(r-1)^2][a^2+(r+1)^2]}+\frac{2r+1}{[a^2+(r+1)^2][a^2+(3r+1)^2]}+\frac{4r+1}{[a^2+(3r+1)^2][a^2+(5r+1)^2]}$$
$$+\cdots+\frac{2nr+1}{[a^2+(2nr-r+1)^2][a^2+(2nr+r+1)^2]}=\frac{(nr+1)(n+1)}{[a^2+(r-1)^2][a^2+(2nr+r+1)^2]},$$

$$(2.)\quad \frac{a^2+r^2-1^2}{[a^2+(r-1)^2][a^2+(r+1)^2]}+\frac{a^2+r^2-(2r+1)^2}{[a^2+(r+1)^2][a^2+(3r+1)^2]}+\frac{a^2+r^2-(4r+1)^2}{[a^2+(3r+1)^2][a^2+(5r+1)^2]}$$
$$+\cdots+\frac{a^2+r^2-(2nr+1)^2}{[a^2+(2nr-r+1)^2][a^2+(2nr+r+1)^2]}=\frac{[a^2+(n+1)^2r^2-(nr+1)^2](n+1)}{[a^2+(r-1)^2][a^2+(2nr+r+1)^2]}.$$

Setzt man hier wieder ai statt a, so ergiebt sich

$$(3.)\quad \frac{1}{[a^2-(r-1)^2][a^2-(r+1)^2]}+\frac{2r+1}{[a^2-(r+1)^2][a^2-(3r+1)^2]}+\cdots$$
$$\cdots+\frac{2nr+1}{[a^2-(2nr-r+1)^2][a^2-(2nr+r+1)^2]}=\frac{(nr+1)(n+1)}{[a^2-(r-1)^2][a^2-(2nr+r+1)^2]},$$

$$(4.)\quad \frac{a^2+1^2-r^2}{[a^2-(r-1)^2][a^2-(r+1)^2]}+\frac{a^2+(2r+1)^2-r^2}{[a^2-(r+1)^2][a^2-(3r+1)^2]}+\cdots$$
$$\cdots+\frac{a^2+(2nr+1)^2-r^2}{[a^2-(2nr-r+1)^2][a^2-(2nr+r+1)^2]}=\frac{(a^2+(nr+1)^2-(n+1)^2r^2)(n+1)}{[a^2-(r-1)^2][a^2-(2nr+r+1)^2]}.$$

Läfst man n unendlich grofs werden, so folgt hieraus:

$$(5.)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{[a^2+(r-1)^2][a^2+(r+1)^2]}+\dfrac{2r+1}{[a^2+(r+1)^2][a^2+(3r+1)^2]}+\cdots+\text{in inf.} \\ \qquad =\dfrac{1}{4r[a^2+(r-1)^2]}, \\ \dfrac{1}{[a^2-(r-1)^2][a^2-(r+1)^2]}+\dfrac{2r+1}{[a^2-(r+1)^2][a^2-(3r+1)^2]}+\cdots+\text{in inf.} \\ \qquad =-\dfrac{1}{4r[a^2-(r-1)^2]}, \\ \dfrac{a^2+r^2-1^2}{[a^2+(r-1)^2][a^2+(r+1)^2]}+\dfrac{a^2+r^2-(2r+1)^2}{[a^2+(r+1)^2][a^2+(3r+1)^2]}+\cdots+\text{in inf.} \\ \qquad =\dfrac{r-1}{2r[a^2+(r-1)^2]}, \\ \dfrac{a^2+1^2-r^2}{[a^2-(r-1)^2][a^2-(r+1)^2]}+\dfrac{a^2+(2r+1)^2-r^2}{[a^2-(r+1)^2][a^2-(3r+1)^2]}+\cdots+\text{in inf.} \\ \qquad =-\dfrac{r-1}{2r(a^2-(r-1)^2)}. \end{cases}$$

Setzt man in diesen Formeln $r=\frac{1}{2}$, so erhält man die Formeln von (§. 1.). Specielle Formeln, als Beispiele, sind folgende:

$$(6.)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{a^2(a^2+2^2)}+\dfrac{3}{(a^2+2^2)(a^2+4^2)}+\dfrac{5}{(a^2+4^2)(a^2+6^2)}+\cdots+\text{in inf.}=+\dfrac{1}{4a^2}, \\ \dfrac{1}{a^2(a^2-2^2)}+\dfrac{3}{(a^2-2^2)(a^2-4^2)}+\dfrac{5}{(a^2-4^2)(a^2-6^2)}+\cdots+\text{in inf.}=-\dfrac{1}{4a^2}, \\ \dfrac{a^2-2.4}{(a^2+2^2)(a^2+4^2)}+\dfrac{a^2-4.6}{(a^2+4^2)(a^2+6^2)}+\dfrac{a^2-6.8}{(a^2+6^2)(a^2+8^2)}+\cdots+\text{in inf.}=-\dfrac{1}{a^2+4}, \\ \dfrac{a^2+2.4}{(a^2-2^2)(a^2-4^2)}+\dfrac{a^2+4.6}{(a^2-4^2)(a^2-6^2)}+\dfrac{a^2+6.8}{(a^2-6^2)(a^2-8^2)}+\cdots+\text{in inf.}=-\dfrac{1}{a^2-4}. \end{cases}$$

Auch weitere Ableitungen ergeben sich aus den allgemeinen Formeln leicht.

Sinsheim, im Januar 1847.

12.

Tabelle der reducirten positiven ternären quadratischen Formen, nebst den Resultaten neuer Forschungen über diese Formen, in besonderer Rücksicht auf ihre tabellarische Berechnung.

(Von Herrn Dr. G. *Eisenstein*, Docent an der Universität zu Berlin.)

Erste Abtheilung.

Resultate neuer Forschungen über die reducirten positiven ternären Formen, in besonderer Rücksicht auf die Berechnung und Controlirung der Tabelle dieser Formen.

§. 1.

Entstehung und Einrichtung der Tabelle.

Nachdem mir durch wiederholte Anstrengungen die Lösung zweier Haupt-Aufgaben über ternäre positive quadratische Formen gelungen war, und ich hierdurch eine doppelte Reihe von neuen Sätzen über diese Formen gewonnen hatte, erschien es mir wünschenswerth, sowohl zur numerischen Prüfung dieser Sätze, als auch zu Gunsten neuer Forschungen, eine Tabelle der reducirten ternären Formen von gröfserem Umfange und gröfserer Mannigfaltigkeit zu besitzen, als die, welche *Seeber* am Schlusse seines diesen Gegenstand betreffenden Werkes construirt hat; denn die letztere erstreckt sich, trotz ihres scheinbar bedeutenden Umfanges, wenn man sich der von *Gaufs* eingeführten Nomenclatur bedient, wie hier stets geschehen wird, und wenn man allein auf die hauptsächlich wichtigen *eigentlich primitiven* Formen Rücksicht nimmt, nur bis zur Determinante —25. Dies genügte schon nicht für meinen nächsten Zweck, da die erwähnten Sätze eine sehr mannigfaltige Gestalt annehmen, je nachdem die Determinante durch eine oder mehrere Primzahlen theilbar ist, quadratische Theiler enthält oder nicht, ungerade oder gerade ist, und im letzteren Falle durch niedere oder hohe Potenzen von 2 aufgeht u. s. w. Der Erfüllung meines Wunsches stand indessen die grofse Länge und Complication der zu unternehmenden Rechnung entgegen, und ich hätte, hierdurch abgeschreckt und ohnedies mit andern rein theoretischen Forschungen beschäftigt,

meine Absicht, die *Seeber*'sche Tabelle wenigstens bis zur Determinante —100 fortzusetzen, aufgeben müssen, wäre es mir nicht durch die theilnehmende und wohlwollende Unterstützung der Akademie der Wiss. zu Berlin möglich gemacht worden, mir die nöthigen Rechenkräfte zu verschaffen, mit deren Hülfe ich im Stande war, diese Arbeit, ohne gänzliche Vernachlässigung meiner übrigen mathematischen Untersuchungen, zu Ende zu führen.

Die in der zweiten Abtheilung folgende Tabelle, welche ich, zum Unterschiede einiger hier im Texte selbst vorkommenden Tafeln, die gröfsere Tabelle nennen will, enthält die von *Seeber* definirten reducirten Formen nach ihren Determinanten $-D$, von —1 bis —100, und nach der Gröfse ihrer Coëfficienten geordnet; und zwar constituiren dieselben für jede Determinante, nach dem von *Seeber* aufgestellten Satze, dessen Beweis neuerdings von *Dirichlet* *) ungemein vereinfacht worden ist, ein vollständiges System nichtäquivalenter, und die zur Determinante gehörenden Classen repräsentirender Formen. Die äufsere Einrichtung der Tabelle ist so einfach, dafs sie kaum einer besonderen Auseinandersetzung bedarf; in der ersten Vertical-Columne befinden sich die Werthe von D, dahinter die Anzahl der zugehörigen Formen; sodann folgen die Formen selbst, und es bedeutet $\begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{pmatrix}$ jedesmal die Form $ax^2+a'y^2+a''z^2+2byz+2b'xz+2b''xy$. In die Tabelle sind nur die ***primitiven*** Formen aufgenommen, für welche a, a', a'', b, b', b'' keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, da die nicht primitiven, nach Wegnahme des gröfsten gemeinschaftlichen Theilers, sich schon bei früheren Determinanten vorfinden und unnöthiger Weise den Umfang der Tabelle vergröfsern würden, ohne wirklichen Nutzen zu gewähren. Ferner habe ich die Tabelle in zwei Theile getheilt; der erste enthält die ***eigentlich primitiven*** Formen, für welche auch $a, a', a'', 2b, 2b', 2b''$ keinen gemeinschaftlichen Theiler darbieten, der zweite die ***uneigentlich primitiven***, für welche a, a', a'' alle drei ***gerade*** Zahlen sind. Unter jeder einzelnen Form befindet sich der Werth von δ, welcher die der Form zugehörige Transformations-Anzahl angiebt, von welcher bald die Rede sein wird.

Diese gröfsere Tabelle ist auf doppelte Weise, nach zwei ganz verschiedenen Methoden, theils unter meiner Leitung, theils von mir selbst berechnet und sodann einer dreifachen Controle unterworfen worden, so dafs ich glaube mich für ihre Richtigkeit verbürgen zu können. Übrigens wird man aus

---

*) Gegenw. Journal Band 40 Seite 209 ff.

Nachstehendem ersehen, wie jeder etwa vorkommende Fehler aus dem blofsen Anblick der Formen beim Gebrauche sogleich erkannt werden kann. Die Methoden haben sich im Laufe der Rechnung selbst dergestalt vereinfacht, dafs ich glaube, es werde nicht meine Kräfte übersteigen, die Tabelle später in Mufsestunden mit einiger Unterstützung weiter fortzuführen.

§. 2.

Erste Methode der Berechnung.

Die erste Methode ist die sich zunächst darbietende, von *Seeber* vorgeschriebene, in vielen Stücken bedeutend vereinfacht, nach welcher für jede einzelne Determinante von —1 bis —100 diejenigen Formen ermittelt wurden, welche den characteristischen Ungleichheitsbedingungen der reducirten Formen Genüge leisten. Es würde überflüssig sein, in näheres Detail einzugehen, zumal da diese Methode, als zu complicirt, sich für die tabellarische Fortführung unbrauchbar erweist und nur für die Untersuchung einzelner Determinanten Werth behalten wird. Ich hebe daher, mit Übergehung des schon von *Seeber* Bemerkten, nur einige wesentliche Verbesserungen hervor. Es ergab sich namentlich eine unerwartete Vereinfachung des Begriffs der reducirten Formen selbst, indem diejenigen Ungleichheitsbedingungen, welche bei *Seeber* auf den zweiten Grad steigen, auf lineare zurückgeführt werden können; man hat hierdurch den grofsen Vortheil, der mühsamen Bildung der bei *Seeber* in vielen Fällen nothwendigen *zugeordneten* Formen überhoben zu sein, und kann aus dem blofsen Anblick der Coëfficienten einer Form unmittelbar beurtheilen, ob sie reducirt ist, oder nicht. Mit dieser Vereinfachung stellt sich die Definition der reducirten Formen in folgender Weise, wobei sich von selbst versteht, dafs a, a', a'' immer positive Werthe haben müssen:

Es giebt zwei Arten von reducirten Formen:

I. Formen wie $\begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ +b, & +b', & +b'' \end{pmatrix}$, in denen b, b', b'' alle drei *positiv* sind.

Hauptbedingungen:

$$a \leqq a' \leqq a'';$$

$$2b \leqq a', \quad 2b' \leqq a, \quad 2b'' \leqq a.$$

Nebenbedingungen:

Wenn $a = a'$, so mufs $b \leqq b'$, wenn $a' = a''$, so mufs $b' \leqq b''$ sein,

wenn $2b = a'$, so mufs $b'' \leqq 2b'$ sein,

- $2b' = a$, - - $b'' \leqq 2b$ -

- $2b'' = a$, - - $b' \leqq 2b$ -

II. Formen wie $\begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ -b, & -b', & -b'' \end{pmatrix}$, in denen b, b', b'' Null oder positiv sind.

Hauptbedingungen:

$$a \leqq a' \leqq a'';$$

$$2b \leqq a', \quad 2b' \leqq a, \quad 2b'' \leqq a; \quad 2(b+b'+b'') \leqq a+a'.$$

Nebenbedingungen:

Wenn $a = a'$, so mufs $b \leqq b'$, wenn $a' = a''$, mufs $b' \leqq b''$ sein;

wenn $2b = a'$, so mufs $b'' = 0$ sein, Typus $\begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ -\frac{1}{2}a', & -b', & 0 \end{pmatrix}$,

- $2b' = a$, - - $b'' = 0$ -, Typus $\begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ -b, & -\frac{1}{2}a, & 0 \end{pmatrix}$,

- $2b'' = a$, - - $b' = 0$ -, Typus $\begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ -b, & 0, & -\frac{1}{2}a \end{pmatrix}$;

wenn endlich $2(b+b'+b'') = a+a'$ ist, so mufs $a \leqq 2b'+b''$, d. h. $b'' \geqq (a-2b')$ sein. Diese Bedingungen, deren Umfang mit dem der *Seeber*schen, wie streng nachgewiesen werden kann, vollkommen übereinstimmt *), sind offenbar von solcher Art, dafs die Frage nach ihrem Stattfinden bei jeder vorliegenden Form nach bloſser aufmerksamer Ansicht derselben ohne weitere Rechnung unmittelbar mit Ja oder Nein beantwortet werden kann.

Eine fernere Vereinfachung besteht darin, dafs man für die kleinsten Werthe des ersten Coëfficienten a die sämmtlichen zu einer gegebenen Determinante $-D$ gehörigen reducirten Formen mit einem solchen ersten Coëfficienten *a priori* angeben kann. In der That sind alle reducirten Formen, für welche $a = 1$ ist, in dem Schema $\begin{pmatrix} 1, & \mathfrak{A}, & \mathfrak{C} \\ -\mathfrak{B}, & 0, & 0 \end{pmatrix}$ enthalten, wo für $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ nach und nach alle reducirten *binären* positiven Formen **) mit der Determinante $-D$ und nicht negativem mittleren Coëfficienten $\mathfrak{B}$ gesetzt werden müssen; z. B. für $D = 7$ sind diese Formen (1, 0, 7) und (2, 1, 4), aus denen sich die ternären Formen $\begin{pmatrix} 1, & 1, & 7 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1, & 2, & 4 \\ -1, & 0, & 0 \end{pmatrix}$ ableiten lassen. — Für $a = 2$ hat man die vier Arten von ternären Formen

$$\begin{pmatrix} 2, & \frac{1}{2}(\mathfrak{A}+1), & \frac{1}{2}\mathfrak{C} \\ -\frac{1}{2}\mathfrak{B}, & 0, & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2, & \frac{1}{2}\mathfrak{A}, & \frac{1}{2}(\mathfrak{C}+1) \\ -\frac{1}{2}\mathfrak{B}, & -1, & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2, & \frac{1}{2}(\mathfrak{A}+1), & \frac{1}{2}(\mathfrak{C}+1) \\ \frac{1}{2}(\mathfrak{B}+1), & 1, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2, & \frac{1}{2}\mathfrak{A}, & \frac{1}{2}\mathfrak{C} \\ -\frac{1}{2}\mathfrak{B}, & 0, & 0 \end{pmatrix},$$

in welchen $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ alle binären reducirten positiven Formen mit der Determinante $-2D$ bedeuten, deren erster Coëfficient $\mathfrak{A} > 2$ ist (so dafs $\mathfrak{A} = 1, 2$

*) so dafs die *Seeber*schen eine Folge der hier gegebenen sind; und umgekehrt.
**) d. h. diejenigen, in denen $2\mathfrak{B} \leqq \mathfrak{A}$, $\mathfrak{C} \leqq \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ positiv sind.

auszuschliefsen und erst mit $\mathfrak{A} = 3$ anzufangen ist), und deren mittlerer Coëfficient $\mathfrak{B}$ nicht negativ ist; und zwar ist derjenige Typus ternärer Formen zu wählen, dessen Coëfficienten ganze Werthe erhalten, indem jeder binären Form $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ eine ternäre entspricht, und diese ist die erste der vier obigen, wenn $\mathfrak{A}$ ungerade, $\mathfrak{B}$ gerade, $\mathfrak{C}$ gerade, die zweite, wenn $\mathfrak{A}$ gerade, $\mathfrak{B}$ gerade, $\mathfrak{C}$ ungerade, die dritte, wenn $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ alle drei ungerade, die vierte, wenn $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ alle drei gerade sind; im letzteren Falle, welcher nur Statt findet, wenn D gerade ist, stellt $(\frac{1}{2}\mathfrak{A}, \frac{1}{2}\mathfrak{B}, \frac{1}{2}\mathfrak{C})$ alle reducirten Formen mit der Determinante $-\frac{1}{2}D$ vor, und es mufs in diesem Falle noch für $\mathfrak{A} = 4$ der Werth $\mathfrak{B} = 2$ ausgeschlossen und nur der Werth $\mathfrak{B} = 0$ beibehalten werden, denn die binäre Form $(4, 2, \mathfrak{C})$, in welcher $\mathfrak{C}$ gerade ist, würde die ternäre $\begin{pmatrix}2, & 2, & \frac{1}{2}\mathfrak{C}\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}$ ergeben, welche *nicht* reducirt ist, weil $a = a' = 2$, aber nicht $b \leqq b'$; übrigens ist dies neben der Beschränkung $\mathfrak{A} > 2$ der einzige für $a = 2$ Statt findende Ausnahmefall. Um also alle ternären Formen mit $a = 2$ für die Determinante $-D$ zu erhalten, schreibe man in erster Zeile sämmtliche reducirten binären Formen $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ mit der Determinante $-2D$ und nicht negativem $\mathfrak{B}$; mit Übergehung derjenigen, in welchen $\mathfrak{A} = 1$, oder $\mathfrak{A} = 2$, und, wenn es Statt finden sollte, auch derjenigen, in welcher gleichzeitig $\mathfrak{A} = 4$, $\mathfrak{B} = 2$ und $\mathfrak{C}$ gerade ist, schreibe man unter die übrigen in zweiter Zeile neue binäre Formen (a', b, a''), welche aus jenen hervorgehen, wenn man von jedem Coëfficienten die Hälfte, oder, sollte er ungerade sein, die Hälfte der folgenden um 1 gröfseren Zahl nimmt; die noch fehlenden Coëfficienten b' und b'' so wie das Vorzeichen von b werden aus dem Rest von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ (mod. 2) entsprechend den vier obigen Typen erkannt.

Beispiel $D = 42$:

Red. bin. F. det. -84:	$(1, 0, 84)$,	$(2, 0, 42)$,	$(3, 0, 28)$,	$(4, 0, 21)$,	$(4, 2, 22)$
$(a', b, a'') =$:	*	*	$(2, 0, 14)$,	$(2, 0, 11)$,	*
$b'\ b'' =$:			$0, -1$	$-1, 0$	

Red. bin. F. det. -84:	$(5, 1, 17)$,	$(6, 0, 14)$,	$(7, 0, 12)$,	$(8, 2, 11)$,	$(10, 4, 10)$
$(a', b, a'') =$:	$(3, 1, 9)$,	$(3, 0, 7)$,	$(4, 0, 6)$,	$(4, -1, 6)$,	$(5, -2, 5)$
$b', b'' =$:	$1, 1$	$0, 0$	$0, -1$	$-1, 0$	$0, 0$

Hieraus entspringen die folgenden ternären Formen determinantis -42:

$$\begin{pmatrix}2, & 2, & 14\\ 0, & 0, & -1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}2, & 2, & 11\\ 0, & -1, & 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}2, & 3, & 9\\ 1, & 1, & 1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}2, & 3, & 7\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2, & 4, & 6\\ 0, & 0, & -1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}2, & 4, & 6\\ -1, & -1, & 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}2, & 5, & 5\\ -2, & 0, & 0\end{pmatrix},$$

und diese sind die einzigen, deren erster Coëfficient $a = 2$ ist. — Für $a = 3$

sind die fünf folgenden Arten von Formen erschöpfend:

$$\begin{pmatrix} 3, & \frac{1}{3}(\mathfrak{A}+1), & \frac{1}{3}\mathfrak{C} \\ -\frac{1}{3}\mathfrak{B}, & 0, & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3, & \frac{1}{3}\mathfrak{A}, & \frac{1}{3}(\mathfrak{C}+1) \\ -\frac{1}{3}\mathfrak{B}, & -1, & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3, & \frac{1}{3}(\mathfrak{A}+1), & \frac{1}{3}(\mathfrak{C}+1) \\ \frac{1}{3}(\mathfrak{B}+1), & 1, & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3, & \frac{1}{3}(\mathfrak{A}+1), & \frac{1}{3}(\mathfrak{C}+1) \\ -\frac{1}{3}(\mathfrak{B}-1), & -1, & -1 \end{pmatrix},$$

und die nur für $D \equiv 0 \pmod 3$ Statt findenden $\begin{pmatrix} 3, & \frac{1}{3}\mathfrak{A}, & \frac{1}{3}\mathfrak{C} \\ -\frac{1}{3}\mathfrak{B}, & 0, & 0 \end{pmatrix}$. Hier bedeutet $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ alle reducirten positiven binären Formen mit der Determinante $-3D$, in denen $\mathfrak{B}$ nicht negativ und $\mathfrak{A} > 7$, d. h. mindestens $= 8$ ist; jeder derselben entspricht eine ternäre, deren Art sich aus dem Verhalten von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C} \pmod 3$ bestimmt. Ausnahmefälle: für die erste Art ist die Combination $\mathfrak{A} = 8$, $\mathfrak{B} = 3$, für die fünfte Art die Combination $\mathfrak{A} = 9$, $\mathfrak{B} = 3$ zu verwerfen; diejenigen Formen $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$, in denen $\mathfrak{A}$, oder $\mathfrak{C}$, oder beide $\equiv 1 \pmod 3$, sind, wie man sieht, ganz zu verwerfen. Diese Regeln sind vollkommen streng und mit Berücksichtigung aller Haupt- und Nebenfälle aus den Grundbedingungen der reducirten Formen abgeleitet worden. Da die Tabelle, soweit sie von *Seeber* berechnet worden ist, nämlich bis zur Determinante -25, keine einzige Form enthält, deren erster Coëfficient $a > 3$ ist, so kann dieser Theil derselben schon nach den eben gegebenen Vorschriften allein mit grofser Leichtigkeit construirt werden. Für gröfsere Werthe von a möchte das gewöhnliche Verfahren vorzuziehen sein; der Werth $a = 4$ kommt unter den eigentlich primitiven Formen zum ersten Male bei der Determinante -44, unter den uneigentlich primitiven bei der Determinante -36 vor.

Endlich ist zur Bestimmung oberer Grenzen für die Coëfficienten a, a' a'' der von *Seeber* durch Induction aus seiner Tabelle gefundene, durch *Gaufs* zuerst bewiesene Satz benutzt worden, dafs immer $aa'a'' \leqq 2D$ ist. Hieraus folgt $a \leqq \sqrt[3]{(2D)}$, $a' \leqq \sqrt{\left(\frac{2D}{a}\right)}$ und $a'' \leqq \frac{2D}{aa'}$. Bis zur Determinante -13 reicht man demnach mit $a = 1$ und $a = 2$ aus; von $D = 14$ bis $D = 31$ mufs aufserdem $a = 3$ versucht werden; von $D = 32$ bis 62 kommt noch $a = 4$, von 63 bis 107 noch $a = 5$ hinzu. Gröfsere Werthe, als $a = 5$ können also nicht in der Tabelle angetroffen werden.

§. 3.

Zweite Methode der Berechnung.

Bei der zweiten Methode zur Berechnung der gröfseren Tabelle wurden, *ohne Rücksicht auf specielle Werthe der Determinante*, überhaupt

alle Combinationen der sechs Coëfficienten aufgestellt, welche den obigen characteristischen Ungleichheiten Genüge leisten; für jede dieser Combinationen wurde der Werth von

$$D = aa'a'' + 2bb'b'' - ab^2 - a'b'^2 - a''b''^2$$

berechnet; diejenigen Combinationen, für welche sich $D > 100$ ergab, wurden verworfen, die übrigen am passenden Orte in der Tabelle eingetragen. Bei der wirklichen Aufstellung gewährte der Umstand wesentliche Erleichterung, dafs die Werthe der Determinante eine *arithmetische Progression* bilden, wenn einer der drei obern Coëfficienten a, a' oder a'' bei unveränderten Werthen der übrigen fünf Coëfficienten die natürliche Zahlenreihe durchläuft; in der That kann man der Gröfse D die folgenden drei linearen Formen geben:

$$D = 2bb'b'' - a'b'^2 - a''b''^2 + a(a'a'' - b^2) = K + aL,$$
$$D = 2bb'b'' - ab^2 - a''b''^2 + a'(aa'' - b'^2) = K' + a'L',$$
$$D = 2bb'b'' - ab^2 - a'b'^2 + a''(aa' - b''^2) = K'' + a''L'',$$

in denen K und L nicht von a; K', L' nicht von a', endlich K'', L'' nicht von a'' abhangen; namentlich ist $aa' - b''^2$ die Differenz der arithmetischen Reihe, welche die Determinanten für ein wachsendes a'' bilden. Als am meisten practisch erwies sich folgende Einrichtung. Den Werthen $a = 1, 2, 3, 4, 5$ wurden nach und nach alle den Bedingungen $a \leqq a' \leqq \sqrt{\left(\frac{200}{a}\right)}$ genügenden Werthe von a' zugesellt, so dafs die folgenden 35 Combinationen für a, a' innerhalb der Grenzen der Tabelle zu betrachten waren:

1, 1; 1, 2; 1, 3; 1, 4; 1, 5; 1, 6; 1, 7; 1, 8; 1, 9; 1, 10; 1, 11; 1, 12;
1, 13; 1, 14; 2, 2; 2, 3; 2, 4; 2, 5; 2, 6; 2, 7; 2, 8; 2, 9; 2, 10;
3, 3; 3, 4; 3, 5; 3, 6; 3, 7; 3, 8; 4, 4; 4, 5; 4, 6; 4, 7; 5, 5; 5, 6.

Jeder dieser 35 Combinationen entspricht ein besonderer Theil der Arbeit, der seinerseits aus der Bildung mehrerer Zeilen besteht, die den für die geltende Combination a, a' möglichen Werthen von b, b', b'' entsprechen; letztere sind 1) alle positiven Combinationen, die den Ungleichheiten $b \leqq \frac{1}{2}a'$, $b' \leqq \frac{1}{2}a$, $b'' \leqq \frac{1}{2}a$ genügen, 2) alle nicht positiven Combinationen $-b$, $-b'$, $-b''$, die diesen und aufserdem der Ungleichheit $b + b' + b'' \leqq \frac{1}{2}(a + a')$ genügen, wenn man in beiden Fällen diejenigen Combinationen verwirft, welche mit den oben angegebenen Nebenbedingungen unverträglich sind. Links am Rande der zur Aufnahme der arithmetischen Reihen bestimmten Zeilen wurden die zusammengehörigen Werthe von b, b', b'' geschrieben; oben über den Zeilen

und gemeinschaftlich für alle die laufenden Werthe von $a'' = a'$, $a'+1$, $a'+2$, $a'+3$, ...; sodann war es nöthig, die Determinante für den kleinsten Werth von a'', nämlich $a'' = a'$, also $2bb'b'' - ab^2 - a'b'^2 + a'(aa' - b''^2)$, welches die erste Zahl in jeder Zeile ergiebt, und die Differenz der Reihen $aa' - b''^2$ zu bestimmen. Nachdem diese beiden Stücke für jede Zeile berechnet waren, wurden die verschiedenen arithmetischen Reihen in den respectiven Zeilen durch fortgesetzte Addition der gefundenen Differenz so weit gebildet, als es für die Grenzen der Tabelle nöthig war, und dies letztere wurde einfach dadurch erreicht, dafs man vor der ersten, über 100 liegenden Zahl abbrach. Von den in jeder Zeile die erste Stelle einnehmenden Determinanten war noch zu bemerken (da für dieselben $a'' = a'$ ist), dafs diejenigen unter ihnen verworfen werden mufsten, für welche der absolute Werth von b' den von b'' übertrifft; alle übrigen Determinanten entsprachen wirklich reducirten Formen, die aus dem Ort, den die Determinante einnimmt, sogleich zu erkennen sind; mit Übergehung der nicht primitiven Formen wurden die eigentlichen in der ersten Tabelle, die uneigentlichen in der zweiten Tabelle unter ihren Determinanten verzeichnet. Diese Methode ist in gewissem Sinne die umgekehrte der ersten, indem nicht zu den Determinanten die Formen, sondern zu den Formen die Determinanten bestimmt wurden. Zu gröfserer Deutlichkeit lasse ich denjenigen Theil der Rechnung, welcher aus der Combination $a = 4$, $a' = 4$ entspringt, mit abdrucken; hier erhalten die untern Coëfficienten den Werth 1 oder 2, wenn alle drei positiv sind, und die Werthe 0, -1 oder -2, wenn alle drei nicht positiv sind, im letzteren Falle noch mit der Beschränkung, dafs die Summe ihrer absoluten Werthe $\leqq 4$ sein mufs, dafs also der absolute Werth von $\Sigma b = b + b' + b''$ nur die Werthe 0, 1, 2, 3 oder 4 haben darf; da $a = a' = 4$, so müssen noch diejenigen Combinationen verworfen werden, in welchen der absolute Werth von b den von b' übertrifft; wenn endlich einer der drei untern Coëfficienten den Werth ± 2, also genau die Hälfte von a oder a' hat, oder wenn genau $-\Sigma b = \frac{1}{2}(a + a') = 4$ war, so mufsten noch die oben angegebenen, leicht zu erkennenden Nebenbedingungen erfüllt sein; aus letzterem Grunde fielen noch die Combinationen 0, -1, -2; 0, -2, -1; 0, -2, -2; -1, -1, -2; -1, -2, -1 fort, und es blieben die folgenden, zu denen die Differenz der arithmetischen Reihen $16 - b''^2$, also 16, 15 oder 12, je nachdem $b'' = 0$, ± 1 oder ± 2, und ihre Anfangsglieder $64 + 2bb'b'' - 4(b^2 + b'^2 + b''^2)$, berechnet wurden:

$a = 4, \quad a' = 4$

4	4	(4)		$a'' =$					
b	b'	b''	Diff.	4	5	6	7	8	9
1	1	1	15	54	69	84	99		
1	1	2	12	44	56	68	80	92	
1	2	1	15	44*	59	74	89		
1	2	2	12	36	48	60	72	84	96
2	2	1	15	36*	51	66	81	96	
2	2	2	12	32′	44	56′	68	80′	92
0	0	0	16	64′	80	96′			
0	0	−1	15	60	75	90			
0	0	−2	12	48′	60	72′	84	96′	
0	−1	0	16	60*	76	92			
0	−1	−1	15	56	71	86			
0	−2	0	16	48*	64	80′	96		
−1	−1	0	16	56*	72	88			
−1	−1	−1	15	50	65	80	95		
−1	−2	0	16	44*	60	76	92		
−2	−2	0	16	32*	48	64′	80	96′	

Für die mit einem Stern versehenen Determinanten übertrifft der absolute Werth von b' den von b'', während $a' = a''$, für die mit einem Accent versehenen ist die Form nicht primitiv; für alle übrigen sind die entsprechenden Formen einzutragen; so giebt die erste Zeile die Formen $\begin{pmatrix}4, 4, 4\\ 1, 1, 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}4, 4, 5\\ 1, 1, 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}4, 4, 6\\ 1, 1, 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}4, 4, 7\\ 1, 1, 1\end{pmatrix}$ mit den Determinanten resp. -54, -69, -84, -99; die zweite Zeile giebt die Formen $\begin{pmatrix}4, 4, 4\\ 1, 1, 2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}4, 4, 5\\ 1, 1, 2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}4, 4, 6\\ 1, 1, 2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}4, 4, 7\\ 1, 1, 2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}4, 4, 8\\ 1, 1, 2\end{pmatrix}$, mit den Determinanten resp. -44, -56, -68, -80, -92, u. s. w. f. Dieser und eben so jeder der 35 andern Theile der bisherigen Arbeit behält seine Brauchbarkeit, wenn die Grenzen der Tabelle später einmal erweitert werden sollen, man hat dann nur die bereits angefangenen arithmetischen Reihen weiter fortzusetzen; allerdings treten immer neue Combinationen a, a', also immer neue Theile der Arbeit hinzu, aber für die bereits vorhandenen Combinationen ist deshalb keine andere Rechnung als die Fortsetzung der arithmetischen Reihen erforderlich, weil die Werthe von b, b', b'' nicht von der Gröfse der Determinante, und namentlich nicht von der Gröfse des Coëfficienten a'', sondern nur von a und a' abhangen.

Durch verschiedene mechanische Hülfsmittel könnte man die ganze Arbeit noch bedeutend erleichtern: der ermüdenden Operation des wiederholten Schreibens derselben Zahlen könnte man durch den Druck zu Hülfe kommen, indem man sich für jede Combination a, a', b, b', b'' bedruckte Blättchen Papier, wie z. B.

$$\boxed{\begin{pmatrix}4, & 4, & \\ 1, & 1, & 1\end{pmatrix}}$$

mit einem offenen Felde zum späteren Hineinschreiben des Werthes von a'' in hinreichender Anzahl verschaffte; ferner könnte man einen Kasten in eine Reihe von etwa quadratisch angeordneten Fächern eintheilen, welche die Nummern 1, 2, 3, ... bis zu der Grenze der anzufertigenden Tabelle tragen, und dann jedes Blättchen nach Ausfüllung der leeren Stelle mit dem Werthe von a'' in dasjenige Fach legen, dessen Nummer mit der in der arithmetischen Progression auftretenden Determinante übereinstimmt: um jede spätere Verwechslung zu vermeiden, könnte man noch beim Hineinlegen jedes Blättchen auf der Rückseite mit seiner Determinante bezeichnen. Nach vollendeter Arbeit findet man in jedem Fache die zu dieser Determinante gehörigen reducirten Formen auf einzelnen Blättchen, welche man dann in passender Ordnung hintereinander aufkleben kann. Die Kosten eines solchen Apparates in gröfserem Maafsstabe, so wie eines ähnlichen für die binären Formen, würden wie ich glaube nicht bedeutend sein. Jedenfalls ist selbst ohne Hülfe von dergleichen mechanischen Vorrichtungen, die zweite Methode der ersten bei weitem vorzuziehen.

§. 4.

Controle durch Vergleichung beider Methoden und durch Prüfung des Maafses.

Als *erste Controle* ergab sich naturgemäfs die Vergleichung der aus der zweiten mit den aus der ersten Methode hervorgegangenen Formen; sie wurde beim Rangiren der aus der zweiten erhaltenen Formen nach ihren Determinanten angestellt; nur ein paar Mal ergab sich eine Differenz, dann wurde sorgfältig nachgerechnet, um den Fehler zu entdecken und zu verbessern. Durch dieses Mittel war es jedoch nicht möglich zu entscheiden, ob nicht vielleicht trotz aller Sorgfalt dieselbe Form beiden Methoden zugleich entgangen wäre. Diesem Mangel wurde durch die *zweite* und *dritte Controle* ab-

geholfen, welche sich auf die von mir gefundenen, theoretisch bewiesenen Sätze gründen.

Diese Sätze beziehen sich theils auf die Anzahl, theils auf das Maafs der zu einer Determinante gehörigen reducirten Formen (Classen). Zur Benutzung der Sätze erster Art war nur die Abzählung der Formen erforderlich; für die Anwendung der auf das Maafs bezüglichen Sätze müssen einige Definitionen und aufserdem die Berechnung der Werthe von δ (s. §. 6.) vorausgesetzt werden. Für jede positive ternäre Form existirt eine gewisse endliche Anzahl linearer Substitutionen mit der Systemsdeterminante $+1$, durch welche dieselbe in sich selbst transformirt werden kann; diese Anzahl, welche irgend ein Divisor der Zahl 24, aufser 3, sein kann, zeigt zugleich an, wie oft, d. h. durch wie viele Substitutionen jede andere Form derselben Classe in sich selbst oder in jede äquivalente Form transformirt werden kann, sie ist also eine der ganzen Classe zugehörige Zahl, welche eben so wie die Determinante für alle äquivalenten Formen denselben Werth behält. Den reciproken Werth $\frac{1}{\delta}$ dieser Anzahl nenne ich das Maafs oder die Dichtigkeit der Form oder Classe, ein Begriff, dessen Entstehung ich in diesem Journal (Band 35 Seite 120) näher motivirt habe. Die Summe aller dieser Brüche $\Sigma\frac{1}{\delta}$, über die zu einer Determinante gehörigen verschiedenen Formen (Classen) ausgedehnt, bildet das Maafs für die Gesammtheit dieser Formen, oder kurz das Maafs für diese Determinante, und unterliegt einfachen von mir gefundenen Gesetzen. Die einfachsten der hierher gehörigen Sätze sind in folgender Tafel enthalten; $\mathfrak{M}$ bedeutet das Maafs für die eigentlich primitiven, $\mathfrak{M}'$ das für die uneigentlich primitiven Formen; die Determinante wird immer durch $-D$ bezeichnet, und P bedeutet irgend eine positive ungerade Zahl ohne quadratischen Theiler, also ein Product verschiedener ungerader Primzahlen, welches auch $=1$ sein kann, q eine nicht in P aufgehende, von 1 verschiedene ungerade Primzahl. Obwohl diese Tafel von Lehrsätzen nicht auf Vollständigkeit Anspruch machen kann, so ist sie doch für die Controlirung der Tabelle der ternären Formen innerhalb der ihr hier gesteckten Grenzen vollkommen ausreichend *).

*) Allgemeinere Sätze findet man a. a. O. im 35. Bande dieses Journals.

$D =$	$\mathfrak{M} =$	$\mathfrak{M}' =$
P	$\frac{1}{24}(2P-1)$	0
$2P$	$\frac{1}{8}P$	$\frac{1}{24}(P-1)$
$4P$	$\frac{1}{12}(5P-2)$	$\frac{1}{24}(2P-1)$
$8P$	$\frac{3}{4}P$	$\frac{1}{6}(P-1)$
$16P$	$\frac{1}{6}(11P-4)$	$\frac{1}{6}(2P-1)$
$32P$	$\frac{7}{2}P$	$\frac{2}{3}(P-1)$
$64P$	$\frac{1}{3}(23P-8)$	$\frac{2}{3}(2P-1)$
$2^{2\mu}$	$\frac{1}{24}(2^{2\mu+1}-2^{\mu})$	$\frac{1}{24}2^{2\mu-2}$
$2^{2\mu+1}$	$\frac{1}{8}(2^{2\mu+1}-2^{\mu})$	0
q^2	$\frac{1}{24}((q+1)^2-2)$	0
q^2P	$\frac{1}{24}\left\{\begin{matrix}2(q^2+q)P\\ -q^2-1\end{matrix}\right\}$	0
$2q^2$	$\frac{1}{8}q(q+1)$	$\frac{1}{24}(q-1)$
$2q^2P$	$\frac{1}{8}q(q+1)P$ $= \frac{1}{8}(q^2+q)P$	$\frac{1}{24}\left\{\begin{matrix}(q^2+q)P\\ -(q^2+1)\end{matrix}\right\}$
$4q^2P$	$\frac{1}{12}\left\{\begin{matrix}5(q^2+q)P\\ -2(q^2+1)\end{matrix}\right\}$	$\frac{1}{24}\left\{\begin{matrix}2(q^2+q)P\\ -(q^2+1)\end{matrix}\right\}$
$8q^2P$	$\frac{3}{4}(q^2+q)P$	$\frac{1}{6}\left\{\begin{matrix}(q^2+q)P\\ -(q^2+1)\end{matrix}\right\}$
q^3	$\frac{1}{24}(2q^3+q^2-2)$	0
$2q^3$	$\frac{1}{8}(q^3+q^2-1)$	$\frac{1}{24}(q^3-1)$
q^4	$\frac{1}{24}(q^4+2q^3+q^2-2q)$	0

Hier folgen die Werthe von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$, wie sie sich aus der gröfseren Tabelle ergeben, zur Vermeidung von Nennern sämmtlich mit 24 multiplicirt; die Zehner der Determinante stehen links am Rande, die Einer oben in der ersten Zeile:

Tafel der Werthe von $24\mathfrak{M}$ für die eigentlich primitiven Formen.

D	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	—	1	3	5	6	9	9	13	18	14
1	15	21	26	25	21	29	28	33	36	37
2	46	41	33	45	54	34	39	61	66	57
3	45	61	84	65	51	69	80	73	57	77
4	90	81	63	85	106	110	69	93	116	62
5	90	101	126	105	105	109	126	113	87	117
6	146	121	93	158	120	129	99	133	166	137
7	105	141	216	145	111	154	186	153	117	157
8	204	138	123	165	206	169	129	173	198	177
9	180	181	226	185	141	189	252	193	168	254
10	196									

Diese Zahlen sind gefunden worden, indem mit jedem Werthe von δ in 24 dividirt und die Summe der Quotienten für die einzelnen Determinanten berechnet wurde; z. B. unter der Determinante —13 findet man in dem ersten Theil der gröfseren Tabelle folgende Formen mit ihren zugehörigen Transformations-Anzahlen:

$$\underset{\delta=8}{\begin{pmatrix}1, & 1, & 13\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}},\quad \underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}1, & 2, & 7\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}},\quad \underset{\delta=6}{\begin{pmatrix}2, & 2, & 5\\ 1, & 1, & 1\end{pmatrix}},\quad \underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}2, & 3, & 3\\ -1, & 0, & -1\end{pmatrix}};$$

dividirt man hier mit den Werthen von δ, nämlich mit 8, 4, 6, 2, der Reihe nach in 24, so findet man die Quotienten resp. 3, 6, 4, 12, deren Summe 25 beträgt, und diese Zahl 25 steht oben unter der Determinante 13, nämlich an derjenigen Stelle, wo die Verticalreihe 3 die Horizontalreihe 1 durchschneidet. Auf dieselbe Weise sind die folgenden Zahlen aus dem zweiten Theile der grofsen Tabelle gewonnen worden.

Tafel der Werthe von 24𝔐′ für die uneigentlich primitiven Formen.

D	0	2	4	6	8
0	—	—	1	2	—
1	4	5	6	4	2
2	9	10	8	12	13
3	14	—	16	14	18
4	16	20	21	22	20
5	4	25	26	24	28
6	29	30	16	32	33
7	34	8	36	37	38
8	36	40	41	42	40
9	50	45	46	32	6
10	34				

Über die Bestimmung der einzelnen Transformations-Anzahlen δ selbst, welche als Elemente dieser Berechnung zu Grunde gelegt werden, siehe §. 6.

Ziehen wir zunächst aus der ersten Tafel diejenigen Werthe von *D* mit den zugehörigen von 24𝔐, welche ungerade sind und keinen quadratischen Theiler enthalten,

D =	1	3	5	7	11	13	15	17	19	21	23	29	31	33	35	37	39	41	43	47
24𝔐 =	1	5	9	13	21	25	29	33	37	41	45	57	61	65	69	73	77	81	85	93

D =	51	53	55	57	59	61	65	67	69	71	73	77	79	83
24𝔐 =	101	105	109	113	117	121	129	133	137	141	145	153	157	165

D =	85	87	89	91	93	95	97
24𝔐 =	169	173	177	181	185	189	193

so bemerkt man, dafs jede Zahl der zweiten Reihe aus der darüber stehenden der ersten Reihe entspringt, wenn man das Doppelte der letzteren um 1 vermindert; dies bestätigt die Formel $\mathfrak{M} = \frac{1}{24}(2P-1)$ für $D = P$. Wenn man ferner für alle Determinanten von der Form $2P$ aus der ersten Tafel die Werthe von $\mathfrak{M}$, aus der zweiten die von $\mathfrak{M}'$ zusammenstellt, indem man den ersteren den Nenner 8, den letzteren den Nenner 24 giebt, so erhält man folgende Zähler:

$D =$	2	6	10	14	22	26	30	34	38	42
$8\mathfrak{M} =$	1	3	5	7	11	13	15	17	19	21
$24\mathfrak{M}' =$	0	2	4	6	10	12	14	16	18	20
$D =$	46	58	62	66	70	74	78	82	86	94
$8\mathfrak{M} =$	23	29	31	33	35	37	39	41	43	47
$24\mathfrak{M}' =$	22	28	30	32	34	36	38	40	42	46;

und hier ist in der That, wie es nach den Formeln $\mathfrak{M} = \frac{1}{8}P$, $\mathfrak{M}' = \frac{1}{24}(P-1)$ für $D = 2P$ der Fall sein mufs, jede Zahl der zweiten Zeile die Hälfte der entsprechenden der ersten, und jede der dritten Zeile um Eins kleiner als die darüber stehende. Für die Determinanten von der Form $D = 4P$ wird die entsprechende Zusammenstellung

$D =$	4	12	20	28	44	52	60	68	76	84	92
$12\mathfrak{M} =$	3	13	23	33	53	63	73	83	93	103	113
$24\mathfrak{M}' =$	1	5	9	13	21	25	29	33	37	41	45;

diese Werthe genügen wirklich den Formeln $\mathfrak{M} = \frac{1}{12}(5P-2)$, $\mathfrak{M}' = \frac{1}{24}(2P-1)$. Für die ungeraden Quadratzahlen $D = 9, 25, 49$ erhält man die Werthe resp. $24\mathfrak{M} = 14, 34, 62$, und für die doppelten Zahlen $D = 18, 50, 98$ die Werthe resp. $8\mathfrak{M} = 12, 30, 56$, $24\mathfrak{M}' = 2, 4, 6$, welche ebenfalls mit den entsprechenden Formeln in Übereinstimmung stehen. — Die Prüfung der wenigen noch übrigen Determinanten nach den obigen Formeln bleibe dem Leser überlassen; man wird innerhalb der Grenzen der Tabelle keine Determinante finden, welche nicht unter einem der Fälle enthalten wäre, für welche oben der allgemeine Ausdruck des Maafses aufgestellt worden ist.

Diese Art der Controle, so wie die des folgenden Paragraphen, war sowohl für mich sehr interessant, da sie die Richtigkeit meiner Sätze fortwährend bestätigte, als auch deshalb von besonderer practischer Wichtigkeit, weil sie zunächst das einzige Mittel an die Hand gab, die Aufmerksamkeit auf etwa in der Tabelle fehlende Formen zu lenken. Denn für die einmal auf-

gestellten Formen konnte man sich leicht überzeugen: 1) durch blofsen Anblick ihrer Coëfficienten, dafs sie wirklich *reducirt* sind; 2) durch wirkliche abermalige Berechnung ihrer Determinante, dafs sie an richtiger Stelle in der Tabelle eingetragen sind; an ihrer *Vollzähligkeit* blieb jedoch erst dann kein Zweifel mehr, wenn das Maafs für die Gesammtheit derselben mit dem durch die Theorie gegebenen Werthe übereinstimmte; zu grofs konnte dasselbe nach dem eben Bemerkten nicht sein, es handelte sich darum, ob es auch nicht zu klein war, in welchem Falle auf die Abwesenheit einer oder mehrerer reducirten Formen hingedeutet worden wäre. Zum Überflufs wurde die Vollzähligkeit der aufgestellten Formen erwiesen, wenn aufserdem ihre Anzahl mit den theoretischen Sätzen über dieselbe in Übereinstimmung befunden wurde.

§. 5.

Controle durch die Anzahl der Formen.

Die Sätze über die Anzahl der zu derselben Determinante gehörigen Classen nichtäquivalenter Formen, welche mit der Anzahl der reducirten Formen übereinstimmt, waren sehr verborgen und äufserst schwierig aufzufinden. Indem ich die Entwicklung der Principien, welche mich auf diese und analoge Sätze für mehr als 3 Variabeln geführt haben, so wie die weitere Durchführung des Gegenstandes einer späteren Gelegenheit vorbehalte, beschränke ich mich hier auf die Angabe der allgemeinen Form des Resultates und dessen specieller Gestaltung in den einfachsten Fällen. In allen Fällen, die Determinante mag zusammengesetzt sein, wie sie wolle, wird die Anzahl der Classen *ternärer* positiver Formen für die Determinante $-D$ auf die Anzahl der Classen *binärer* Formen für solche negative Determinanten zurückgeführt, deren absolute Werthe mit D, $2D$ oder *Theilern* dieser beiden Zahlen zusammenfallen. Bezeichnet man Kürze halber durch $H(D)$ die Anzahl der nichtäquivalenten (reducirten) *eigentlich* primitiven positiven *ternären* Formen für die Determinante $-D$, durch $H'(D)$ die entsprechende Anzahl für die *uneigentlich* primitiven Formen, ferner durch $h(D)$, $h'(D)$ die Anzahl der resp. *eigentlich*, *uneigentlich* primitiven nichtäquivalenten positiven *binären* Formen für die Determinante $-D$, so erhält man für die einfachsten Fälle, wenn die Determinante ohne quadratischen Theiler angenommen wird:

$$H(P) = \tfrac{1}{4}(\Sigma h(d) + \Sigma h'(d) + \Sigma h(2d)) + \tfrac{1}{12}(P+\lambda),$$
$$H(2P) = \tfrac{1}{2}\Sigma h(d) + \tfrac{1}{4}\Sigma h(2d) + \tfrac{1}{8}(P+r),$$
$$H'(2P) = \tfrac{1}{4}(\Sigma h(d) + \Sigma h'(d)) + \tfrac{1}{24}(P+\varrho),$$

wo P ein Product verschiedener ungerader Primzahlen, d den Inbegriff der sämmtlichen von 1 verschiedenen Divisoren von P mit Einschlufs von P selbst bedeutet, und die Summationen rechts sich auf die so definirten Werthe von d beziehen; die Buchstaben λ, ν, ϱ bedeuten ganze Zahlen, welche nur vom Reste von P (mod. 12) abhangen, nämlich es ist $\lambda = 9$, $\lambda = 11$ oder $\lambda = 7$, je nachdem $P \equiv 0$ (mod. 3), $P \equiv 1$ (mod. 3) oder $P \equiv 2$ (mod. 3); $\nu = 7$ oder $= 5$, je nachdem $P \equiv 1$ oder $\equiv 3$ (mod. 4);

$$\varrho = -1,\ 9,\ 7,\ 5,\ 3,\ 13 \text{ für resp.,}$$
$$P \equiv 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11 \text{ (mod. 12);}$$

welche Fälle sich mit Hülfe des *Legendre*schen Zeichens in

$$\lambda = 9 + 2\left(\frac{P}{3}\right),\quad \nu = 6 + \left(\frac{-1}{P}\right) = 6 + (-1)^{\frac{1}{2}(P-1)},\quad \varrho = 6 - 3(-1)^{\frac{1}{2}(P-1)} - 4\left(\frac{P}{3}\right)$$

zusammenziehen lassen, wo $\left(\frac{P}{3}\right) = 0$ zu setzen, wenn P durch 3 theilbar ist.

Obwohl diese Formeln für eine Determinante mit quadratischen Theilern mannigfach modificirt werden müssen, hat doch das Resultat, wie schon bemerkt, immer eine ähnliche Form, indem zur Bestimmung von $H(D)$ nur die Kenntnifs der Werthe binärer Classenzahlen h, h' für sämmtliche Theiler von $2D$ verlangt wird, und es können diese complicirteren Fälle mittelst der von mir angewandten Principien ebenfalls vollständig ergründet werden; doch mufs ich gestehen, dafs ich diese Fälle noch nicht so weit entwickelt habe, um alle Resultate in fertiger Form hier vorzulegen.

Wenn beiläufig die Determinante eine ungerade Primzahl $-D = -p$ ist, so läfst sich der Satz $H(p) = \frac{1}{4}(h(p) + h'(p) + h(2p)) + \frac{1}{12}(p + \lambda)$, wo $\lambda = 9$, wenn $p = 3$, $\lambda = 11$ oder 7, je nachdem $p \equiv 1$ oder $\equiv 2$ (mod. 3), in einer andern für die Controlirung der Tabelle sehr geeigneten Form aussprechen: „Bezeichnet man durch α die Anzahl der reducirten Formen mit der Deter- „minante $-p$, für welche $a = 1$ oder $a = 2$ ist, durch β die Anzahl der „übrigen reducirten Formen derselben Determinante, für welche $a > 2$, so ist „$\alpha + 2\beta = \frac{1}{6}(p + \lambda)$." So findet man z. B. unter $D = 67$ in der Tabelle 9 Formen, deren erster Coëfficient 1 oder 2 ist, und 2 Formen mit gröfsern ersten Coëfficienten ($a = 3, 4$); hier ist $\lambda = 11$ und wirklich $\frac{1}{6}(67 + 11) = 13$ $= 9 + 2.2$. Dieser Satz ist um so merkwürdiger, da er sich ganz von der Theorie der ternären und binären Formen trennen und blofs als eine Eigenschaft der Combinationen von 6 ganzen Zahlen a, a', a'', b, b', b'' darstellen läfst, für welche

die Ungleichheiten des (§. 2.) erfüllt sind, und der Werth des Ausdruckes

$$aa'a''+2bb'b''-ab^2-a'b'^2-a''b''^2$$

eine gegebene ungerade Primzahl wird. Im Vorbeigehen will ich darauf aufmerksam machen, wie man bei dieser Gelegenheit durch Induction getäuscht werden kann; für eine Menge von Primzahlen findet sich $h(p)+h'(p)+h(2p) = \frac{1}{8}(p+\lambda)$, es wäre dies ein sehr merkwürdiger Satz, aber er ist nur dann richtig, wenn $\beta=0$, was freilich am Anfange sehr häufig der Fall ist.

Mit Zuziehung der von *Dirichlet* im 19ten und 21ten Bande dieses Journals entwickelten Sätze über die binären Formen kann man aus den obigen Formeln die Classenzahlen h, h' gänzlich eliminiren und auf diese Weise durch Verbindung zweier Theorieen neue Sätze über H und H' erhalten, von welchen ich Kürze halber nur die beiden Fälle beispielsweise anführe, dafs für eine Primzahl p von der Form $8n+7$

$$H(p) = \tfrac{1}{2}(A-B+A'-B')+\tfrac{1}{12}(p+\lambda),$$

und für eine Primzahl $p=8n+3>3$

$$H(p) = \tfrac{1}{3}(A-B)+\tfrac{1}{2}(A'-B')+\tfrac{1}{12}(p+\lambda)$$

erhalten wird, wo A, B die Anzahl der quadratischen Reste resp. Nichtreste unter $\frac{1}{4}p$, A', B' die Anzahl derselben Gröfsen bedeutet, welche zwischen $\frac{1}{8}p$ und $\frac{3}{8}p$ liegen.

Der Einfachheit halber stelle ich hier nicht für alle Determinanten, sondern nur für $D=P$ und $D=2P$ die aus der gröfseren Tabelle hervorgehenden Werthe von $H(P)$, $H(2P)$ und $H'(2P)$ für alle Werthe von $P<50$ zusammen, welche man an den obigen Sätzen vollständig prüfen kann; um diese Vergleichung, die ich dem Leser überlassen will, zu erleichtern, sind zugleich die Werthe von $h(P)$, $h'(P)$ und $h(2P)$ beigefügt, so wie diejenigen der Zahlen λ, ν, ϱ; z. B. irgend eine Zahl der zweiten Verticalcolumne $H(P)$ mufs sich ergeben, wenn man für den entsprechenden Werth von P und für dessen sämmtliche Factoren aufser 1 die in der 5ten, 6ten und 7ten Verticalcolumne befindlichen Zahlen addirt und zum vierten Theile der Summe $\frac{1}{12}(P+\lambda)$ hinzufügt:

	Ternäre Classenzahlen			Binäre Classenzahlen					
P	$H(P)$	$H(2P)$	$H'(2P)$	$h(P)$	$h'(P)$	$h(2P)$	λ	ν	ϱ
1	1	1	0	1	0	1	11	7	—1
3	2	2	1	1	1	2	9	5	9
5	2	3	1	2	0	2	7	7	7
7	3	3	1	1	1	4	11	5	5
11	3	4	2	3	1	2	7	5	13
13	4	5	1	2	0	6	11	7	—1
15	6	7	3	2	2	4	9	5	9
17	4	6	2	4	0	4	7	7	7
19	5	6	2	3	1	6	11	5	5
21	7	9	3	4	0	4	9	7	3
23	5	6	3	3	3	4	7	5	13
29	5	8	3	6	0	2	7	7	7
31	7	8	3	3	3	8	11	5	5
33	9	12	4	4	0	8	9	7	3
35	9	12	5	6	2	4	7	5	13
37	7	9	2	2	0	10	11	7	—1
39	10	12	5	4	4	4	9	5	9
41	7	11	4	8	0	4	7	7	7
43	8	10	3	3	1	10	11	5	5
47	9	11	5	5	5	8	7	5	13

Da es wünschenswerth erschien, ein gröſseres, die Grenzen der Tabelle überschreitendes Beispiel vor Augen zu haben, so stellte ich die reducirten Formen für die Determinante $-385 = -5.7.11 = -P$ auf, welche ich am Schlusse der gröſseren Tabelle beigefügt habe. Es fanden sich 15 Formen mit der Determinante -385, deren Transformations-Anzahl $\delta = 1$ beträgt, 25 bei derselben Determinante, für welche $\delta = 2$, ferner 17 Formen mit $\delta = 4$, und je eine mit $\delta = 6$, $\delta = 8$. Was zunächst das Maaſs betrifft, so ist also $\mathfrak{M}(385) = 15 + \frac{25}{2} + \frac{17}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{769}{24}$, und die Zahl 769 ist wirklich, wie es sein muſs, $= 2.385 - 1 = 2P - 1$. Zur Prüfung der Total-Anzahl $59 = H(385)$ aller reducirten Formen sind die Werthe der binären Classenzahlen $h(d)$, $h'(d)$, $h(2d)$ für die Divisoren $d = 5, 7, 11, 35, 55, 77, 385$ von 385 erforderlich, man findet:

$$
\begin{array}{rcl}
d & = & 5,\ 7,\ 11,\ 35,\ 55,\ 77,\ 385 \\
h(d) & = & 2,\ 1,\ 3,\ 6,\ 4,\ 8,\ 8 \\
h'(d) & = & 0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 4,\ 0,\ 0 \\
h(2d) & = & 2,\ 4,\ 2,\ 4,\ 12,\ 8,\ 32 \\
\hline
\text{Summe} & = & 4 + 6 + 6 + 12 + 20 + 16 + 40;
\end{array}
$$

die Summe aller dieser Zahlen beträgt $\Sigma\{h(d)+h'(d)+h(2d)\}=104=4.26$, und da $385\equiv 1 \pmod{3}$, also $\lambda=11$, $P+\lambda=396=12.33$, so mufs $26+33=59$ sein, wie in der That.

Sollte später einmal die Tabelle der reducirten Formen über ihre jetzigen Grenzen hinaus fortgesetzt werden, so besteht ein neuer in practischer Hinsicht nicht zu verachtender Vortheil der obigen Sätze darin, dafs man durch Kenntnifs der Formen-*Anzahl* in Stand gesetzt ist, von vorn herein für jede Determinante den gerade nöthigen Raum zur Aufnahme der ihr zugehörigen Formen in der Tabelle beurtheilen zu können.

Bei den ternären Formen wird durch die hier aufgestellten Sätze und ähnliche, so wie auch durch die Sätze des vorigen Paragraphen, die Richtigkeit derjenigen Behauptung unzweifelhaft bewiesen, welche bei den binären Formen, wo sie von *Gaufs* angeregt worden ist, so grofsen Schwierigkeiten unterliegt: dafs nämlich die Classenzahl mit der Determinante in solcher Weise individuell wächst, dafs man immer eine Grenze finden kann, über welche hinaus die Anzahl der Classen für alle folgenden Determinanten gröfser ist, als eine vorher beliebig und noch so grofs gegebene Zahl; es geht dies sowohl aus den Formeln für H selbst hervor, als auch daraus, dafs offenbar $H>\mathfrak{M}$ ist, und für $\mathfrak{M}(D)$ seinerseits eine einfache wachsende Function von D als untere Grenze angegeben werden kann. Bei wachsendem D ist von den beiden Bestandtheilen, aus welchen H zusammengesetzt ist, derjenige, welcher nur eine einfache Function der Determinante enthält, von höherer Ordnung, als der andere, welcher von den binären Classenzahlen abhängt, und H wird zuletzt mit ersterem allein proportional wachsen *); für ein unendlich grofses D kann man $H=\mathfrak{M}$ setzen; diese und ähnliche approximative oder asymptotische Gesetze gehen leicht aus den von *Dirichlet* gegebenen Principien hervor. Folgende Tafel gewährt eine Übersicht über die Häufigkeit des Vorkommens der einzelnen Classenzahlen innerhalb der Grenzen der gröfseren Tabelle. Die Reihen von Determinanten, für welche $H=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ oder 8, sind für die eigentlich primitiven Formen als abgeschlossen zu betrachten, und man wird bei der Fortsetzung der Tabelle keine Determinante finden, zu welcher weniger als neun reducirte Formen gehören. Um möglichst hohe Grenzen zu ziehen, wird man die verschiedenen Fälle der Determinante einzeln betrachten müssen.

---

*) z. B. für Det. ohne quadratischen Theiler ist immer $H(P)>\frac{1}{12}P$, $H(2P)>\frac{1}{8}P$ und im Unendl. genau $H(P)=\frac{1}{12}P$, $H(2P)=\frac{1}{8}P$.

Eigentlich primitive Formen.

Die Anzahl	kommt vor	Product	bei den Determinanten $-D$, für $D=$
1	2 mal	2	1, 2.
2	4 -	8	3, 4, 5, 6.
3	4 -	12	7, 10, 11, 14.
4	5 -	20	8, 9, 13, 17, 22.
5	4 -	20	19, 23, 26, 29.
6	7 -	42	12, 15, 18, 25, 34, 38, 46.
7	6 -	42	16, 21, 30, 31, 37, 41.
8	5 -	40	20, 43, 53, 58, 62.
9	8 -	72	27, 28, 33, 35, 42, 47, 49, 74.
10	6 -	60	24, 39, 50, 59, 61, 86.
11	6 -	66	51, 54, 67, 71, 82, 94.
12	8 -	96	32, 57, 65, 66, 70, 73, 78, 79.
13	5 -	65	44, 52, 55, 83, 89.
14	4 -	56	36, 40, 69, 77.
15	4 -	60	45, 85, 97, 98.
16	2 -	32	56, 81.
17	6 -	102	64, 68, 87, 91, 93, 95.
18	1 -	18	76.
19	2 -	38	63, 75.
20	2 -	40	48, 88.
21	2 -	42	90, 92.
22	2 -	44	60, 100.
24	1 -	24	99.
26	1 -	26	84.
28	2 -	56	72, 80.
33	1 -	33	96.
Summa	100 -	1116	

Uneigentlich primitive Formen.

Die Anzahl	kommt vor	Product	bei den Determinanten $-D$, für $D =$
1	9 mal	9	4, 6, 10, 14, 16, 18, 26, 50, 98.
2	10 -	20	12, 20, 22, 24, 34, 38, 40, 64, 72, 74.
3	11 -	33	28, 30, 42, 44, 46, 48, 56, 58, 62, 80, 86.
4	6 -	24	36, 52, 66, 68, 82, 96.
5	7 -	35	54, 70, 76, 78, 88, 92, 94.
6	3 -	18	60, 90, 100.
7	1 -	7	84.
Summa	47	146	

Im Ganzen umfafst also die Tabelle 1116 eigentliche und 146 uneigentliche Formen, zusammen 1262, so dafs für die Determinanten von -1 bis -100 die Anzahl der primitiven Classen ternärer positiver Formen 1262 beträgt.

Nach vollendetem Druck vorliegender Arbeit beabsichtige ich, die Eintheilung in *Genera*, über welche ich schon im 35. Bande dieses Journals ziemlich ausführlich gesprochen habe, auf die in der Tabelle enthaltenen Formen anzuwenden; diese neue Anordnung wird sehr erleichtert, wenn man Gelegenheit findet, die Formen einzeln auszuschneiden, wozu wegen der ebenfalls bedruckten Rückseite jedes Blattes mindestens zwei Exemplare erforderlich sind. — Die Anzahl der in jedem einzelnen Genus enthaltenen Formen läfst sich ebenfalls theoretisch angeben, z. B. wenn $D = p$ Primzahl ist, so existiren zwei Genera ($\mathfrak{G}Rp$ und $\mathfrak{G}Np$, siehe a. a. O.), und für beide wird der Ausdruck für die Anzahl der in ihnen enthaltenen Classen von der Form

$$\gamma h(p) + \gamma' h(2p) + \gamma'' p + \gamma''',$$

wo $\gamma, \gamma', \gamma'', \gamma'''$ numerische Constanten sind, die nur vom Reste von p (mod. 24) abhangen.

§. 6.

Berechnung der Transformations-Anzahlen δ.

Der Bestimmung der Transformations-Anzahlen (siehe §. 4.), durch welche die Tabelle einen ganz neuen Zuwachs gewonnen hat, liegen folgende beiden Tafeln zu Grunde, aus welchen man leicht die das Problem der Transformation für positive ternäre Formen vollständig erschöpfenden Lehrsätze ableiten könnte, die aber gerade in der hier vorliegenden Weise am besten zum practischen Gebrauche geeignet scheinen.

I. Tafel für die Formen $\begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ +b, & +b', & +b'' \end{pmatrix}$ mit positiven unteren Coëfficienten.

No.	Bedingungen.	t
A (1)	keine Bedingung	1
(2)	$a = 2b' = 2b''$	1
(3)	$a = 2b',\ b'' = 2b$	1
(4)	$a = 2b'',\ b' = 2b$	1
(5)	$a' = 2b,\ b'' = 2b'$	1
B (6)	$a = a',\ b = b'$	1
(7)	$a' = a'',\ b' = b''$	1
(8)	$a = 2b' = 2b'',\ a' = a''$	1
(9)	$a = 2b' = 2b'' = 4b,\ a' = a''$	2
(10)	$a = a' = 2b = 2b' = 2b''$	3
C (11)	$a = a' = a'',\ b = b' = b''$	3
(12)	$a = a' = a'' = 2b = 2b' = 2b''$	13

II. Tafel für die Formen $\begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ -b, & -b', & -b'' \end{pmatrix}$ mit nicht positiven unteren Coëfficienten.

No.	Bedingungen	t
A (1)	keine Bedingung	1
(2)	$a = 2b',\ b'' = 0$	1
(3)	$a = 2b'',\ b' = 0$	1
(4)	$a' = 2b,\ b'' = 0$	1
(σ) (5)	$a = 2b' + b'',\ a' = 2b + b''$	1
B (6)	$a = a',\ b = b'$	1
(7)	$a' = a'',\ b' = b''$	1
(σ) (8)	$a = a' = b + b' + b''$	1
(σ) (9)	$a = a' = 2b = 2b',\ b'' = 0$	2
(10)	$a = a' = 2b'',\ b = b' = 0$	3
(11)	$a' = a'' = 2b,\ b' = b'' = 0$	3
(σ) (12)	$a' = a'',\ a = 2b' + b'',\ a' = 2b + b''$	1
(σ) (13)	$a' = a'',\ b' = b'',\ \sigma,\ a = 3b'$	2
C (14)	$a = a' = a'',\ b = b' = b''$	3
(σ) (15)	$a = a' = a'',\ \sigma$	2
(σ) (16)	$a = a' = a'',\ \sigma,\ b = b'$	2
(σ) (17)	$a = a' = a'',\ \sigma,\ b' = b''$	3
(σ) (18)	$a = a' = a'' = 3b = 3b' = 3b''$	6

Folgendes ist der Gebrauch dieser beiden Tafeln. Neben jeder Nummer mit Ausnahme von No. (1) befindet sich ein Complex oder eine Gruppe von Bedingungen für die Coëfficienten der reducirten Formen; mit diesen vergleicht man jede zu untersuchende Form und zwar entweder in der Tafel I. oder II., je nachdem ihre drei unteren Coëfficienten, d. h. die der doppelten Producte $2yz$, $2xz$, $2xy$, positiv sind oder nicht; für alle Gruppen von Bedingungen, welche bei der vorgelegten Form wirklich erfüllt sind, addirt man die zugehörigen Werthe von t; die so gefundene Summe Σt giebt entweder selbst den Werth von δ, wenn nicht mehr als einer (also entweder keiner oder nur einer) der unteren Coëfficienten der Form den Werth Null hat, oder diese Summe ist doppelt zu nehmen oder endlich mit 4 zu multipliciren, je nachdem zwei der unteren Coëfficienten oder alle drei $=0$ sind. Die No. (1) (keine Bedingung) in beiden Tafeln dient nur dazu, um anzuzeigen, dafs selbst dann Transformationen Statt finden, wenn keine der unter den folgenden Nummern verzeichneten Bedingungen erfüllt ist, man kann also sagen, dafs *diese* Nummer *wenigstens* immer erfüllt ist, sie ist demnach bei allen Formen ohne Weiteres immer mitzuzählen. Bei diesem Verfahren sind zum richtigen Verständnifs folgende beiden Bemerkungen wohl zu beachten. 1) darf *keine* Rücksicht darauf genommen werden, ob ein Complex von Bedingungen unter einem andern umfassenderen schon logisch enthalten ist, sondern die zu untersuchende Form mufs mit jeder einzelnen Nummer der Tafeln verglichen werden, abgesehen davon, dafs vielleicht unter den Bedingungen einer späteren Nummer die einer früheren bereits vollständig oder zum Theil begriffen sind; so enthält z. B. der Complex von Bedingungen neben No. (8) in Tafel I. die sämmtlichen Bedingungen der beiden früheren Nummern (2) und (7), denn wenn $a=2b'=2b''$ und $a'=a''$ ist, so kann man dies so aussprechen, dafs erstlich $a'=a''$ und $b'=b''$ wie bei (7), dafs zweitens $a=2b'=2b''$ wie bei (2), dessen ungeachtet mufs für jede Form, welche der (8) genügt, auch unter (2) und (7) noch aufserdem nachgesehen werden, weil die Werthe von t, wie aus den zu Grunde liegenden theoretischen Betrachtungen hervorgeht, sich nur auf diejenigen Transformationen beziehen, welche der Totalität der in der Nummer befindlichen Bedingungen, ohne Rücksicht auf deren Zerlegung in einzelne Partialgruppen, ihre Entstehung verdanken; von No. (1) kann man sagen, dafs sie unter allen folgenden Nummern enthalten ist, und doch ist der ihr zugehörige Werth $t=1$ bei keiner Form zu vergessen, mag dieselbe übrigens keiner oder noch so vielen der folgenden Bedingungen Genüge leisten. 2) ist zu bemerken: um von einer Form behaupten zu

können, dafs irgend eine Nummer für sie Statt findet, reicht es nicht hin, dafs dieselbe einer oder mehreren der unter dieser Nummer verzeichneten Bedingungen genügt, sondern die letzteren müssen sämmtlich und zu gleicher Zeit erfüllt sein; so kann es geschehen, dafs eine Menge der in den Tafeln vorkommenden Bedingungen bei einer reducirten Form angetroffen werden, und doch nicht in der Weise vereinigt erscheinen, dafs irgend eine der auf (1) folgenden Nummern der Form zugeschrieben werden könnte; z. B. können alle drei oberen Coëfficienten einander gleich sein, wie bei der Form $\begin{pmatrix} 7, & 7 & 7 \\ -1, & -2, & -3 \end{pmatrix}$, und doch ist nur $\delta = 1$; namentlich ist bei den Formen der ersten Art (Tafel I.) häufig einzeln $a = 2b'$ oder $a = 2b''$ oder $a' = 2b$, tritt aber aufser einer von diesen keine andere Eigenschaft der Form hinzu, so ist immer nur $\delta = 1$; bei No. (1) hätte daher statt „keine Bedingung" passender und vollständiger „kein Complex von zusammengehörigen Bedingungen" geschrieben werden können, doch genügt jene kürzere Andeutung, da es mir hier nur auf ein möglichst practisches Verfahren zur Bestimmung von δ ankommt.

Die Eintheilung jeder einzelnen Tafel in *A, B, C* bezieht sich auf das Verhalten der drei oberen Coëfficienten a, a', a'' und dient um die Übersicht zu erleichtern, indem z. B. jede Form, für welche a, a', a'' alle drei verschieden sind, nur mit den Bedingungen unter *A* zu vergleichen ist, während die unter *B* und *C* ganz unberücksichtigt bleiben; sind zwei jener oberen Coëfficienten einander gleich und von dem dritten verschieden, so braucht man nur die Nummern unter *A* und *B* nachzusehen und vernachlässigt die unter *C* befindlichen. Einen ähnlichen Zweck hat das Zeichen σ in der zweiten Tafel, welches die nicht sehr häufig vorkommende Bedingung $a + a' = 2(b + b' + b'')$ bei den Formen zweiter Art andeuten soll, und ist dieser Fall, wo er vorkommt, in den Tafeln ausdrücklich vorn in der ersten Verticalcolumne angezeigt, damit man diese Nummern sofort übergehen kann, wenn die zu untersuchende Form, nachdem man sie hierauf zuvor geprüft hat, der in Rede stehenden Bedingung (σ) *nicht* Genüge leistet. Hiernach wird man in den meisten Fällen bei einiger Übung ganze Reihen der in den Tafeln befindlichen Nummern auf einmal verwerfen und unter den wenigen übrig bleibenden Nummern mit Leichtigkeit die brauchbaren herausfinden können.

Einige Beispiele werden diese Regeln deutlicher machen. Für die Form $\begin{pmatrix} 2, & 3, & 4 \\ -1, & 0, & 0 \end{pmatrix}$ ist keine der vorkommenden Bedingungen erfüllt, also hat man nur aus No. (1) in Tafel II. $t = 1$, da aber zwei der unteren Coëfficienten Null sind, so wird $\delta = 2$; für die Form $\begin{pmatrix} 3, & 4, & 6 \\ 2, & 1, & 1 \end{pmatrix}$ ist zwar $a' = 2b$, nämlich $4 = 2.2$, da aber

nicht $b'' = 2b'$, so ist No. (5) in I., die einzige, welche zu vergleichen man veranlafst wird, nicht erfüllt, und man hat daher nur aus (1) $t = 1$ und $\delta = 1$. Die Form $\begin{pmatrix}4, & 5, & 6\\ 1, & 2, & 2\end{pmatrix}$ ist in der Tafel I. nur mit den unter A befindlichen Nummern, und zwar aufser (1), was sich von selbst versteht, mit (2), (3) und (4) zu vergleichen, denn (5) fällt aus, weil nicht $a' = 2b$, d. h. 5 nicht das Doppelte von 1 ist; jene drei Bedingungen oder Gruppen von Bedingungen sind wirklich erfüllt, also sind im Ganzen (1), (2), (3) und (4) erfüllt, daher $\Sigma t = 1+1+1+1 = 4$, $\delta = 4$. Für die Form $\begin{pmatrix}2, & 5, & 8\\ -1, & -1, & 0\end{pmatrix}$, welche unter die Categorie der Tafel II. fällt, ist weder (σ) erfüllt, da $1+1 <$ als die Hälfte von $2+5$, noch findet Gleichheit der oberen Coëfficienten Statt, man wird also aufser (1) nur (2), (3) und (4) prüfen, und da nur (1) und (2) erfüllt sind, so ist $\Sigma t = 1+1$, $\delta = 2$. Für die Form $\begin{pmatrix}2, & 2, & 3\\ 1, & 1, & 1\end{pmatrix}$ sind in I. (1), (2), (6) und (10) erfüllt, folglich $\Sigma t = 1+1+1+3$, $\delta = 6$. Für die Form $\begin{pmatrix}4, & 5, & 5\\ 1, & 1, & 2\end{pmatrix}$ ist zwar $a' = a''$ und auch $a = 2b''$, ferner $b = b'$, diese drei Eigenschaften der vorliegenden Form stehen aber nicht in solcher Beziehung, dafs irgend eine der auf (1) folgenden Nummern in I. anzuwenden wäre, es ist also nur $\delta = 1$. Noch füge ich kurz folgende Formen als Beispiele hinzu nebst den auf sie anzuwendenden Nummern der beiden Tafeln:

$\begin{pmatrix}1, & 2, & 2\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}$ II. (1), (4), (7), (11), $\Sigma t = 6$, $\delta = 2\Sigma t = 12$;

(σ) $\begin{pmatrix}2, & 2, & 3\\ -1, & -1, & 0\end{pmatrix}$ II. (1), (2), (4), (5), (6), (8), (9), $\delta = \Sigma t$
$= 1+1+1+1+1+1+2 = 8$;

$\begin{pmatrix}1, & 1, & 2\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ II. (1), (6), $\delta = 4\Sigma t = 4.2 = 8$;

$\begin{pmatrix}1, & 1, & 1\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ II. (1), (6), (7), (14), $\Sigma t = 1+1+1+3 = 6$,
$\delta = 4\Sigma t = 24$;

$\begin{pmatrix}3, & 3, & 3\\ 1, & 1, & 1\end{pmatrix}$ I. (1), (6), (7), (11), $\Sigma t = 1+1+1+3 = 6$,
$\delta = \Sigma t = 6$;

(σ) $\begin{pmatrix}3, & 3, & 4\\ -1, & -1, & -1\end{pmatrix}$ II. (1), (5), (6), (8), $\Sigma t = 4$, $\delta = 4$;

$\begin{pmatrix}2, & 2, & 2\\ 1, & 1, & 1\end{pmatrix}$ I. (1), (2), (6), (7), (8), (10), (11), (12), $\delta = \Sigma t$
$= 1+1+1+1+1+3+3+13 = 24$;

(σ) $\begin{pmatrix}3, & 3, & 3\\ -1, & -1, & -1\end{pmatrix}$ II. (1), (5), (6), (7), (8), (12), (13), (14), (15), (16),
(17), (18), $\delta = \Sigma t = 1+1+1+1+1+1+1+2+3+2+2+3+6 = 24$.

Wäre es in der That nothwendig *jede* der 1262 in der gröfseren Tabelle enthaltenen reducirten Formen in dieser Weise mit den Bedingungen der obigen Tafeln zu vergleichen, so würde dies ein zu langwieriges, überdies einer sicheren Controle entbehrendes Geschäft sein. Glücklicherweise sind jene Bedingungen der Art, dafs jede einmal untersuchte Form als Muster oder Vorbild für unendlich viele andere dienen kann, denen man sogleich ansieht, dafs sie denselben Bedingungen wie jene genügen, also auch in Bezug auf ihre Transformations-Anzahl δ mit jener übereinstimmen müssen. Nachdem man z. B. für die Form $\begin{pmatrix}2, 2, 3\\ 1, 1, 1\end{pmatrix}$ die Zahl $\delta = 6$ gefunden hat, so geht ohne weitere Benutzung der Tafeln hervor, dafs auch für die Formen $\begin{pmatrix}2, 2, 4\\ 1, 1, 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2, 2, 5\\ 1, 1, 1\end{pmatrix}$ und allgemein für alle Formen $\begin{pmatrix}2, 2, a''\\ 1, 1, 1\end{pmatrix}$, in denen $a'' > 2$ (aber nicht $= 2$) ist, $\delta = 6$ sein wird; oder nachdem man gefunden hat, dafs für $\begin{pmatrix}2, 2, 3\\ 0, 0, -1\end{pmatrix}$ $\delta = 12$ ist, so folgt, dafs für jede Form wie $\begin{pmatrix}2, 2, a''\\ 0, 0, -1\end{pmatrix}$, in welcher $a'' > 2$ ist, ebenfalls $\delta = 12$ sein mufs. Da die Determinanten solcher Formen eine arithmetische Progression bilden, so sind die Formen selbst in der gröfseren Tabelle leicht aufzufinden und mit den ihnen zugehörigen Transformations-Anzahlen zu versehen. Es wurde also der Gebrauch obiger Tafeln nur so weit ausgedehnt, als es durchaus erforderlich war, und bis man zu Formen gelangte, welche sich in der angegebenen Weise auf frühere zurückbeziehen liefsen; spätere Werthe von δ wurden theils rückwärts gehend aus früheren bestimmt, theils wurde die ganze Tabelle der Formen vom Anfange ausgehend dem Ende zu mit ganzen Reihen von solchen aus einander hervorgehenden gleichen Werthen von δ gleichsam durchzogen. Bei diesem Verfahren erreichte man aufser der bedeutenden Vereinfachung der Arbeit noch einen doppelten Vortheil: einmal fand man neue Gelegenheit, die in §. 3. vorkommenden arithmetischen Reihen wiederum zu durchlaufen und sich von dem Vorhandensein jeder Form in der gröfseren Tabelle zu überzeugen; sodann ergab sich eine nicht besser zu wünschende Controlirung der einzelnen δ, indem jeder bei der Bestimmung derselben etwa begangene Fehler an mehreren Stellen sich wiederholen mufste, also eine Übereinstimmung von $\mathfrak{M} = \Sigma \frac{1}{\delta}$ (§. 4.) mit der Theorie an allen diesen Stellen zugleich durch blofse Compensation mindestens sehr unwahrscheinlich, wenn nicht unmöglich war.

Ferner bemerke man noch die Transformations-Anzahl für einige häufig vorkommenden speciellen Arten von Formen, wie sie sich aus den obigen

Tafeln ergiebt. Für die Formen $\binom{a,\ a',\ a''}{0,\ 0,\ 0}$ wird, wie schon *Gaufs* angegeben hat, $\delta = 4$, $\delta = 8$ oder $\delta = 24$, je nachdem resp. alle drei oberen Coëfficienten ungleich, oder zwei derselben einander gleich und vom dritten verschieden, oder endlich alle drei gleich sind; in der That ist für diese Formen immer $\delta = 4\Sigma t$ zu setzen und im ersten Falle ist in Tafel I. nur No. (1) erfüllt, im zweiten sind entweder die Nummern (1) und (6) oder die Nummern (1) und (7) erfüllt, im dritten gleichzeitig die Nummern (1), (6), (7) und (14). Die Formen $\binom{a,\ a',\ a''}{-b,\ 0,\ 0}$, in denen b von 0 verschieden ist, geben $\delta = 4$, so oft in der binären Form $(a',\ b,\ a'')$ entweder $a' = a''$ oder b genau die Hälfte von a' ist; sie geben $\delta = 12$, wenn die letzteren beiden Bedingungen vereinigt erscheinen, wie z. B. bei der Form $\binom{1,\ 2,\ 2}{-1,\ 0,\ 0}$ mit der Determinante -3, in allen übrigen Fällen $\delta = 2$; $a = a'$ ist bei diesen Formen unzulässig und widerspricht den Bedingungen der Reducirtheit. Ähnliches gilt von den Formen $\binom{a,\ \ a',\ a''}{0,\ -b',\ 0}$, $\binom{a,\ a',\ \ a''}{0,\ 0,\ -b''}$, wenn man die binären Formen $(a,\ b',\ a'')$ resp. $(a,\ b'',\ a')$ betrachtet; sollte für die Formen $\binom{a,\ a',\ \ a''}{0,\ 0,\ -b''}$ vielleicht $a' = a''$ sein, so hat dieser Umstand durchaus keinen Einflufs auf die Transformations-Anzahl. Durch diese Regeln allein werden die so zahlreichen Formen erledigt, in denen $a = 1$ ist, da nur die beiden Arten $\binom{1,\ a',\ a''}{0,\ 0,\ 0}$ und $\binom{1,\ a',\ a''}{-b,\ 0,\ 0}$ vorkommen; noch bequemer übersieht man für diese das Resultat, wenn man bemerkt, dafs für $\binom{1,\ 1,\ a''}{0,\ 0,\ 0}$, wenn $a'' > 1$ ist, $\delta = 8$ wird, dafs $\binom{1,\ a',\ a''}{0,\ 0,\ 0}$, wo a' und a'' beide > 1 sind, $\delta = 8$ oder $\delta = 4$ ergiebt, je nachdem $a' = a''$ oder von a'' verschieden ist, und dafs endlich für die Formen $\binom{1,\ a',\ a''}{-b,\ 0,\ 0}$, $\binom{1,\ a',\ a'}{-b,\ 0,\ 0}$, $\binom{1,\ a',\ a''}{-\frac{1}{2}a',\ 0,\ 0}$, $\binom{1,\ a',\ a'}{-\frac{1}{2}a',\ 0,\ 0}$ resp. $\delta = 2$, $\delta = 4$, $\delta = 4$, $\delta = 12$ wird, wenn man in jeder dieser vier Formen die nicht ausdrücklich durch die Bezeichnung selbst angedeuteten Bedingungen als nicht erfüllt voraussetzt. Die ebenfalls in der Tabelle sehr häufig vorkommenden Formen mit dem ersten Coëfficienten $a = 2$ können sämmtlich nach den folgenden Vorbildern beurtheilt werden:

$$\underset{\delta=6}{\binom{2,\ 2,\ 3}{1,\ 1,\ 1}},\quad \underset{\delta=8}{\binom{2,\ \ 2,\ 3}{-1,\ -1,\ 0}},\quad \underset{\delta=12}{\binom{2,\ 2,\ \ 3}{0,\ 0,\ -1}},\quad \underset{\delta=4}{\binom{2,\ \ 2,\ 3}{0,\ -1,\ 0}},\quad \underset{\delta=8}{\binom{2,\ 2,\ 3}{0,\ 0,\ 0}};$$

$$\underset{\delta=4}{\binom{2,\ 3,\ 3}{1,\ 1,\ 1}},\quad \underset{\delta=2}{\binom{2,\ 3,\ \ 3}{-1,\ 0,\ -1}},\quad \underset{\delta=4}{\binom{2,\ 3,\ \ 3}{0,\ 0,\ -1}},\quad \underset{\delta=4}{\binom{2,\ 3,\ 3}{-1,\ 0,\ 0}};$$

$\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}2,&3,&4\\1,&1,&1\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}2,&3,&4\\-1,&0,&-1\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}2,&3,&4\\-1,&-1,&0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}2,&3,&4\\0,&0,&-1\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}2,&3,&4\\0,&-1,&0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}2,&3,&4\\-1,&0,&0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}2,&3,&4\\0,&0,&0\end{pmatrix}}$;

$\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}2,&4,&5\\2,&1,&1\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}2,&4,&5\\-2,&-1,&0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}2,&4,&5\\-2,&0,&0\end{pmatrix}}$;

$\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}2,&4,&4\\2,&1,&1\end{pmatrix}}$, mit Ausnahme der ganz einzeln stehenden, am Anfange vorkommenden $\underset{\delta=24}{\begin{pmatrix}2,&2,&2\\1,&1,&1\end{pmatrix}}$ und $\underset{\delta=12}{\begin{pmatrix}2,&2,&2\\0,&0,&-1\end{pmatrix}}$. — Eine weitere Vermehrung dieser Fälle bietet zwar keine theoretischen Schwierigkeiten dar, verliert aber ihren practischen Werth durch die damit verbundene Überladung des Gedächtnisses; aus dem letzteren Grunde scheint auch eine Behandlung der Formen nach Vorbildern, welche sich auf unmittelbare Anschauung stützt, einer solchen nach beschreibenden Regeln in practischer Hinsicht bei Weitem vorzuziehen.

In theoretischer Beziehung namentlich in Hinsicht auf die Bestimmung der Formen-Anzahl war mir die Eintheilung der reducirten Formen in solche, für welche $\delta=1$, und in die übrigen, für welche $\delta>1$, also $\delta=2, 4, 6, 8, 12$ oder 24 ist, von Wichtigkeit; die letzteren, welche man Ausnahmeformen nennen kann, haben die sehr bemerkenswerthe Eigenthümlichkeit, die den ersteren mit $\delta=1$ nicht zukommt, dafs sie sich stets in eine, zwar nicht nothwendig reducirte, aber doch äquivalente Form von einer der beiden folgenden Arten

$$ax^2+\varphi \quad \text{oder} \quad a(x^2+xy)+\varphi$$

transformiren lassen, wo φ eine *binäre* Form bedeutet, die allein die Variabeln y und z und nicht mehr x enthält. Diese Formen entsprechen denen, welche *Gaufs* ancipites genannt hat, und a ist, wie leicht zu sehen, bei ihnen immer ein Divisor der doppelten Determinante.

Möge mir erlaubt sein, zum Beschlufs hier eine Bemerkung hinzuzufügen, welche sich auf *unbestimmte* ternäre Formen bezieht. Für diese Formen scheint die Anzahl der zu einer Determinante gehörigen Classen einem noch einfacheren Gesetze, als bei den bestimmten (positiven, negativen Formen) zu unterliegen, wenigstens, wenn die Determinante als eine ungerade Zahl ohne quadratischen Theiler angenommen wird. Ist letztere eine ungerade Primzahl, so scheinen immer genau zwei Classen vorhanden zu sein, und besteht die Determinante aus einem Product von μ verschiedenen ungeraden Primzahlen, so scheint die Anzahl der Classen 2^μ zu betragen.

Zweite Abtheilung.

Tabelle der reducirten positiven ternären Formen nebst ihren Transformations-Anzahlen für alle Determinanten von —1 bis —100 und für die einzelne Determinante —385.

I. Tabelle der eigentlich primitiven positiven ternären Formen für alle negativen Determinanten von —1 bis —100.

D	Anzahl	Reducirte positive ternäre Formen für die Determinante $-D$.
1	1	$\underset{\delta=24}{\begin{pmatrix}1, & 1, & 1\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}}$.
2	1	$\underset{\delta=8}{\begin{pmatrix}1, & 1, & 2\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}}$.
3	2	$\underset{\delta=8}{\begin{pmatrix}1, & 1, & 3\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}}, \underset{\delta=12}{\begin{pmatrix}1, & 2, & 2\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}}$.
4	2	$\underset{\delta=8}{\begin{pmatrix}1, & 1, & 4\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}}, \underset{\delta=8}{\begin{pmatrix}1, & 2, & 2\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}}$.
5	2	$\underset{\delta=8}{\begin{pmatrix}1, & 1, & 5\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}}, \underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}1, & 2, & 3\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}}$.
6	2	$\underset{\delta=8}{\begin{pmatrix}1, & 1, & 6\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}}, \underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}1, & 2, & 3\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}}$.
7	3	$\underset{\delta=8}{\begin{pmatrix}1, & 1, & 7\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}}, \underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}1, & 2, & 4\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}}, \underset{\delta=6}{\begin{pmatrix}2, & 2, & 3\\ 1, & 1, & 1\end{pmatrix}}$.
8	4	$\underset{\delta=8}{\begin{pmatrix}1, & 1, & 8\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}}, \underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}1, & 2, & 4\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}}, \underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}1, & 3, & 3\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}}, \underset{\delta=8}{\begin{pmatrix}2, & 2, & 3\\ -1, & -1, & 0\end{pmatrix}}$.
9	4	$\underset{\delta=8}{\begin{pmatrix}1, & 1, & 9\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}}, \underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}1, & 2, & 5\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}}, \underset{\delta=8}{\begin{pmatrix}1, & 3, & 3\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}}, \underset{\delta=12}{\begin{pmatrix}2, & 2, & 3\\ 0, & 0, & -1\end{pmatrix}}$.
10	3	$\underset{\delta=8}{\begin{pmatrix}1, & 1, & 10\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}}, \underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}1, & 2, & 5\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}}, \underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}2, & 2, & 3\\ 0, & -1, & 0\end{pmatrix}}$.

D	Anz.	Reducirte positive ternäre Formen für die Determinante $-D$.
11	3	$\underset{\delta=8}{\begin{pmatrix}1, & 1, & 11\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}1, & 2, & 6\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}1, & 3, & 4\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}}$.
12	6	$\underset{\delta=8}{\begin{pmatrix}1, & 1, & 12\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}1, & 2, & 6\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}1, & 3, & 4\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=12}{\begin{pmatrix}1, & 4, & 4\\ -2, & 0, & 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=8}{\begin{pmatrix}2, & 2, & 3\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}2, & 3, & 3\\ 1, & 1, & 1\end{pmatrix}}$.
13	4	$\underset{\delta=8}{\begin{pmatrix}1, & 1, & 13\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}1, & 2, & 7\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=6}{\begin{pmatrix}2, & 2, & 5\\ 1, & 1, & 1\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}2, & 3, & 3\\ -1, & 0, & -1\end{pmatrix}}$.
14	3	$\underset{\delta=8}{\begin{pmatrix}1, & 1, & 14\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}1, & 2, & 7\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}1, & 3, & 5\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}}$.
15	6	$\underset{\delta=8}{\begin{pmatrix}1, & 1, & 15\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}1, & 2, & 8\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}1, & 3, & 5\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}1, & 4, & 4\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=12}{\begin{pmatrix}2, & 2, & 5\\ 0, & 0, & -1\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}2, & 3, & 3\\ 0, & 0, & -1\end{pmatrix}}$.
16	7	$\underset{\delta=8}{\begin{pmatrix}1, & 1, & 16\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}1, & 2, & 8\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=8}{\begin{pmatrix}1, & 4, & 4\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}1, & 4, & 5\\ -2, & 0, & 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=8}{\begin{pmatrix}2, & 2, & 5\\ -1, & -1, & 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}2, & 3, & 3\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=24}{\begin{pmatrix}3, & 3, & 3\\ -1, & -1, & -1\end{pmatrix}}$.
17	4	$\underset{\delta=8}{\begin{pmatrix}1, & 1, & 17\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}1, & 2, & 9\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}1, & 3, & 6\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}2, & 3, & 4\\ 1, & 1, & 1\end{pmatrix}}$.
18	6	$\underset{\delta=8}{\begin{pmatrix}1, & 1, & 18\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}1, & 2, & 9\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}1, & 3, & 6\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}2, & 2, & 5\\ 0, & -1, & 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=8}{\begin{pmatrix}2, & 3, & 3\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}2, & 3, & 4\\ -1, & 0, & -1\end{pmatrix}}$.
19	5	$\underset{\delta=8}{\begin{pmatrix}1, & 1, & 19\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}1, & 2, & 10\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}1, & 4, & 5\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=6}{\begin{pmatrix}2, & 2, & 7\\ 1, & 1, & 1\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}2, & 3, & 4\\ -1, & -1, & 0\end{pmatrix}}$.
20	8	$\underset{\delta=8}{\begin{pmatrix}1, & 1, & 20\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}1, & 2, & 10\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}1, & 3, & 7\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}1, & 4, & 5\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}1, & 4, & 6\\ -2, & 0, & 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=8}{\begin{pmatrix}2, & 2, & 5\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}2, & 3, & 4\\ 0, & 0, & -1\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=6}{\begin{pmatrix}3, & 3, & 3\\ 1, & 1, & 1\end{pmatrix}}$.
21	7	$\underset{\delta=8}{\begin{pmatrix}1, & 1, & 21\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}1, & 2, & 11\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}1, & 3, & 7\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}1, & 5, & 5\\ -2, & 0, & 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=12}{\begin{pmatrix}2, & 2, & 7\\ 0, & 0, & -1\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}2, & 3, & 4\\ 0, & -1, & 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}3, & 3, & 3\\ 0, & -1, & -1\end{pmatrix}}$.

D	Anz.	Reducirte positive ternäre Formen für die Determinante $-D$.
22	4	$\begin{pmatrix}1, 1, 22\\0, 0, 0\end{pmatrix}$ ($\delta=8$), $\begin{pmatrix}1, 2, 11\\0, 0, 0\end{pmatrix}$ ($\delta=4$), $\begin{pmatrix}2, 3, 4\\-1, 0, 0\end{pmatrix}$ ($\delta=2$), $\begin{pmatrix}2, 3, 5\\1, 1, 1\end{pmatrix}$ ($\delta=2$).
23	5	$\begin{pmatrix}1, 1, 23\\0, 0, 0\end{pmatrix}$ ($\delta=8$), $\begin{pmatrix}1, 2, 12\\-1, 0, 0\end{pmatrix}$ ($\delta=4$), $\begin{pmatrix}1, 3, 8\\-1, 0, 0\end{pmatrix}$ ($\delta=2$), $\begin{pmatrix}1, 4, 6\\-1, 0, 0\end{pmatrix}$ ($\delta=2$), $\begin{pmatrix}2, 3, 5\\-1, 0, -1\end{pmatrix}$ ($\delta=2$).
24	10	$\begin{pmatrix}1, 1, 24\\0, 0, 0\end{pmatrix}$ ($\delta=8$), $\begin{pmatrix}1, 2, 12\\0, 0, 0\end{pmatrix}$ ($\delta=4$), $\begin{pmatrix}1, 3, 8\\0, 0, 0\end{pmatrix}$ ($\delta=4$), $\begin{pmatrix}1, 4, 6\\0, 0, 0\end{pmatrix}$ ($\delta=4$), $\begin{pmatrix}1, 4, 7\\-2, 0, 0\end{pmatrix}$ ($\delta=4$), $\begin{pmatrix}1, 5, 5\\-1, 0, 0\end{pmatrix}$ ($\delta=4$), $\begin{pmatrix}2, 2, 7\\-1, -1, 0\end{pmatrix}$ ($\delta=8$), $\begin{pmatrix}2, 3, 4\\0, 0, 0\end{pmatrix}$ ($\delta=4$), $\begin{pmatrix}3, 3, 3\\0, 0, -1\end{pmatrix}$ ($\delta=4$), $\begin{pmatrix}3, 3, 4\\-1, -1, -1\end{pmatrix}$ ($\delta=4$).
25	6	$\begin{pmatrix}1, 1, 25\\0, 0, 0\end{pmatrix}$ ($\delta=8$), $\begin{pmatrix}1, 2, 13\\-1, 0, 0\end{pmatrix}$ ($\delta=4$), $\begin{pmatrix}1, 5, 5\\0, 0, 0\end{pmatrix}$ ($\delta=8$), $\begin{pmatrix}2, 2, 9\\1, 1, 1\end{pmatrix}$ ($\delta=6$), $\begin{pmatrix}2, 3, 5\\-1, -1, 0\end{pmatrix}$ ($\delta=2$), $\begin{pmatrix}2, 3, 5\\0, 0, -1\end{pmatrix}$ ($\delta=4$).
26	5	$\begin{pmatrix}1, 1, 26\\0, 0, 0\end{pmatrix}$ ($\delta=8$), $\begin{pmatrix}1, 2, 13\\0, 0, 0\end{pmatrix}$ ($\delta=4$), $\begin{pmatrix}1, 3, 9\\-1, 0, 0\end{pmatrix}$ ($\delta=2$), $\begin{pmatrix}1, 5, 6\\-2, 0, 0\end{pmatrix}$ ($\delta=2$), $\begin{pmatrix}2, 2, 7\\0, -1, 0\end{pmatrix}$ ($\delta=4$).
27	9	$\begin{pmatrix}1, 1, 27\\0, 0, 0\end{pmatrix}$ ($\delta=8$), $\begin{pmatrix}1, 2, 14\\-1, 0, 0\end{pmatrix}$ ($\delta=4$), $\begin{pmatrix}1, 3, 9\\0, 0, 0\end{pmatrix}$ ($\delta=4$), $\begin{pmatrix}1, 4, 7\\-1, 0, 0\end{pmatrix}$ ($\delta=2$), $\begin{pmatrix}1, 6, 6\\-3, 0, 0\end{pmatrix}$ ($\delta=12$), $\begin{pmatrix}2, 2, 9\\0, 0, -1\end{pmatrix}$ ($\delta=12$), $\begin{pmatrix}2, 3, 5\\0, -1, 0\end{pmatrix}$ ($\delta=4$), $\begin{pmatrix}2, 3, 6\\1, 1, 1\end{pmatrix}$ ($\delta=2$), $\begin{pmatrix}2, 4, 5\\2, 1, 1\end{pmatrix}$ ($\delta=2$).
28	9	$\begin{pmatrix}1, 1, 28\\0, 0, 0\end{pmatrix}$ ($\delta=8$), $\begin{pmatrix}1, 2, 14\\0, 0, 0\end{pmatrix}$ ($\delta=4$), $\begin{pmatrix}1, 4, 7\\0, 0, 0\end{pmatrix}$ ($\delta=4$), $\begin{pmatrix}1, 4, 8\\-2, 0, 0\end{pmatrix}$ ($\delta=4$), $\begin{pmatrix}2, 2, 7\\0, 0, 0\end{pmatrix}$ ($\delta=8$), $\begin{pmatrix}2, 3, 5\\-1, 0, 0\end{pmatrix}$ ($\delta=2$), $\begin{pmatrix}2, 3, 6\\-1, 0, -1\end{pmatrix}$ ($\delta=2$), $\begin{pmatrix}2, 4, 5\\-2, -1, 0\end{pmatrix}$ ($\delta=4$), $\begin{pmatrix}3, 3, 4\\1, 1, 1\end{pmatrix}$ ($\delta=2$).
29	5	$\begin{pmatrix}1, 1, 29\\0, 0, 0\end{pmatrix}$ ($\delta=8$), $\begin{pmatrix}1, 2, 15\\-1, 0, 0\end{pmatrix}$ ($\delta=4$), $\begin{pmatrix}1, 3, 10\\-1, 0, 0\end{pmatrix}$ ($\delta=2$), $\begin{pmatrix}1, 5, 6\\-1, 0, 0\end{pmatrix}$ ($\delta=2$), $\begin{pmatrix}3, 3, 4\\0, -1, -1\end{pmatrix}$ ($\delta=1$).
30	7	$\begin{pmatrix}1, 1, 30\\0, 0, 0\end{pmatrix}$ ($\delta=8$), $\begin{pmatrix}1, 2, 15\\0, 0, 0\end{pmatrix}$ ($\delta=4$), $\begin{pmatrix}1, 3, 10\\0, 0, 0\end{pmatrix}$ ($\delta=4$), $\begin{pmatrix}1, 5, 6\\0, 0, 0\end{pmatrix}$ ($\delta=4$), $\begin{pmatrix}2, 3, 5\\0, 0, 0\end{pmatrix}$ ($\delta=4$), $\begin{pmatrix}2, 3, 6\\0, 0, -1\end{pmatrix}$ ($\delta=4$), $\begin{pmatrix}3, 3, 4\\-1, -1, 0\end{pmatrix}$ ($\delta=2$).
31	7	$\begin{pmatrix}1, 1, 31\\0, 0, 0\end{pmatrix}$ ($\delta=8$), $\begin{pmatrix}1, 2, 16\\-1, 0, 0\end{pmatrix}$ ($\delta=4$), $\begin{pmatrix}1, 4, 8\\-1, 0, 0\end{pmatrix}$ ($\delta=2$), $\begin{pmatrix}1, 5, 7\\-2, 0, 0\end{pmatrix}$ ($\delta=2$), $\begin{pmatrix}2, 2, 11\\1, 1, 1\end{pmatrix}$ ($\delta=6$), $\begin{pmatrix}2, 3, 6\\-1, -1, 0\end{pmatrix}$ ($\delta=2$), $\begin{pmatrix}2, 4, 5\\1, 1, 1\end{pmatrix}$ ($\delta=2$).

D	Anz.	Reducirte positive ternäre Formen für die Determinante $-D$.
32	12	$\begin{pmatrix}1, & 1, & 32\\0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=8$, $\begin{pmatrix}1, & 2, & 16\\0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}1, & 3, & 11\\-1, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}1, & 4, & 8\\0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}1, & 4, & 9\\-2, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}1, & 6, & 6\\-2, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}2, & 2, & 9\\-1, & -1, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=8$, $\begin{pmatrix}2, & 3, & 7\\1, & 1, & 1\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}2, & 4, & 5\\-2, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}3, & 3, & 4\\0, & 0, & -1\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}3, & 3, & 5\\-1, & -1, & -1\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}3, & 4, & 4\\2, & 1, & 1\end{pmatrix}$ $\delta=2$.
33	9	$\begin{pmatrix}1, & 1, & 33\\0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=8$, $\begin{pmatrix}1, & 2, & 17\\-1, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}1, & 3, & 11\\0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}1, & 6, & 7\\-3, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}2, & 2, & 11\\0, & 0, & -1\end{pmatrix}$ $\delta=12$, $\begin{pmatrix}2, & 3, & 6\\0, & -1, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}2, & 3, & 7\\-1, & 0, & -1\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}2, & 4, & 5\\-1, & 0, & -1\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}3, & 3, & 4\\0, & -1, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$.
34	6	$\begin{pmatrix}1, & 1, & 34\\0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=8$, $\begin{pmatrix}1, & 2, & 17\\0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}1, & 5, & 7\\-1, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}2, & 2, & 9\\0, & -1, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}2, & 3, & 6\\-1, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}2, & 4, & 5\\-1, & -1, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$.
35	9	$\begin{pmatrix}1, & 1, & 35\\0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=8$, $\begin{pmatrix}1, & 2, & 18\\-1, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}1, & 3, & 12\\-1, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}1, & 4, & 9\\-1, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}1, & 5, & 7\\0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}1, & 6, & 6\\-1, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}2, & 3, & 7\\0, & 0, & -1\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}2, & 4, & 5\\0, & 0, & -1\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}3, & 4, & 4\\-1, & -1, & -1\end{pmatrix}$ $\delta=2$.
36	14	$\begin{pmatrix}1, & 1, & 36\\0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=8$, $\begin{pmatrix}1, & 2, & 18\\0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}1, & 3, & 12\\0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}1, & 4, & 9\\0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}1, & 4, & 10\\-2, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}1, & 5, & 8\\-2, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}1, & 6, & 6\\0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=8$, $\begin{pmatrix}2, & 2, & 9\\0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=8$, $\begin{pmatrix}2, & 3, & 6\\0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}2, & 4, & 5\\0, & -1, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}2, & 5, & 5\\2, & 1, & 1\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}3, & 3, & 4\\0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=8$, $\begin{pmatrix}3, & 3, & 5\\1, & 1, & 1\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}3, & 4, & 4\\-2, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=12$.
37	7	$\begin{pmatrix}1, & 1, & 37\\0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=8$, $\begin{pmatrix}1, & 2, & 19\\-1, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}2, & 2, & 13\\1, & 1, & 1\end{pmatrix}$ $\delta=6$, $\begin{pmatrix}2, & 3, & 7\\-1, & -1, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}2, & 3, & 8\\1, & 1, & 1\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}2, & 5, & 5\\-2, & 0, & -1\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}3, & 3, & 5\\0, & -1, & -1\end{pmatrix}$ $\delta=1$.
38	6	$\begin{pmatrix}1, & 1, & 38\\0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=8$, $\begin{pmatrix}1, & 2, & 19\\0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}1, & 3, & 13\\-1, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}1, & 6, & 7\\-2, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}2, & 3, & 8\\-1, & 0, & -1\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}2, & 4, & 5\\-1, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$.
39	10	$\begin{pmatrix}1, & 1, & 39\\0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=8$, $\begin{pmatrix}1, & 2, & 20\\-1, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}1, & 3, & 13\\0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}1, & 4, & 10\\-1, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}1, & 5, & 8\\-1, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}1, & 6, & 8\\-3, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$,

D	Anz.	Reducirte positive ternäre Formen für die Determinante $-D$.
39	s. o.	$\begin{pmatrix}2, & 2, & 13\\ 0, & 0, & -1\end{pmatrix}_{\delta=12}$, $\begin{pmatrix}2, & 3, & 7\\ 0, & -1, & 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}3, & 3, & 5\\ -1, & -1, & 0\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}3, & 4, & 4\\ 1, & 1, & 1\end{pmatrix}_{\delta=2}$.
40	14	$\begin{pmatrix}1, & 1, & 40\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=8}$, $\begin{pmatrix}1, & 2, & 20\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}1, & 4, & 10\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}1, & 4, & 11\\ -2, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}1, & 5, & 8\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}1, & 7, & 7\\ -3, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$,
		$\begin{pmatrix}2, & 2, & 11\\ -1, & -1, & 0\end{pmatrix}_{\delta=8}$, $\begin{pmatrix}2, & 3, & 7\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}2, & 3, & 8\\ 0, & 0, & -1\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}2, & 4, & 5\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}2, & 5, & 5\\ 1, & 1, & 1\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}3, & 3, & 5\\ 0, & 0, & -1\end{pmatrix}_{\delta=4}$,
		$\begin{pmatrix}3, & 3, & 6\\ -1, & -1, & -1\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}3, & 4, & 4\\ 0, & -1, & -1\end{pmatrix}_{\delta=2}$.
41	7	$\begin{pmatrix}1, & 1, & 41\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=8}$, $\begin{pmatrix}1, & 2, & 21\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}1, & 3, & 14\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}1, & 5, & 9\\ -2, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}1, & 6, & 7\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}2, & 4, & 7\\ 2, & 1, & 1\end{pmatrix}_{\delta=2}$,
		$\begin{pmatrix}3, & 4, & 4\\ -1, & 0, & -1\end{pmatrix}_{\delta=1}$.
42	9	$\begin{pmatrix}1, & 1, & 42\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=8}$, $\begin{pmatrix}1, & 2, & 21\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}1, & 3, & 14\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}1, & 6, & 7\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}2, & 2, & 11\\ 0, & -1, & 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}2, & 3, & 7\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$,
		$\begin{pmatrix}2, & 3, & 9\\ 1, & 1, & 1\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}2, & 5, & 5\\ -2, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}3, & 3, & 5\\ 0, & -1, & 0\end{pmatrix}_{\delta=2}$.
43	8	$\begin{pmatrix}1, & 1, & 43\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=8}$, $\begin{pmatrix}1, & 2, & 22\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}1, & 4, & 11\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}2, & 2, & 15\\ 1, & 1, & 1\end{pmatrix}_{\delta=6}$, $\begin{pmatrix}2, & 3, & 8\\ -1, & -1, & 0\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}2, & 3, & 9\\ -1, & 0, & -1\end{pmatrix}_{\delta=2}$,
		$\begin{pmatrix}2, & 5, & 5\\ -1, & 0, & -1\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}3, & 4, & 5\\ 2, & 1, & 1\end{pmatrix}_{\delta=1}$.
44	13	$\begin{pmatrix}1, & 1, & 44\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=8}$, $\begin{pmatrix}1, & 2, & 22\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}1, & 3, & 15\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}1, & 4, & 11\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}1, & 4, & 12\\ -2, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}1, & 5, & 9\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=2}$,
		$\begin{pmatrix}1, & 6, & 8\\ -2, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}2, & 2, & 11\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=8}$, $\begin{pmatrix}2, & 4, & 7\\ -2, & -1, & 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}3, & 3, & 6\\ 1, & 1, & 1\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}3, & 4, & 4\\ 0, & 0, & -1\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}3, & 4, & 5\\ -2, & -1, & 0\end{pmatrix}_{\delta=2}$,
		$\begin{pmatrix}4 & 4, & 5\\ 2 & 2, & 2\end{pmatrix}_{\delta=6}$.
45	15	$\begin{pmatrix}1, & 1, & 45\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=8}$, $\begin{pmatrix}1, & 2, & 23\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}1, & 3, & 15\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}1, & 5, & 9\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}1, & 6, & 9\\ -3, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}1, & 7, & 7\\ -2, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$,

D	Anz.	Reducirte positive ternäre Formen für die Determinante $-D$.
45	s. o.	$\underset{\delta=12}{\begin{pmatrix}2, 2, 15\\ 0, 0, -1\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}2, 3, 8\\ 0, -1, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}2, 3, 9\\ 0, 0, -1\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}2, 4, 7\\ 1, 1, 1\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}2, 5, 5\\ 0, 0, -1\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}2, 5, 6\\ 2, 1, 1\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=8}{\begin{pmatrix}3, 3, 5\\ 0, 0, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=1}{\begin{pmatrix}3, 3, 6\\ 0, -1, -1\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}3, 4, 4\\ -1, 0, 0\end{pmatrix}}$.
46	6	$\underset{\delta=8}{\begin{pmatrix}1, 1, 46\\ 0, 0, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}1, 2, 23\\ 0, 0, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}1, 5, 10\\ -2, 0, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}2, 3, 8\\ -1, 0, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}2, 5, 6\\ -2, 0, -1\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=1}{\begin{pmatrix}3, 4, 5\\ -1, -1, -1\end{pmatrix}}$.
47	9	$\underset{\delta=8}{\begin{pmatrix}1, 1, 47\\ 0, 0, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}1, 2, 24\\ -1, 0, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}1, 3, 16\\ -1, 0, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}1, 4, 12\\ -1, 0, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}1, 6, 8\\ -1, 0, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}1, 7, 8\\ -3, 0, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}2, 3, 10\\ 1, 1, 1\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}2, 4, 7\\ -1, 0, -1\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}2, 5, 6\\ -2, -1, 0\end{pmatrix}}$.
48	20	$\underset{\delta=8}{\begin{pmatrix}1, 1, 48\\ 0, 0, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}1, 2, 24\\ 0, 0, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}1, 3, 16\\ 0, 0, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}1, 4, 12\\ 0, 0, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}1, 4, 13\\ -2, 0, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}1, 6, 8\\ 0, 0, 0\end{pmatrix}}$. $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}1, 7, 7\\ -1, 0, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=12}{\begin{pmatrix}1, 8, 8\\ -4, 0, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=8}{\begin{pmatrix}2, 2, 13\\ -1, -1, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}2, 3, 8\\ 0, 0, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}2, 3, 10\\ -1, 0, -1\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}2, 4, 7\\ -2, 0, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}2, 5, 5\\ -1, 0, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}3, 3, 6\\ -1, -1, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}3, 3, 6\\ 0, 0, -1\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}3, 3, 7\\ -1, -1, -1\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=8}{\begin{pmatrix}3, 4, 4\\ 0, 0, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}3, 4, 5\\ -2, 0, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=8}{\begin{pmatrix}4, 4, 5\\ -2, -2, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}4, 4, 5\\ 1, 2, 2\end{pmatrix}}$.
49	9	$\underset{\delta=8}{\begin{pmatrix}1, 1, 49\\ 0, 0, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}1, 2, 25\\ -1, 0, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}1, 5, 10\\ -1, 0, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=8}{\begin{pmatrix}1, 7, 7\\ 0, 0, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=6}{\begin{pmatrix}2, 2, 17\\ 1, 1, 1\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}2, 3, 9\\ -1, -1, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}2, 4, 7\\ 0, 0, -1\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}2, 5, 6\\ 1, 1, 1\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=6}{\begin{pmatrix}3, 5, 5\\ -2, -1, -1\end{pmatrix}}$.
50	10	$\underset{\delta=8}{\begin{pmatrix}1, 1, 50\\ 0, 0, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}1, 2, 25\\ 0, 0, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}1, 3, 17\\ -1, 0, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}1, 5, 10\\ 0, 0, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}1, 6, 9\\ -2, 0, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}2, 2, 13\\ 0, -1, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}2, 3, 10\\ 0, 0, -1\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}2, 4, 7\\ -1, -1, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=8}{\begin{pmatrix}2, 5, 5\\ 0, 0, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=1}{\begin{pmatrix}3, 4, 5\\ 1, 1, 1\end{pmatrix}}$.

D	Anz.	Reducirte positive ternäre Formen für die Determinante $-D$.
51	11	$\underset{\delta=8}{\begin{pmatrix}1, 1, 51\\0, 0, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}1, 2, 26\\-1, 0, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}1, 3, 17\\0, 0, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}1, 4, 13\\-1, 0, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}1, 5, 11\\-2, 0, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}1, 6, 10\\-3, 0, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=12}{\begin{pmatrix}2, 2, 17\\0, 0, -1\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}2, 3, 9\\0, -1, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}3, 3, 6\\0, -1, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=1}{\begin{pmatrix}3, 4, 5\\0, -1, -1\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}4, 4, 5\\2, 2, 1\end{pmatrix}}$.
52	13	$\underset{\delta=8}{\begin{pmatrix}1, 1, 52\\0, 0, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}1, 2, 26\\0, 0, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}1, 4, 13\\0, 0, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}1, 4, 14\\-2, 0, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}1, 7, 8\\-2, 0, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=8}{\begin{pmatrix}2, 2, 13\\0, 0, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}2, 3, 9\\-1, 0, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}2, 3, 11\\1, 1, 1\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}2, 4, 7\\0, -1, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}2, 5, 6\\-2, 0, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}2, 5, 6\\-1, 0, -1\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}3, 3, 7\\1, 1, 1\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=1}{\begin{pmatrix}3, 4, 5\\-1, 0, -1\end{pmatrix}}$.
53	8	$\underset{\delta=8}{\begin{pmatrix}1, 1, 53\\0, 0, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}1, 2, 27\\-1, 0, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}1, 3, 18\\-1, 0, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}1, 6, 9\\-1, 0, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}2, 3, 11\\-1, 0, -1\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}2, 5, 6\\-1, -1, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=1}{\begin{pmatrix}3, 3, 7\\0, -1, -1\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=1}{\begin{pmatrix}3, 4, 5\\-1, -1, 0\end{pmatrix}}$.
54	11	$\underset{\delta=8}{\begin{pmatrix}1, 1, 54\\0, 0, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}1, 2, 27\\0, 0, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}1, 3, 18\\0, 0, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}1, 5, 11\\-1, 0, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}1, 6, 9\\0, 0, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}1, 7, 9\\-3, 0, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}2, 3, 9\\0, 0, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}2, 4, 7\\-1, 0, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}2, 5, 6\\0, 0, -1\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}2, 5, 7\\2, 1, 1\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=1}{\begin{pmatrix}3, 4, 6\\2, 1, 1\end{pmatrix}}$.
55	13	$\underset{\delta=8}{\begin{pmatrix}1, 1, 55\\0, 0, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}1, 2, 28\\-1, 0, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}1, 4, 14\\-1, 0, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}1, 5, 11\\0, 0, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}1, 7, 8\\-1, 0, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}1, 8, 8\\-3, 0, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=6}{\begin{pmatrix}2, 2, 19\\1, 1, 1\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}2, 3, 10\\-1, -1, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}2, 3, 11\\0, 0, -1\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}2, 4, 9\\2, 1, 1\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}2, 5, 6\\0, -1, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}2, 5, 7\\-2, 0, -1\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}3, 4, 5\\0, 0, -1\end{pmatrix}}$.
56	16	$\underset{\delta=8}{\begin{pmatrix}1, 1, 56\\0, 0, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}1, 2, 28\\0, 0, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}1, 3, 19\\-1, 0, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}1, 4, 14\\0, 0, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}1, 4, 15\\-2, 0, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}1, 5, 12\\-2, 0, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}1, 6, 10\\-2, 0, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}1, 7, 8\\0, 0, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}1, 8, 9\\-4, 0, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=8}{\begin{pmatrix}2, 2, 15\\-1, -1, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}2, 4, 7\\0, 0, 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}3, 3, 7\\0, 0, -1\end{pmatrix}}$,

D	Anz.	Reducirte positive ternäre Formen für die Determinante $-D$.
56	s. o.	$\begin{pmatrix} 3, & 3, & 8 \\ -1, & -1, & -1 \end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix} 3, & 4, & 5 \\ 0, & -1, & 0 \end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix} 3, & 4, & 6 \\ -2, & -1, & 0 \end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix} 4, & 4, & 5 \\ 1, & 1, & 2 \end{pmatrix}$ $\delta=2$.
57	12	$\begin{pmatrix} 1, & 1, & 57 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$ $\delta=8$, $\begin{pmatrix} 1, & 2, & 29 \\ -1, & 0, & 0 \end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix} 1, & 3, & 19 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix} 1, & 6, & 11 \\ -3, & 0, & 0 \end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix} 2, & 2, & 19 \\ 0, & 0, & -1 \end{pmatrix}$ $\delta=12$, $\begin{pmatrix} 2, & 3, & 10 \\ 0, & -1, & 0 \end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix} 2, & 3, & 12 \\ 1, & 1, & 1 \end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix} 2, & 5, & 7 \\ -2, & -1, & 0 \end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix} 3, & 3, & 7 \\ -1, & -1, & 0 \end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix} 3, & 4, & 5 \\ -1, & 0, & 0 \end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix} 3, & 4, & 6 \\ -1, & -1, & -1 \end{pmatrix}$ $\delta=1$, $\begin{pmatrix} 3, & 5, & 5 \\ 2, & 1, & 1 \end{pmatrix}$ $\delta=2$.
58	8	$\begin{pmatrix} 1, & 1, & 58 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$ $\delta=8$, $\begin{pmatrix} 1, & 2, & 29 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix} 2, & 2, & 15 \\ 0, & -1, & 0 \end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix} 2, & 3, & 10 \\ -1, & 0, & 0 \end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix} 2, & 3, & 12 \\ -1, & 0, & -1 \end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix} 2, & 5, & 6 \\ -1, & 0, & 0 \end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix} 2, & 5, & 7 \\ 1, & 1, & 1 \end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix} 3, & 5, & 5 \\ -2, & 0, & -1 \end{pmatrix}$ $\delta=1$.
59	10	$\begin{pmatrix} 1, & 1, & 59 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$ $\delta=8$, $\begin{pmatrix} 1, & 2, & 30 \\ -1, & 0, & 0 \end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix} 1, & 3, & 20 \\ -1, & 0, & 0 \end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix} 1, & 4, & 15 \\ -1, & 0, & 0 \end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix} 1, & 5, & 12 \\ -1, & 0, & 0 \end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix} 1, & 6, & 10 \\ -1, & 0, & 0 \end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix} 1, & 7, & 9 \\ -2, & 0, & 0 \end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix} 2, & 4, & 9 \\ 1, & 1, & 1 \end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix} 2, & 6, & 7 \\ 3, & 1, & 1 \end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix} 4, & 4, & 5 \\ 1, & 2, & 1 \end{pmatrix}$ $\delta=1$.
60	22	$\begin{pmatrix} 1, & 1, & 60 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$ $\delta=8$, $\begin{pmatrix} 1, & 2, & 30 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix} 1, & 3, & 20 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix} 1, & 4, & 15 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix} 1, & 4, & 16 \\ -2, & 0, & 0 \end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix} 1, & 5, & 12 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix} 1, & 6, & 10 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix} 1, & 8, & 8 \\ -2, & 0, & 0 \end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix} 2, & 2, & 15 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$ $\delta=8$, $\begin{pmatrix} 2, & 3, & 10 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix} 2, & 3, & 12 \\ 0, & 0, & -1 \end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix} 2, & 4, & 9 \\ -2, & -1, & 0 \end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix} 2, & 5, & 6 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix} 2, & 6, & 7 \\ -3, & -1, & 0 \end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix} 3, & 3, & 7 \\ 0, & -1, & 0 \end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix} 3, & 3, & 8 \\ 1, & 1, & 1 \end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix} 3, & 4, & 5 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix} 3, & 4, & 6 \\ -2, & 0, & 0 \end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix} 3, & 5, & 5 \\ -1, & -1, & -1 \end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix} 4, & 4, & 5 \\ -1, & -2, & 0 \end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix} 4, & 4, & 5 \\ 0, & 0, & -2 \end{pmatrix}$ $\delta=12$, $\begin{pmatrix} 4, & 5, & 5 \\ 2, & 2, & 2 \end{pmatrix}$ $\delta=4$.
61	10	$\begin{pmatrix} 1, & 1, & 61 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$ $\delta=8$, $\begin{pmatrix} 1, & 2, & 31 \\ -1, & 0, & 0 \end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix} 1, & 5, & 13 \\ -2, & 0, & 0 \end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix} 1, & 7, & 10 \\ -3, & 0, & 0 \end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix} 2, & 2, & 21 \\ 1, & 1, & 1 \end{pmatrix}$ $\delta=6$, $\begin{pmatrix} 2, & 3, & 11 \\ -1, & -1, & 0 \end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix} 2, & 4, & 9 \\ -1, & 0, & -1 \end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix} 2, & 5, & 7 \\ -1, & 0, & -1 \end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix} 3, & 3, & 8 \\ 0, & -1, & -1 \end{pmatrix}$ $\delta=1$, $\begin{pmatrix} 3, & 4, & 6 \\ 1, & 1, & 1 \end{pmatrix}$ $\delta=1$.
62	8	$\begin{pmatrix} 1, & 1, & 62 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$ $\delta=8$, $\begin{pmatrix} 1, & 2, & 31 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix} 1, & 3, & 21 \\ -1, & 0, & 0 \end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix} 1, & 6, & 11 \\ -2, & 0, & 0 \end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix} 1, & 7, & 9 \\ -1, & 0, & 0 \end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix} 2, & 3, & 13 \\ 1, & 1, & 1 \end{pmatrix}$ $\delta=2$,

D	Anz.	Reducirte positive ternäre Formen für die Determinante $-D$.
62	s. o.	$\begin{pmatrix}2, & 5, & 7\\ -2, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}3, & 4, & 6\\ 0, & -1, & -1\end{pmatrix}$ $\delta=1$.
63	19	$\begin{pmatrix}1, & 1, & 63\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=8$, $\begin{pmatrix}1, & 2, & 32\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}1, & 3, & 21\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}1, & 4, & 16\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}1, & 6, & 12\\ -3, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}1, & 7, & 9\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$,
		$\begin{pmatrix}1, & 8, & 8\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}1, & 8, & 9\\ -3, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}2, & 2, & 21\\ 0, & 0, & -1\end{pmatrix}$ $\delta=12$, $\begin{pmatrix}2, & 3, & 11\\ 0, & -1, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}2, & 3, & 13\\ -1, & 0, & -1\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}2, & 4, & 9\\ 0, & 0, & -1\end{pmatrix}$ $\delta=4$,
		$\begin{pmatrix}2, & 5, & 7\\ -1, & -1, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}2, & 5, & 7\\ 0, & 0, & -1\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}2, & 5, & 8\\ 2, & 1, & 1\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}3, & 3, & 7\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=8$, $\begin{pmatrix}3, & 4, & 6\\ -1, & 0, & -1\end{pmatrix}$ $\delta=1$, $\begin{pmatrix}3, & 5, & 5\\ -2, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$,
		$\begin{pmatrix}3, & 5, & 6\\ -2, & -1, & -1\end{pmatrix}$ $\delta=2$.
64	17	$\begin{pmatrix}1, & 1, & 64\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=8$, $\begin{pmatrix}1, & 2, & 32\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}1, & 4, & 16\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}1, & 4, & 17\\ -2, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}1, & 5, & 13\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}1, & 8, & 8\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=8$,
		$\begin{pmatrix}1, & 8, & 10\\ -4, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}2, & 2, & 17\\ -1, & -1, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=8$, $\begin{pmatrix}2, & 3, & 11\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}2, & 4, & 9\\ -2, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}2, & 5, & 8\\ -2, & 0, & -1\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}3, & 3, & 8\\ 0, & 0, & -1\end{pmatrix}$ $\delta=4$,
		$\begin{pmatrix}3, & 3, & 9\\ -1, & -1, & -1\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}3, & 5, & 5\\ 1, & 1, & 1\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}4, & 4, & 5\\ 0, & -2, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}4, & 5, & 5\\ -2, & 0, & -2\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}4, & 5, & 5\\ 1, & 2, & 2\end{pmatrix}$ $\delta=8$.
65	12	$\begin{pmatrix}1, & 1, & 65\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=8$, $\begin{pmatrix}1, & 2, & 33\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}1, & 3, & 22\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}1, & 5, & 13\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}1, & 6, & 11\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}1, & 9, & 9\\ -4, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$,
		$\begin{pmatrix}2, & 3, & 13\\ 0, & 0, & -1\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}2, & 5, & 7\\ 0, & -1, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}3, & 4, & 6\\ -1, & -1, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=1$, $\begin{pmatrix}3, & 4, & 7\\ 2, & 1, & 1\end{pmatrix}$ $\delta=1$, $\begin{pmatrix}3, & 5, & 5\\ 0, & -1, & -1\end{pmatrix}$ $\delta=2$,
		$\begin{pmatrix}4, & 4, & 5\\ -1, & -1, & -1\end{pmatrix}$ $\delta=2$.
66	12	$\begin{pmatrix}1, & 1, & 66\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=8$, $\begin{pmatrix}1, & 2, & 33\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}1, & 3, & 22\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}1, & 5, & 14\\ -2, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}1, & 6, & 11\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}1, & 7, & 10\\ -2, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$,
		$\begin{pmatrix}2, & 2, & 17\\ 0, & -1, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}2, & 3, & 11\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}2, & 4, & 9\\ -1, & -1, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}2, & 6, & 7\\ -3, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}3, & 3, & 8\\ -1, & -1, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}3, & 4, & 6\\ 0, & 0, & -1\end{pmatrix}$ $\delta=2$.
67	11	$\begin{pmatrix}1, & 1, & 67\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=8$, $\begin{pmatrix}1, & 2, & 34\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}1, & 4, & 17\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}2, & 2, & 23\\ 1, & 1, & 1\end{pmatrix}$ $\delta=6$, $\begin{pmatrix}2, & 3, & 12\\ -1, & -1, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}2, & 3, & 14\\ 1, & 1, & 1\end{pmatrix}$ $\delta=2$,

D	Anz.	Reducirte positive ternäre Formen für die Determinante $-D$.
67	s. o.	$\begin{pmatrix}2, & 5, & 8\\ -2, & -1, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}2, & 5, & 8\\ 1, & 1, & 1\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}2, & 6, & 7\\ 2, & 1, & 1\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}3, & 5, & 5\\ -1, & 0, & -1\end{pmatrix}$ $\delta=1$, $\begin{pmatrix}4, & 5, & 5\\ 2, & 1, & 2\end{pmatrix}$ $\delta=1$.
68	17	$\begin{pmatrix}1, & 1, & 68\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=8$, $\begin{pmatrix}1, & 2, & 34\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}1, & 3, & 23\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}1, & 4, & 17\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}1, & 4, & 18\\ -2, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}1, & 6, & 12\\ -2, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$,
		$\begin{pmatrix}1, & 7, & 11\\ -3, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}1, & 8, & 9\\ -2, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}2, & 2, & 17\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=8$, $\begin{pmatrix}2, & 3, & 14\\ -1, & 0, & -1\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}2, & 4, & 9\\ 0, & -1, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}2, & 5, & 7\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$,
		$\begin{pmatrix}3, & 3, & 9\\ 1, & 1, & 1\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}3, & 4, & 6\\ 0, & -1, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}3, & 4, & 7\\ -2, & -1, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}3, & 4, & 7\\ -1, & -1, & -1\end{pmatrix}$ $\delta=1$, $\begin{pmatrix}4, & 4, & 7\\ 2, & 2, & 2\end{pmatrix}$ $\delta=6$.
69	14	$\begin{pmatrix}1, & 1, & 69\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=8$, $\begin{pmatrix}1, & 2, & 35\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}1, & 3, & 23\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}1, & 5, & 14\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}1, & 6, & 13\\ -3, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}1, & 7, & 10\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$,
		$\begin{pmatrix}2, & 2, & 23\\ 0, & 0, & -1\end{pmatrix}$ $\delta=12$, $\begin{pmatrix}2, & 3, & 12\\ 0, & -1, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}2, & 4, & 11\\ 2, & 1, & 1\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}2, & 6, & 7\\ -2, & 0, & -1\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}3, & 3, & 8\\ 0, & -1, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}3, & 3, & 9\\ 0, & -1, & -1\end{pmatrix}$ $\delta=1$,
		$\begin{pmatrix}3, & 4, & 6\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}4, & 4, & 5\\ 1, & 1, & 1\end{pmatrix}$ $\delta=2$.
70	12	$\begin{pmatrix}1, & 1, & 70\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=8$, $\begin{pmatrix}1, & 2, & 35\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}1, & 5, & 14\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}1, & 7, & 10\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}2, & 3, & 12\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}2, & 3, & 14\\ 0, & 0, & -1\end{pmatrix}$ $\delta=4$,
		$\begin{pmatrix}2, & 4, & 9\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}2, & 5, & 7\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}2, & 5, & 8\\ -1, & 0, & -1\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}2, & 6, & 7\\ -2, & -1, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}3, & 5, & 5\\ 0, & 0, & -1\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}4, & 5, & 5\\ -2, & -1, & -1\end{pmatrix}$ $\delta=2$.
71	11	$\begin{pmatrix}1, & 1, & 71\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=8$, $\begin{pmatrix}1, & 2, & 36\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}1, & 3, & 24\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}1, & 4, & 18\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}1, & 5, & 15\\ -2, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}1, & 6, & 12\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$,
		$\begin{pmatrix}1, & 8, & 9\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}1, & 8, & 10\\ -3, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}2, & 6, & 7\\ 1, & 1, & 1\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}3, & 5, & 6\\ 2, & 1, & 1\end{pmatrix}$ $\delta=1$, $\begin{pmatrix}4, & 4, & 5\\ 0, & -1, & -1\end{pmatrix}$ $\delta=1$.
72	28	$\begin{pmatrix}1, & 1, & 72\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=8$, $\begin{pmatrix}1, & 2, & 36\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}1, & 3, & 24\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}1, & 4, & 18\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}1, & 4, & 19\\ -2, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}1, & 6, & 12\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$,
		$\begin{pmatrix}1, & 8, & 9\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}1, & 8, & 11\\ -4, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}1, & 9, & 9\\ -3, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}2, & 2, & 19\\ -1, & -1, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=8$, $\begin{pmatrix}2, & 3, & 12\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}2, & 3, & 15\\ 1, & 1, & 1\end{pmatrix}$ $\delta=2$,
		$\begin{pmatrix}2, & 4, & 9\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}2, & 5, & 8\\ -2, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}2, & 5, & 8\\ 0, & 0, & -1\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}2, & 5, & 9\\ 2, & 1, & 1\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}2, & 7, & 7\\ 3, & 1, & 1\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}3, & 3, & 8\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=8$,

D	Anz.	Reducirte positive ternäre Formen für die Determinante $-D$.
72	s. o.	$\begin{pmatrix}3, 3, 9\\ 0, 0, -1\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}3, 3, 10\\ -1, -1, -1\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}3, 4, 6\\ 0, 0, 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}3, 4, 7\\ -2, 0, 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}3, 4, 7\\ 1, 1, 1\end{pmatrix}_{\delta=1}$, $\begin{pmatrix}3, 5, 5\\ -1, 0, 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$,
		$\begin{pmatrix}3, 5, 6\\ -2, 0, -1\end{pmatrix}_{\delta=1}$, $\begin{pmatrix}4, 4, 5\\ -1, -1, 0\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}4, 4, 7\\ 1, 2, 2\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}5, 5, 5\\ -1, -2, -2\end{pmatrix}_{\delta=8}$.
73	12	$\begin{pmatrix}1, 1, 73\\ 0, 0, 0\end{pmatrix}_{\delta=8}$, $\begin{pmatrix}1, 2, 37\\ -1, 0, 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}1, 7, 11\\ -2, 0, 0\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}2, 2, 25\\ 1, 1, 1\end{pmatrix}_{\delta=6}$, $\begin{pmatrix}2, 3, 13\\ -1, -1, 0\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}2, 3, 15\\ -1, 0, -1\end{pmatrix}_{\delta=2}$,
		$\begin{pmatrix}2, 4, 11\\ 1, 1, 1\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}2, 5, 8\\ -1, -1, 0\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}2, 5, 9\\ -2, 0, -1\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}2, 7, 7\\ -3, 0, -1\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}3, 4, 7\\ 0, -1, -1\end{pmatrix}_{\delta=1}$,
		$\begin{pmatrix}3, 5, 6\\ -2, -1, 0\end{pmatrix}_{\delta=1}$.
74	9	$\begin{pmatrix}1, 1, 74\\ 0, 0, 0\end{pmatrix}_{\delta=8}$, $\begin{pmatrix}1, 2, 37\\ 0, 0, 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}1, 3, 25\\ -1, 0, 0\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}1, 5, 15\\ -1, 0, 0\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}1, 6, 13\\ -2, 0, 0\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}1, 9, 10\\ -4, 0, 0\end{pmatrix}_{\delta=2}$,
		$\begin{pmatrix}2, 2, 19\\ 0, -1, 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}3, 4, 7\\ -1, 0, -1\end{pmatrix}_{\delta=1}$, $\begin{pmatrix}3, 5, 6\\ -1, -1, -1\end{pmatrix}_{\delta=1}$.
75	19	$\begin{pmatrix}1, 1, 75\\ 0, 0, 0\end{pmatrix}_{\delta=8}$, $\begin{pmatrix}1, 2, 38\\ -1, 0, 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}1, 3, 25\\ 0, 0, 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}1, 4, 19\\ -1, 0, 0\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}1, 5, 15\\ 0, 0, 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}1, 6, 14\\ -3, 0, 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$,
		$\begin{pmatrix}1, 7, 12\\ -3, 0, 0\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}1, 10, 10\\ -5, 0, 0\end{pmatrix}_{\delta=12}$, $\begin{pmatrix}2, 2, 25\\ 0, 0, -1\end{pmatrix}_{\delta=12}$, $\begin{pmatrix}2, 3, 13\\ 0, -1, 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}2, 3, 15\\ 0, 0, -1\end{pmatrix}_{\delta=4}$,
		$\begin{pmatrix}2, 4, 11\\ -1, 0, -1\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}2, 5, 8\\ 0, -1, 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}2, 6, 7\\ -1, 0, -1\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}3, 3, 9\\ -1, -1, 0\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}3, 5, 5\\ 0, 0, 0\end{pmatrix}_{\delta=8}$, $\begin{pmatrix}3, 6, 6\\ 3, 1, 1\end{pmatrix}_{\delta=2}$,
		$\begin{pmatrix}4, 4, 5\\ 0, 0, -1\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}4, 5, 5\\ 1, 1, 2\end{pmatrix}_{\delta=1}$.
76	18	$\begin{pmatrix}1, 1, 76\\ 0, 0, 0\end{pmatrix}_{\delta=8}$, $\begin{pmatrix}1, 2, 38\\ 0, 0, 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}1, 4, 19\\ 0, 0, 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}1, 4, 20\\ -2, 0, 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}1, 5, 16\\ -2, 0, 0\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}1, 7, 11\\ -1, 0, 0\end{pmatrix}_{\delta=2}$,
		$\begin{pmatrix}1, 8, 10\\ -2, 0, 0\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}2, 2, 19\\ 0, 0, 0\end{pmatrix}_{\delta=8}$, $\begin{pmatrix}2, 3, 13\\ -1, 0, 0\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}2, 4, 11\\ -2, -1, 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}2, 5, 9\\ 1, 1, 1\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}2, 6, 7\\ -2, 0, 0\end{pmatrix}_{\delta=2}$,
		$\begin{pmatrix}2, 6, 7\\ -1, -1, 0\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}3, 3, 10\\ 1, 1, 1\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}3, 4, 8\\ 2, 1, 1\end{pmatrix}_{\delta=1}$, $\begin{pmatrix}4, 4, 5\\ 0, -1, 0\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}4, 5, 5\\ -1, 0, -2\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}4, 5, 6\\ 2, 2, 2\end{pmatrix}_{\delta=2}$.

D	Anz.	Reducirte positive ternäre Formen für die Determinante $-D$.
77	14	$\begin{pmatrix}1, & 1, & 77\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=8}$, $\begin{pmatrix}1, & 2, & 39\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}1, & 3, & 26\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}1, & 6, & 13\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}1, & 7, & 11\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}1, & 9, & 9\\ -2, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$,
		$\begin{pmatrix}2, & 3, & 16\\ 1, & 1, & 1\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}2, & 4, & 11\\ 0, & 0, & -1\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}2, & 5, & 9\\ -2, & -1, & 0\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}2, & 6, & 7\\ 0, & 0, & -1\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}3, & 3, & 10\\ 0, & -1, & -1\end{pmatrix}_{\delta=1}$,
		$\begin{pmatrix}3, & 4, & 7\\ -1, & -1, & 0\end{pmatrix}_{\delta=1}$, $\begin{pmatrix}3, & 4, & 7\\ 0, & 0, & -1\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}3, & 5, & 7\\ -2, & -1, & -1\end{pmatrix}_{\delta=2}$.
78	12	$\begin{pmatrix}1, & 1, & 78\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=8}$, $\begin{pmatrix}1, & 2, & 39\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}1, & 3, & 26\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}1, & 6, & 13\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}2, & 3, & 13\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}2, & 3, & 16\\ -1, & 0, & -1\end{pmatrix}_{\delta=2}$,
		$\begin{pmatrix}2, & 5, & 8\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}2, & 6, & 7\\ 0, & -1, & 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}3, & 3, & 9\\ 0, & -1, & 0\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}3, & 5, & 6\\ -2, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}3, & 5, & 6\\ 1, & 1, & 1\end{pmatrix}_{\delta=1}$, $\begin{pmatrix}4, & 5, & 5\\ 2, & 1, & 1\end{pmatrix}_{\delta=2}$.
79	12	$\begin{pmatrix}1, & 1, & 79\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=8}$, $\begin{pmatrix}1, & 2, & 40\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}1, & 4, & 20\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}1, & 5, & 16\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}1, & 8, & 10\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=2}$,
		$\begin{pmatrix}1, & 8, & 11\\ -3, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}2, & 2, & 27\\ 1, & 1, & 1\end{pmatrix}_{\delta=6}$, $\begin{pmatrix}2, & 3, & 14\\ -1, & -1, & 0\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}2, & 5, & 9\\ -1, & 0, & -1\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}3, & 4, & 8\\ -1, & -1, & -1\end{pmatrix}_{\delta=1}$,
		$\begin{pmatrix}3, & 5, & 6\\ 0, & -1, & -1\end{pmatrix}_{\delta=1}$, $\begin{pmatrix}4, & 5, & 5\\ -2, & 0, & -1\end{pmatrix}_{\delta=1}$.
80	28	$\begin{pmatrix}1, & 1, & 80\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=8}$, $\begin{pmatrix}1, & 2, & 40\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}1, & 3, & 27\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}1, & 4, & 20\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}1, & 4, & 21\\ -2, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}1, & 5, & 16\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$,
		$\begin{pmatrix}1, & 6, & 14\\ -2, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}1, & 7, & 12\\ -2, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}1, & 8, & 10\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}1, & 8, & 12\\ -4, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}1, & 9, & 9\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}2, & 2, & 21\\ -1, & -1, & 0\end{pmatrix}_{\delta=8}$,
		$\begin{pmatrix}2, & 3, & 16\\ 0, & 0, & -1\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}2, & 4, & 11\\ -2, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}2, & 5, & 8\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}2, & 7, & 7\\ -3, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}2, & 7, & 7\\ 2, & 1, & 1\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}3, & 3, & 10\\ 0, & 0, & -1\end{pmatrix}_{\delta=4}$,
		$\begin{pmatrix}3, & 3, & 11\\ -1, & -1, & -1\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}3, & 4, & 7\\ 0, & -1, & 0\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}3, & 4, & 8\\ -2, & -1, & 0\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}3, & 6, & 6\\ -2, & -1, & -1\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}4, & 4, & 5\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=8}$,
		$\begin{pmatrix}4, & 4, & 7\\ -2, & -2, & 0\end{pmatrix}_{\delta=8}$, $\begin{pmatrix}4, & 4, & 7\\ 1, & 1, & 2\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}4, & 5, & 5\\ 0, & 0, & -2\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}4, & 5, & 6\\ -2, & 0, & -2\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}4, & 5, & 6\\ 1, & 2, & 2\end{pmatrix}_{\delta=4}$.
81	16	$\begin{pmatrix}1, & 1, & 81\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=8}$, $\begin{pmatrix}1, & 2, & 41\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}1, & 3, & 27\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}1, & 5, & 17\\ -2, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}1, & 6, & 15\\ -3, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}1, & 9, & 9\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=8}$,

D	Anz.	Reducirte positive ternäre Formen für die Determinante $-D$.
81	s. o.	$\begin{pmatrix}1, 9, 10\\ -3, 0, 0\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}2, 2, 27\\ 0, 0, -1\end{pmatrix}_{\delta=12}$, $\begin{pmatrix}2, 3, 14\\ 0, -1, 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}2, 5, 9\\ 0, 0, -1\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}2, 5, 10\\ 2, 1, 1\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}2, 6, 9\\ 3, 1, 1\end{pmatrix}_{\delta=2}$,
		$\begin{pmatrix}3, 4, 7\\ -1, 0, 0\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}3, 5, 6\\ -1, 0, -1\end{pmatrix}_{\delta=1}$, $\begin{pmatrix}4, 4, 7\\ 2, 2, 1\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}5, 5, 5\\ 2, 2, 2\end{pmatrix}_{\delta=6}$.
82	11	$\begin{pmatrix}1, 1, 82\\ 0, 0, 0\end{pmatrix}_{\delta=8}$, $\begin{pmatrix}1, 2, 41\\ 0, 0, 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}1, 7, 13\\ -3, 0, 0\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}2, 2, 21\\ 0, -1, 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}2, 3, 14\\ -1, 0, 0\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}2, 3, 17\\ 1, 1, 1\end{pmatrix}_{\delta=2}$,
		$\begin{pmatrix}2, 4, 11\\ -1, -1, 0\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}2, 5, 9\\ -2, 0, 0\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}2, 5, 10\\ -2, 0, -1\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}2, 6, 7\\ -1, 0, 0\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}3, 5, 6\\ -1, -1, 0\end{pmatrix}_{\delta=1}$.
83	13	$\begin{pmatrix}1, 1, 83\\ 0, 0, 0\end{pmatrix}_{\delta=8}$, $\begin{pmatrix}1, 2, 42\\ -1, 0, 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}1, 3, 28\\ -1, 0, 0\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}1, 4, 21\\ -1, 0, 0\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}1, 6, 14\\ -1, 0, 0\end{pmatrix}_{\delta=2}$,
		$\begin{pmatrix}1, 7, 12\\ -1, 0, 0\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}1, 9, 11\\ -4, 0, 0\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}2, 3, 17\\ -1, 0, -1\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}2, 4, 13\\ 2, 1, 1\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}2, 5, 9\\ -1, -1, 0\end{pmatrix}_{\delta=2}$.
		$\begin{pmatrix}2, 7, 7\\ -2, 0, -1\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}3, 4, 8\\ 1, 1, 1\end{pmatrix}_{\delta=1}$, $\begin{pmatrix}4, 5, 6\\ 2, 1, 2\end{pmatrix}_{\delta=1}$.
84	26	$\begin{pmatrix}1, 1, 84\\ 0, 0, 0\end{pmatrix}_{\delta=8}$, $\begin{pmatrix}1, 2, 42\\ 0, 0, 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}1, 3, 28\\ 0, 0, 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}1, 4, 21\\ 0, 0, 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}1, 4, 22\\ -2, 0, 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}1, 5, 17\\ -1, 0, 0\end{pmatrix}_{\delta=2}$,
		$\begin{pmatrix}1, 6, 14\\ 0, 0, 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}1, 7, 12\\ 0, 0, 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}1, 8, 11\\ -2, 0, 0\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}1, 10, 10\\ -4, 0, 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}2, 2, 21\\ 0, 0, 0\end{pmatrix}_{\delta=8}$, $\begin{pmatrix}2, 3, 14\\ 0, 0, 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$,
		$\begin{pmatrix}2, 4, 11\\ 0, -1, 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}2, 6, 7\\ 0, 0, 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}2, 6, 9\\ -3, -1, 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}2, 7, 7\\ 1, 1, 1\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}3, 3, 10\\ -1, -1, 0\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}3, 3, 11\\ 1, 1, 1\end{pmatrix}_{\delta=2}$,
		$\begin{pmatrix}3, 4, 7\\ 0, 0, 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}3, 4, 8\\ -2, 0, 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}3, 4, 8\\ 0, -1, -1\end{pmatrix}_{\delta=1}$, $\begin{pmatrix}3, 5, 6\\ 0, 0, -1\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}4, 4, 7\\ 0, 0, -2\end{pmatrix}_{\delta=12}$, $\begin{pmatrix}4, 5, 5\\ -2, 0, 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$,
		$\begin{pmatrix}4, 5, 5\\ -1, -1, -1\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}4, 5, 6\\ -2, -2, 0\end{pmatrix}_{\delta=2}$.
85	15	$\begin{pmatrix}1, 1, 85\\ 0, 0, 0\end{pmatrix}_{\delta=8}$, $\begin{pmatrix}1, 2, 43\\ -1, 0, 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}1, 5, 17\\ 0, 0, 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}1, 10, 11\\ -5, 0, 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}2, 2, 29\\ 1, 1, 1\end{pmatrix}_{\delta=6}$, $\begin{pmatrix}2, 3, 15\\ -1, -1, 0\end{pmatrix}_{\delta=2}$,
		$\begin{pmatrix}2, 3, 17\\ 0, 0, -1\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}2, 5, 9\\ 0, -1, 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}2, 5, 10\\ 1, 1, 1\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}2, 7, 8\\ 3, 1, 1\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}3, 3, 11\\ 0, -1, -1\end{pmatrix}_{\delta=1}$, $\begin{pmatrix}3, 4, 8\\ -1, 0, -1\end{pmatrix}_{\delta=1}$,

D	Anz.	Reducirte positive ternäre Formen für die Determinante —*D*.
85	s. o.	$\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}3,&5,&6\\0,&-1,&0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=1}{\begin{pmatrix}3,&5,&7\\2,&1,&1\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}5,&5,&5\\0,&-2,&-2\end{pmatrix}}$.
86	10	$\underset{\delta=8}{\begin{pmatrix}1,&1,&86\\0,&0,&0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}1,&2,&43\\0,&0,&0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}1,&3,&29\\-1,&0,&0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}1,&5,&18\\-2,&0,&0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}1,&6,&15\\-2,&0,&0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}1,&9,&10\\-2,&0,&0\end{pmatrix}}$,
		$\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}2,&4,&11\\-1,&0,&0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}2,&7,&8\\-3,&0,&-1\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=1}{\begin{pmatrix}3,&5,&7\\-2,&0,&-1\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=1}{\begin{pmatrix}4,&5,&6\\2,&2,&1\end{pmatrix}}$.
87	17	$\underset{\delta=8}{\begin{pmatrix}1,&1,&87\\0,&0,&0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}1,&2,&44\\-1,&0,&0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}1,&3,&29\\0,&0,&0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}1,&4,&22\\-1,&0,&0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}1,&6,&16\\-3,&0,&0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}1,&7,&13\\-2,&0,&0\end{pmatrix}}$,
		$\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}1,&8,&11\\-1,&0,&0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}1,&8,&12\\-3,&0,&0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=12}{\begin{pmatrix}2,&2,&29\\0,&0,&-1\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}2,&3,&15\\0,&-1,&0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}2,&3,&18\\1,&1,&1\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}2,&4,&13\\1,&1,&1\end{pmatrix}}$,
		$\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}2,&5,&10\\-2,&-1,&0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}2,&7,&8\\-3,&-1,&0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}3,&3,&10\\0,&-1,&0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=1}{\begin{pmatrix}3,&4,&9\\2,&1,&1\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}3,&5,&6\\-1,&0,&0\end{pmatrix}}$.
88	20	$\underset{\delta=8}{\begin{pmatrix}1,&1,&88\\0,&0,&0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}1,&2,&44\\0,&0,&0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}1,&4,&22\\0,&0,&0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}1,&4,&23\\-2,&0,&0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}1,&8,&11\\0,&0,&0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}1,&8,&13\\-4,&0,&0\end{pmatrix}}$,
		$\underset{\delta=8}{\begin{pmatrix}2,&2,&23\\-1,&-1,&0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}2,&3,&15\\-1,&0,&0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}2,&3,&18\\-1,&0,&-1\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}2,&4,&11\\0,&0,&0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}2,&5,&9\\-1,&0,&0\end{pmatrix}}$,
		$\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}2,&5,&10\\-1,&0,&-1\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}3,&3,&11\\0,&0,&-1\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}3,&3,&12\\-1,&-1,&-1\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}3,&4,&8\\0,&0,&-1\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=1}{\begin{pmatrix}3,&5,&7\\-2,&-1,&0\end{pmatrix}}$,
		$\underset{\delta=1}{\begin{pmatrix}3,&5,&7\\-1,&-1,&-1\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}3,&6,&6\\2,&1,&1\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}4,&5,&5\\1,&1,&1\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}5,&5,&5\\1,&2,&2\end{pmatrix}}$.
89	13	$\underset{\delta=8}{\begin{pmatrix}1,&1,&89\\0,&0,&0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}1,&2,&45\\-1,&0,&0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}1,&3,&30\\-1,&0,&0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}1,&5,&18\\-1,&0,&0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}1,&6,&15\\-1,&0,&0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}1,&7,&14\\-3,&0,&0\end{pmatrix}}$,
		$\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}1,&9,&10\\-1,&0,&0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}2,&4,&13\\-1,&0,&-1\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}2,&6,&9\\2,&1,&1\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}2,&7,&7\\-1,&0,&-1\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=1}{\begin{pmatrix}3,&4,&8\\-1,&-1,&0\end{pmatrix}}$,
		$\underset{\delta=1}{\begin{pmatrix}4,&4,&7\\1,&2,&1\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=1}{\begin{pmatrix}4,&5,&6\\-2,&-1,&-1\end{pmatrix}}$.
90	21	$\underset{\delta=8}{\begin{pmatrix}1,&1,&90\\0,&0,&0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}1,&2,&45\\0,&0,&0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}1,&3,&30\\0,&0,&0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}1,&5,&18\\0,&0,&0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}1,&6,&15\\0,&0,&0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}1,&7,&13\\-1,&0,&0\end{pmatrix}}$,

D	Anz.	Reducirte positive ternäre Formen für die Determinante $-D$.
90	s. o.	$\begin{pmatrix}1, & 9, & 10\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}1, & 9, & 11\\ -3, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}2, & 2, & 23\\ 0, & -1, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}2, & 3, & 15\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}2, & 3, & 18\\ 0, & 0, & -1\end{pmatrix}$ $\delta=1$, $\begin{pmatrix}2, & 5, & 9\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$,
		$\begin{pmatrix}2, & 5, & 10\\ 0, & 0, & -1\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}2, & 5, & 11\\ 2, & 1, & 1\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}2, & 6, & 9\\ -3, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}2, & 7, & 7\\ -2, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}3, & 3, & 10\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=8$, $\begin{pmatrix}3, & 4, & 9\\ -1, & -1, & -1\end{pmatrix}$ $\delta=1$,
		$\begin{pmatrix}3, & 5, & 6\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}3, & 6, & 6\\ -2, & 0, & -1\end{pmatrix}$ $\delta=1$, $\begin{pmatrix}4, & 5, & 5\\ 0, & -1, & -1\end{pmatrix}$ $\delta=2$.
91	17	$\begin{pmatrix}1, & 1, & 91\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=8$, $\begin{pmatrix}1, & 2, & 46\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}1, & 4, & 23\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}1, & 5, & 19\\ -2, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}1, & 7, & 13\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}1, & 10, & 10\\ -3, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$,
		$\begin{pmatrix}2, & 2, & 31\\ 1, & 1, & 1\end{pmatrix}$ $\delta=6$, $\begin{pmatrix}2, & 3, & 16\\ -1, & -1, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}2, & 4, & 13\\ 0, & 0, & -1\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}2, & 5, & 11\\ -2, & 0, & -1\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}2, & 6, & 9\\ -2, & 0, & -1\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}2, & 7, & 7\\ 0, & 0, & -1\end{pmatrix}$ $\delta=4$,
		$\begin{pmatrix}3, & 5, & 8\\ -2, & -1, & -1\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}3, & 6, & 6\\ -1, & -1, & -1\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}4, & 5, & 5\\ -1, & 0, & -1\end{pmatrix}$ $\delta=1$, $\begin{pmatrix}4, & 5, & 6\\ 1, & 1, & 2\end{pmatrix}$ $\delta=1$, $\begin{pmatrix}5, & 5, & 5\\ -1, & -1, & -2\end{pmatrix}$ $\delta=2$.
92	21	$\begin{pmatrix}1, & 1, & 92\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=8$, $\begin{pmatrix}1, & 2, & 46\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}1, & 3, & 31\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}1, & 4, & 23\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}1, & 4, & 24\\ -2, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}1, & 6, & 16\\ -2, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$,
		$\begin{pmatrix}1, & 8, & 12\\ -2, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}1, & 9, & 12\\ -4, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}2, & 2, & 23\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=8$, $\begin{pmatrix}2, & 3, & 19\\ 1, & 1, & 1\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}2, & 4, & 13\\ -2, & -1, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}2, & 5, & 10\\ -2, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$,
		$\begin{pmatrix}3, & 3, & 12\\ 1, & 1, & 1\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}3, & 4, & 8\\ 0, & -1, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}3, & 4, & 9\\ -2, & -1, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}3, & 5, & 7\\ 1, & 1, & 1\end{pmatrix}$ $\delta=1$, $\begin{pmatrix}3, & 6, & 7\\ 3, & 1, & 1\end{pmatrix}$ $\delta=1$, $\begin{pmatrix}4, & 4, & 7\\ -1, & -2, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$,
		$\begin{pmatrix}4, & 4, & 9\\ 2, & 2, & 2\end{pmatrix}$ $\delta=6$, $\begin{pmatrix}4, & 5, & 6\\ -1, & 0, & -2\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}4, & 5, & 7\\ 2, & 2, & 2\end{pmatrix}$ $\delta=2$.
93	17	$\begin{pmatrix}1, & 1, & 93\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=8$, $\begin{pmatrix}1, & 2, & 47\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}1, & 3, & 31\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}1, & 6, & 17\\ -3, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}2, & 2, & 31\\ 0, & 0, & -1\end{pmatrix}$ $\delta=12$, $\begin{pmatrix}2, & 3, & 16\\ 0, & -1, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$,
		$\begin{pmatrix}2, & 3, & 19\\ -1, & 0, & -1\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}2, & 5, & 10\\ -1, & -1, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}2, & 6, & 9\\ 1, & 1, & 1\end{pmatrix}$ $\upsilon=2$, $\begin{pmatrix}2, & 7, & 8\\ 2, & 1, & 1\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}3, & 3, & 11\\ -1, & -1, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}3, & 3, & 12\\ 0, & -1, & -1\end{pmatrix}$ $\delta=1$,
		$\begin{pmatrix}3, & 4, & 8\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}3, & 5, & 7\\ -2, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}3, & 5, & 7\\ 0, & -1, & -1\end{pmatrix}$ $\delta=1$, $\begin{pmatrix}3, & 6, & 7\\ -3, & -1, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}5, & 5, & 6\\ -1, & -2, & -2\end{pmatrix}$ $\delta=2$.
94	11	$\begin{pmatrix}1, & 1, & 94\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=8$, $\begin{pmatrix}1, & 2, & 47\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}1, & 5, & 19\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}1, & 7, & 14\\ -2, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}1, & 10, & 11\\ -4, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}2, & 3, & 16\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$,

D	Anz.	Reducirte positive ternäre Formen für die Determinante — *D*.
94	s. o.	$\begin{pmatrix}2, 5, 11\\1, 1, 1\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}2, 6, 9\\-2, -1, 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}2, 7, 8\\-3, 0, 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}3, 4, 9\\1, 1, 1\end{pmatrix}$ $\delta=1$, $\begin{pmatrix}4, 5, 6\\1, 2, 1\end{pmatrix}$ $\delta=1$.
95	17	$\begin{pmatrix}1, 1, 95\\0, 0, 0\end{pmatrix}$ $\delta=8$, $\begin{pmatrix}1, 2, 48\\-1, 0, 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}1, 3, 32\\-1, 0, 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}1, 4, 24\\-1, 0, 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}1, 5, 19\\0, 0, 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}1, 6, 16\\-1, 0, 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$,
		$\begin{pmatrix}1, 8, 12\\-1, 0, 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}1, 8, 13\\-3, 0, 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}1, 9, 11\\-2, 0, 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}1, 10, 12\\-5, 0, 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}2, 3, 19\\0, 0, -1\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}2, 5, 10\\0, -1, 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$,
		$\begin{pmatrix}3, 4, 9\\0, -1, -1\end{pmatrix}$ $\delta=1$, $\begin{pmatrix}3, 5, 7\\-1, 0, -1\end{pmatrix}$ $\delta=1$, $\begin{pmatrix}3, 6, 6\\1, 1, 1\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}4, 4, 7\\-1, -1, -1\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}4, 5, 5\\0, 0, -1\end{pmatrix}$ $\delta=2$.
96	33	$\begin{pmatrix}1, 1, 96\\0, 0, 0\end{pmatrix}$ $\delta=8$, $\begin{pmatrix}1, 2, 48\\0, 0, 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}1, 3, 32\\0, 0, 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}1, 4, 24\\0, 0, 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}1, 4, 25\\-2, 0, 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}1, 5, 20\\-2, 0, 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$,
		$\begin{pmatrix}1, 6, 16\\0, 0, 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}1, 7, 15\\-3, 0, 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}1, 8, 12\\0, 0, 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}1, 8, 14\\-4, 0, 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}1, 10, 10\\-2, 0, 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}1, 11, 11\\-5, 0, 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$,
		$\begin{pmatrix}2, 2, 25\\-1, -1, 0\end{pmatrix}$ $\delta=8$, $\begin{pmatrix}2, 3, 16\\0, 0, 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}2, 4, 13\\-2, 0, 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}2, 7, 7\\-1, 0, 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}2, 7, 8\\-2, 0, -1\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}3, 3, 11\\0, -1, 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$,
		$\begin{pmatrix}3, 3, 12\\0, 0, -1\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}3, 3, 13\\-1, -1, -1\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}3, 4, 8\\0, 0, 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}3, 4, 9\\-2, 0, 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}3, 4, 9\\-1, 0, -1\end{pmatrix}$ $\delta=1$, $\begin{pmatrix}3, 6, 6\\-2, 0, 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$,
		$\begin{pmatrix}3, 6, 6\\0, -1, -1\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}4, 4, 7\\0, -2, 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}4, 4, 9\\1, 2, 2\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}4, 5, 5\\-1, 0, 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}4, 5, 6\\-1, -2, 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}4, 5, 6\\0, 0, -2\end{pmatrix}$ $\delta=4$,
		$\begin{pmatrix}4, 5, 7\\-2, 0, -2\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}4, 5, 7\\1, 2, 2\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}5, 5, 6\\-2, -2, -1\end{pmatrix}$ $\delta=4$.
97	15	$\begin{pmatrix}1, 1, 97\\0, 0, 0\end{pmatrix}$ $\delta=8$, $\begin{pmatrix}1, 2, 49\\-1, 0, 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}1, 7, 14\\-1, 0, 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}2, 2, 33\\1, 1, 1\end{pmatrix}$ $\delta=6$, $\begin{pmatrix}2, 3, 17\\-1, -1, 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}2, 3, 20\\1, 1, 1\end{pmatrix}$ $\delta=2$,
		$\begin{pmatrix}2, 4, 15\\2, 1, 1\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}2, 5, 11\\-2, -1, 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}2, 5, 11\\-1, 0, -1\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}2, 6, 9\\-1, 0, -1\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}2, 7, 8\\-2, -1, 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$,
		$\begin{pmatrix}2, 7, 8\\1, 1, 1\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}3, 5, 7\\-1, -1, 0\end{pmatrix}$ $\delta=1$, $\begin{pmatrix}3, 6, 7\\-2, -1, -1\end{pmatrix}$ $\delta=1$, $\begin{pmatrix}4, 5, 6\\2, 1, 1\end{pmatrix}$ $\delta=1$.
98	15	$\begin{pmatrix}1, 1, 98\\0, 0, 0\end{pmatrix}$ $\delta=8$, $\begin{pmatrix}1, 2, 49\\0, 0, 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}1, 3, 33\\-1, 0, 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}1, 6, 17\\-2, 0, 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$, $\begin{pmatrix}1, 7, 14\\0, 0, 0\end{pmatrix}$ $\delta=4$, $\begin{pmatrix}1, 9, 11\\-1, 0, 0\end{pmatrix}$ $\delta=2$,

D	Anz.	Reducirte positive ternäre Formen für die Determinante $-D$.
98	s. o.	$\begin{pmatrix}2, & 2, & 25\\ 0, & -1, & 0\end{pmatrix}$, $\delta=4$; $\begin{pmatrix}2, & 3, & 20\\ -1, & 0, & -1\end{pmatrix}$, $\delta=2$; $\begin{pmatrix}2, & 4, & 13\\ -1, & -1, & 0\end{pmatrix}$, $\delta=2$; $\begin{pmatrix}2, & 5, & 10\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}$, $\delta=2$; $\begin{pmatrix}2, & 7, & 7\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$, $\delta=8$;
		$\begin{pmatrix}2, & 7, & 9\\ 3, & 1, & 1\end{pmatrix}$, $\delta=2$; $\begin{pmatrix}3, & 4, & 10\\ 2, & 1, & 1\end{pmatrix}$, $\delta=1$; $\begin{pmatrix}3, & 5, & 7\\ 0, & 0, & -1\end{pmatrix}$, $\delta=2$; $\begin{pmatrix}4, & 5, & 6\\ -2, & 0, & -1\end{pmatrix}$, $\delta=1$.
99	24	$\begin{pmatrix}1, & 1, & 99\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$, $\delta=8$; $\begin{pmatrix}1, & 2, & 50\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}$, $\delta=4$; $\begin{pmatrix}1, & 3, & 33\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$, $\delta=4$; $\begin{pmatrix}1, & 4, & 25\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}$, $\delta=2$; $\begin{pmatrix}1, & 5, & 20\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}$, $\delta=2$;
		$\begin{pmatrix}1, & 6, & 18\\ -3, & 0, & 0\end{pmatrix}$, $\delta=4$; $\begin{pmatrix}1, & 9, & 11\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$, $\delta=4$; $\begin{pmatrix}1, & 9, & 12\\ -3, & 0, & 0\end{pmatrix}$, $\delta=2$; $\begin{pmatrix}1, & 10, & 10\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}$, $\delta=4$; $\begin{pmatrix}2, & 2, & 33\\ 0, & 0, & -1\end{pmatrix}$, $\delta=12$;
		$\begin{pmatrix}2, & 3, & 17\\ 0, & -1, & 0\end{pmatrix}$, $\delta=4$; $\begin{pmatrix}2, & 5, & 11\\ 0, & 0, & -1\end{pmatrix}$, $\delta=4$; $\begin{pmatrix}2, & 5, & 12\\ 2, & 1, & 1\end{pmatrix}$, $\delta=2$; $\begin{pmatrix}2, & 6, & 9\\ 0, & 0, & -1\end{pmatrix}$, $\delta=4$; $\begin{pmatrix}2, & 7, & 9\\ -3, & 0, & -1\end{pmatrix}$, $\delta=2$;
		$\begin{pmatrix}3, & 3, & 11\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$, $\delta=8$; $\begin{pmatrix}3, & 4, & 9\\ 0, & 0, & -1\end{pmatrix}$, $\delta=2$; $\begin{pmatrix}3, & 5, & 8\\ 2, & 1, & 1\end{pmatrix}$, $\delta=1$; $\begin{pmatrix}3, & 6, & 6\\ -1, & 0, & -1\end{pmatrix}$, $\delta=1$; $\begin{pmatrix}3, & 6, & 7\\ -3, & 0, & 0\end{pmatrix}$, $\delta=4$; $\begin{pmatrix}4, & 4, & 7\\ 1, & 1, & 1\end{pmatrix}$, $\delta=2$;
		$\begin{pmatrix}4, & 5, & 6\\ -2, & -1, & 0\end{pmatrix}$, $\delta=1$; $\begin{pmatrix}4, & 5, & 7\\ 2, & 1, & 2\end{pmatrix}$, $\delta=1$; $\begin{pmatrix}5, & 5, & 5\\ 1, & 1, & 2\end{pmatrix}$, $\delta=2$
100	22	$\begin{pmatrix}1, & 1, & 100\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$, $\delta=8$; $\begin{pmatrix}1, & 2, & 50\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$, $\delta=4$; $\begin{pmatrix}1, & 4, & 25\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$, $\delta=4$; $\begin{pmatrix}1, & 4, & 26\\ -2, & 0, & 0\end{pmatrix}$, $\delta=4$; $\begin{pmatrix}1, & 5, & 20\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$, $\delta=4$; $\begin{pmatrix}1, & 8, & 13\\ -2, & 0, & 0\end{pmatrix}$, $\delta=2$;
		$\begin{pmatrix}1, & 10, & 10\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$, $\delta=8$; $\begin{pmatrix}2, & 2, & 25\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$, $\delta=8$; $\begin{pmatrix}2, & 3, & 17\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}$, $\delta=2$; $\begin{pmatrix}2, & 3, & 20\\ 0, & 0, & -1\end{pmatrix}$, $\delta=4$; $\begin{pmatrix}2, & 4, & 13\\ 0, & -1, & 0\end{pmatrix}$, $\delta=4$; $\begin{pmatrix}2, & 5, & 10\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$, $\delta=4$;
		$\begin{pmatrix}2, & 5, & 12\\ -2, & 0, & -1\end{pmatrix}$, $\delta=2$; $\begin{pmatrix}2, & 6, & 9\\ -2, & 0, & 0\end{pmatrix}$, $\delta=2$; $\begin{pmatrix}2, & 6, & 9\\ -1, & -1, & 0\end{pmatrix}$, $\delta=2$; $\begin{pmatrix}3, & 3, & 13\\ 1, & 1, & 1\end{pmatrix}$, $\delta=2$; $\begin{pmatrix}3, & 5, & 7\\ 0, & -1, & 0\end{pmatrix}$, $\delta=2$;
		$\begin{pmatrix}3, & 5, & 8\\ -2, & 0, & -1\end{pmatrix}$, $\delta=1$; $\begin{pmatrix}3, & 7, & 7\\ -3, & -1, & -1\end{pmatrix}$, $\delta=6$; $\begin{pmatrix}4, & 5, & 5\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$, $\delta=8$; $\begin{pmatrix}4, & 5, & 6\\ 0, & -2, & 0\end{pmatrix}$, $\delta=4$; $\begin{pmatrix}5, & 5, & 5\\ 0, & -1, & -2\end{pmatrix}$, $\delta=1$.

II. Tabelle der *uneigentlich* primitiven positiven ternären Formen für alle negativen Determinanten von -2 bis -100 *).

D	Anzahl	Reducirte positive ternäre Formen für die Determinante $-D$.
4	1	$\begin{pmatrix}2, & 2, & 2\\ 1, & 1, & 1\end{pmatrix}$. $\delta = 24$
6	1	$\begin{pmatrix}2, & 2, & 2\\ 0, & 0, & -1\end{pmatrix}$. $\delta = 12$
10	1	$\begin{pmatrix}2, & 2, & 4\\ 1, & 1, & 1\end{pmatrix}$. $\delta = 6$
12	2	$\begin{pmatrix}2, & 2, & 4\\ -1, & -1, & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2, & 2, & 4\\ 0, & 0, & -1\end{pmatrix}$. $\delta = 8$, $\delta = 12$
14	1	$\begin{pmatrix}2, & 2, & 4\\ 0, & -1, & 0\end{pmatrix}$. $\delta = 4$
16	1	$\begin{pmatrix}2, & 2, & 6\\ 1, & 1, & 1\end{pmatrix}$. $\delta = 6$
18	1	$\begin{pmatrix}2, & 2, & 6\\ 0, & 0, & -1\end{pmatrix}$. $\delta = 12$
20	2	$\begin{pmatrix}2, & 2, & 6\\ -1, & -1, & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2, & 4, & 4\\ 2, & 1, & 1\end{pmatrix}$. $\delta = 8$, $\delta = 4$
22	2	$\begin{pmatrix}2, & 2, & 6\\ 0, & -1, & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2, & 2, & 8\\ 1, & 1, & 1\end{pmatrix}$. $\delta = 4$, $\delta = 6$
24	2	$\begin{pmatrix}2, & 2, & 8\\ 0, & 0, & -1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2, & 4, & 4\\ 1, & 1, & 1\end{pmatrix}$. $\delta = 12$, $\delta = 4$
26	1	$\begin{pmatrix}2, & 4, & 4\\ -1, & 0, & -1\end{pmatrix}$. $\delta = 2$
28	3	$\begin{pmatrix}2, & 2, & 8\\ -1, & -1, & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2, & 2, & 10\\ 1, & 1, & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2, & 4, & 4\\ 0, & 0, & -1\end{pmatrix}$. $\delta = 8$, $\delta = 6$, $\delta = 4$

*) Für diejenigen Determinanten unter 100, welche in dieser zweiten Tabelle *nicht* vorkommen, finden keine *uneigentlich* primitiven Formen Statt. Es sind dies alle ungeraden Zahlen und alle ungeraden Potenzen von 2.

D	Anz.	Reducirte positive ternäre Formen für die Determinante $-D$.
30	3	$\begin{pmatrix}2, & 2, & 8\\ 0, & -1, & 0\end{pmatrix}$ ($\delta=4$), $\begin{pmatrix}2, & 2, & 10\\ 0, & 0, & -1\end{pmatrix}$ ($\delta=12$), $\begin{pmatrix}2, & 4, & 4\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}$ ($\delta=4$).
34	2	$\begin{pmatrix}2, & 2, & 12\\ 1, & 1, & 1\end{pmatrix}$ ($\delta=6$), $\begin{pmatrix}2, & 4, & 6\\ 2, & 1, & 1\end{pmatrix}$ ($\delta=2$).
36	4	$\begin{pmatrix}2, & 2, & 10\\ -1, & -1, & 0\end{pmatrix}$ ($\delta=8$), $\begin{pmatrix}2, & 2, & 12\\ 0, & 0, & -1\end{pmatrix}$ ($\delta=12$), $\begin{pmatrix}2, & 4, & 6\\ -2, & -1, & 0\end{pmatrix}$ ($\delta=4$), $\begin{pmatrix}4, & 4, & 4\\ 1, & 2, & 2\end{pmatrix}$ ($\delta=8$).
38	2	$\begin{pmatrix}2, & 2, & 10\\ 0, & -1, & 0\end{pmatrix}$ ($\delta=4$), $\begin{pmatrix}2, & 4, & 6\\ 1, & 1, & 1\end{pmatrix}$ ($\delta=2$).
40	2	$\begin{pmatrix}2, & 2, & 14\\ 1, & 1, & 1\end{pmatrix}$ ($\delta=6$), $\begin{pmatrix}2, & 4, & 6\\ -1, & 0, & -1\end{pmatrix}$ ($\delta=2$).
42	3	$\begin{pmatrix}2, & 2, & 14\\ 0, & 0, & -1\end{pmatrix}$ ($\delta=12$), $\begin{pmatrix}2, & 4, & 6\\ -1, & -1, & 0\end{pmatrix}$ ($\delta=2$), $\begin{pmatrix}2, & 4, & 6\\ 0, & 0, & -1\end{pmatrix}$ ($\delta=4$).
44	3	$\begin{pmatrix}2, & 2, & 12\\ -1, & -1, & 0\end{pmatrix}$ ($\delta=8$), $\begin{pmatrix}2, & 4, & 6\\ 0, & -1, & 0\end{pmatrix}$ ($\delta=4$), $\begin{pmatrix}4, & 4, & 4\\ 1, & 1, & 2\end{pmatrix}$ ($\delta=2$).
46	3	$\begin{pmatrix}2, & 2, & 12\\ 0, & -1, & 0\end{pmatrix}$ ($\delta=4$), $\begin{pmatrix}2, & 2, & 16\\ 1, & 1, & 1\end{pmatrix}$ ($\delta=6$), $\begin{pmatrix}2, & 4, & 6\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}$ ($\delta=2$).
48	3	$\begin{pmatrix}2, & 2, & 16\\ 0, & 0, & -1\end{pmatrix}$ ($\delta=12$), $\begin{pmatrix}2, & 4, & 8\\ 2, & 1, & 1\end{pmatrix}$ ($\delta=2$), $\begin{pmatrix}2, & 6, & 6\\ 3, & 1, & 1\end{pmatrix}$ ($\delta=4$).
50	1	$\begin{pmatrix}4, & 4, & 4\\ -1, & -1, & -1\end{pmatrix}$ ($\delta=6$).
52	4	$\begin{pmatrix}2, & 2, & 14\\ -1, & -1, & 0\end{pmatrix}$ ($\delta=8$), $\begin{pmatrix}2, & 2, & 18\\ 1, & 1, & 1\end{pmatrix}$ ($\delta=6$), $\begin{pmatrix}2, & 4, & 8\\ -2, & -1, & 0\end{pmatrix}$ ($\delta=4$), $\begin{pmatrix}2, & 4, & 8\\ 1, & 1, & 1\end{pmatrix}$ ($\delta=2$).
54	5	$\begin{pmatrix}2, & 2, & 14\\ 0, & -1, & 0\end{pmatrix}$ ($\delta=4$), $\begin{pmatrix}2, & 2, & 18\\ 0, & 0, & -1\end{pmatrix}$ ($\delta=12$), $\begin{pmatrix}2, & 4, & 8\\ -1, & 0, & -1\end{pmatrix}$ ($\delta=2$), $\begin{pmatrix}2, & 6, & 6\\ -3, & 0, & 0\end{pmatrix}$ ($\delta=12$), $\begin{pmatrix}4, & 4, & 4\\ 1, & 1, & 1\end{pmatrix}$ ($\delta=6$).
56	3	$\begin{pmatrix}2, & 4, & 8\\ 0, & 0, & -1\end{pmatrix}$ ($\delta=4$), $\begin{pmatrix}2, & 6, & 6\\ 2, & 1, & 1\end{pmatrix}$ ($\delta=4$), $\begin{pmatrix}4, & 4, & 4\\ 0, & -1, & -1\end{pmatrix}$ ($\delta=2$).
58	3	$\begin{pmatrix}2, & 2, & 20\\ 1, & 1, & 1\end{pmatrix}$ ($\delta=6$), $\begin{pmatrix}2, & 4, & 8\\ -1, & -1, & 0\end{pmatrix}$ ($\delta=2$), $\begin{pmatrix}2, & 6, & 6\\ -2, & 0, & -1\end{pmatrix}$ ($\delta=2$).

D	Anz.	Reducirte positive ternäre Formen für die Determinante $-D$.
60	6	$\begin{pmatrix}2, & 2, & 16\\ -1, & -1, & 0\end{pmatrix}_{\delta=8}$, $\begin{pmatrix}2, & 2, & 20\\ 0, & 0, & -1\end{pmatrix}_{\delta=12}$, $\begin{pmatrix}2, & 4, & 8\\ 0, & -1, & 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}2, & 6, & 6\\ 1, & 1, & 1\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}4, & 4, & 4\\ 0, & 0, & -1\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}4, & 4, & 6\\ 1, & 2, & 2\end{pmatrix}_{\delta=4}$.
62	3	$\begin{pmatrix}2, & 2, & 16\\ 0, & -1, & 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}2, & 4, & 8\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}2, & 4, & 10\\ 2, & 1, & 1\end{pmatrix}_{\delta=2}$.
64	2	$\begin{pmatrix}2, & 2, & 22\\ 1, & 1, & 1\end{pmatrix}_{\delta=6}$, $\begin{pmatrix}2, & 6, & 6\\ -1, & 0, & -1\end{pmatrix}_{\delta=2}$.
66	4	$\begin{pmatrix}2, & 2, & 22\\ 0, & 0, & -1\end{pmatrix}_{\delta=12}$, $\begin{pmatrix}2, & 4, & 10\\ 1, & 1, & 1\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}2, & 6, & 6\\ 0, & 0, & -1\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}4, & 4, & 6\\ 2, & 2, & 1\end{pmatrix}_{\delta=2}$.
68	4	$\begin{pmatrix}2, & 2, & 18\\ -1, & -1, & 0\end{pmatrix}_{\delta=8}$, $\begin{pmatrix}2, & 4, & 10\\ -2, & -1, & 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}2, & 4, & 10\\ -1, & 0, & -1\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}4, & 4, & 6\\ 1, & 1, & 2\end{pmatrix}_{\delta=2}$.
70	5	$\begin{pmatrix}2, & 2, & 18\\ 0, & -1, & 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}2, & 2, & 24\\ 1, & 1, & 1\end{pmatrix}_{\delta=6}$, $\begin{pmatrix}2, & 4, & 10\\ 0, & 0, & -1\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}2, & 6, & 6\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}2, & 6, & 8\\ 3, & 1, & 1\end{pmatrix}_{\delta=2}$.
72	2	$\begin{pmatrix}2, & 2, & 24\\ 0, & 0, & -1\end{pmatrix}_{\delta=12}$, $\begin{pmatrix}2, & 6, & 8\\ -3, & -1, & 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$.
74	2	$\begin{pmatrix}2, & 4, & 10\\ -1, & -1, & 0\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}4, & 4, & 6\\ 1, & 2, & 1\end{pmatrix}_{\delta=1}$.
76	5	$\begin{pmatrix}2, & 2, & 20\\ -1, & -1, & 0\end{pmatrix}_{\delta=8}$, $\begin{pmatrix}2, & 2, & 26\\ 1, & 1, & 1\end{pmatrix}_{\delta=6}$, $\begin{pmatrix}2, & 4, & 10\\ 0, & -1, & 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}2, & 4, & 12\\ 2, & 1, & \end{pmatrix}_{\delta=}$, $\begin{pmatrix}4, & 4, & 6\\ -1, & -2, & 0\end{pmatrix}_{\delta=2}$.
78	5	$\begin{pmatrix}2, & 2, & 20\\ 0, & -1, & 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}2, & 2, & 26\\ 0, & 0, & -1\end{pmatrix}_{\delta=12}$, $\begin{pmatrix}2, & 4, & 10\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}2, & 6, & 8\\ -3, & 0, & 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}2, & 6, & 8\\ 2, & 1, & 1\end{pmatrix}_{\delta=2}$.
80	3	$\begin{pmatrix}2, & 4, & 12\\ 1, & 1, & 1\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}2, & 6, & 8\\ -2, & 0, & -1\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}4, & 4, & 6\\ -1, & -1, & -1\end{pmatrix}_{\delta=2}$.
82	4	$\begin{pmatrix}2, & 2, & 28\\ 1, & 1, & 1\end{pmatrix}_{\delta=6}$, $\begin{pmatrix}2, & 4, & 12\\ -1, & 0, & -1\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}2, & 6, & 8\\ -2, & -1, & 0\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}2, & 6, & 8\\ 1, & 1, & 1\end{pmatrix}_{\delta=2}$.
84	7	$\begin{pmatrix}2, & 2, & 22\\ -1, & -1, & 0\end{pmatrix}_{\delta=8}$, $\begin{pmatrix}2, & 2, & 28\\ 0, & 0, & -1\end{pmatrix}_{\delta=12}$, $\begin{pmatrix}2, & 4, & 12\\ -2, & -1, & 0\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}2, & 4, & 12\\ 0, & 0, & -1\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}4, & 4, & 6\\ 1, & 1, & 1\end{pmatrix}_{\delta=2}$, $\begin{pmatrix}4, & 4, & 8\\ 1, & 2, & 2\end{pmatrix}_{\delta=4}$, $\begin{pmatrix}4, & 6, & 6\\ 3, & 2, & 2\end{pmatrix}_{\delta=4}$.

D	Anz.	Reducirte positive ternäre Formen für die Determinante $-D$.
86	3	$\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}2, & 2, & 22\\ 0, & -1, & 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}2, & 6, & 8\\ -1, & 0, & -1\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=1}{\begin{pmatrix}4, & 4, & 6\\ 0, & -1, & -1\end{pmatrix}}$.
88	5	$\underset{\delta=6}{\begin{pmatrix}2, & 2, & 30\\ 1, & 1, & 1\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}2, & 6, & 8\\ -1, & -1, & 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}2, & 6, & 8\\ 0, & 0, & -1\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}2, & 8, & 8\\ 4, & 1, & 1\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}4, & 4, & 6\\ -1, & -1, & 0\end{pmatrix}}$.
90	6	$\underset{\delta=12}{\begin{pmatrix}2, & 2, & 30\\ 0, & 0, & -1\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}2, & 4, & 12\\ -1, & -1, & 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}2, & 4, & 14\\ 2, & 1, & 1\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}2, & 6, & 8\\ 0, & -1, & 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}4, & 4, & 6\\ 0, & 0, & -1\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}4, & 6, & 6\\ 3, & 1, & 2\end{pmatrix}}$,
92	5	$\underset{\delta=8}{\begin{pmatrix}2, & 2, & 24\\ -1, & -1, & 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}2, & 4, & 12\\ 0, & -1, & 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}2, & 6, & 10\\ 3, & 1, & 1\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}4, & 4, & 6\\ 0, & -1, & 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}4, & 4, & 8\\ 1, & 1, & 2\end{pmatrix}}$.
94	5	$\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}2, & 2, & 24\\ 0, & -1, & 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=6}{\begin{pmatrix}2, & 2, & 32\\ 1, & 1, & 1\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}2, & 4, & 12\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}2, & 4, & 14\\ 1, & 1, & 1\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}2, & 6, & 8\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}}$.
96	4	$\underset{\delta=12}{\begin{pmatrix}2, & 2, & 32\\ 0, & 0, & -1\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}2, & 4, & 14\\ -1, & 0, & -1\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}2, & 6, & 10\\ -3, & -1, & 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}4, & 4, & 8\\ 2, & 2, & 1\end{pmatrix}}$.
98	1	$\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}2, & 4, & 14\\ 0, & 0, & -1\end{pmatrix}}$.
100	6	$\underset{\delta=8}{\begin{pmatrix}2, & 2, & 26\\ -1, & -1, & 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=6}{\begin{pmatrix}2, & 2, & 34\\ 1, & 1, & 1\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}2, & 4, & 14\\ -2, & -1, & 0\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=2}{\begin{pmatrix}2, & 6, & 10\\ 2, & 1, & 1\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=4}{\begin{pmatrix}2, & 8, & 8\\ 3, & 1, & 1\end{pmatrix}}$, $\underset{\delta=8}{\begin{pmatrix}4, & 6, & 6\\ 1, & 2, & 2\end{pmatrix}}$.

Reducirte Formen für die Determinante $-385 = -5.7.11.$

Formen-Anzahl = 59.

15 Formen mit der Determinante —385, deren Transformationszahl $\delta = 1$ ist.

$\begin{pmatrix}3, & 6, & 23\\ 0, & -1, & -1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}3, & 7, & 20\\ 2, & 1, & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}3, & 8, & 18\\ 3, & 1, & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}3, & 10, & 15\\ 4, & 1, & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}4, & 6, & 17\\ 0, & -1, & -1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}4, & 8, & 15\\ 4, & 2, & 1\end{pmatrix}$,
$\begin{pmatrix}5, & 6, & 15\\ -1, & 0, & -2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}5, & 7, & 12\\ 2, & 1, & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}5, & 7, & 14\\ 3, & 2, & 2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}5, & 8, & 10\\ -1, & 0, & -1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}5, & 8, & 11\\ 2, & 2, & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}5, & 9, & 11\\ -3, & -1, & -2\end{pmatrix}$,
$\begin{pmatrix}6, & 8, & 11\\ 3, & 1, & 3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}7, & 7, & 11\\ 2, & 3, & 3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}7, & 8, & 9\\ -3, & -1, & -2\end{pmatrix}$.

25 Formen, für welche $\delta = 2$.

$\begin{pmatrix}2, & 3, & 65\\ -1, & -1, & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2, & 5, & 43\\ -1, & 0, & -1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2, & 9, & 22\\ -1, & -1, & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2, & 10, & 21\\ 2, & 1, & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2, & 8, & 27\\ 3, & 1, & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2, & 7, & 31\\ -3, & 0, & -1\end{pmatrix}$,
$\begin{pmatrix}2, & 13, & 16\\ -3, & -1, & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2, & 11, & 20\\ 4, & 1, & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2, & 12, & 19\\ 5, & 1, & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2, & 15, & 15\\ -5, & 0, & -1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2, & 14, & 17\\ 6, & 1, & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}3, & 4, & 35\\ 0, & 0, & -1\end{pmatrix}$,
$\begin{pmatrix}3, & 5, & 26\\ 0, & -1, & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}3, & 5, & 29\\ -2, & -1, & -1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}3, & 11, & 12\\ 0, & -1, & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}3, & 13, & 13\\ 6, & 1, & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}4, & 7, & 14\\ 0, & -1, & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}4, & 9, & 11\\ 0, & 0, & -1\end{pmatrix}$,
$\begin{pmatrix}5, & 5, & 17\\ -2, & -2, & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}5, & 5, & 19\\ -1, & -1, & -2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}5, & 6, & 13\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}5, & 10, & 11\\ -5, & -2, & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}7, & 7, & 8\\ 0, & -1, & 0\end{pmatrix}$,
$\begin{pmatrix}7, & 7, & 9\\ -2, & -2, & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}7, & 8, & 8\\ 1, & 2, & 2\end{pmatrix}$.

17 Formen, für welche $\delta = 4$.

$\begin{pmatrix}1, & 5, & 77\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1, & 7, & 55\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1, & 11, & 35\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1, & 2, & 193\\ -1, & 0, & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1, & 10, & 41\\ -5, & 0, & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1, & 14, & 31\\ -7, & 0, & 0\end{pmatrix}$,
$\begin{pmatrix}1, & 22, & 23\\ -11, & 0, & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2, & 3, & 77\\ 0, & 0, & -1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2, & 4, & 55\\ 0, & 0, & -1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2, & 5, & 39\\ 0, & -1, & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2, & 6, & 35\\ 0, & 0, & -1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2, & 7, & 28\\ 0, & -1, & 0\end{pmatrix}$,
$\begin{pmatrix}2, & 11, & 18\\ 0, & -1, & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}5, & 7, & 11\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}5, & 9, & 9\\ -2, & 0, & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}6, & 6, & 11\\ 0, & 0, & -1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}7, & 8, & 8\\ -3, & 0, & 0\end{pmatrix}$.

Je eine für welche $\delta = 6$ resp. $\delta = 8$.

$\underset{\delta=6}{\begin{pmatrix}2, & 2, & 129\\ 1, & 1, & 1\end{pmatrix}}$; $\underset{\delta=8}{\begin{pmatrix}1, & 1, & 385\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}}$.

(Im nächsten Hefte folgt ein Anhang zu diesen Tafeln.)

Berichtigungen in dieser Arbeit.

Seite 142 Zeile 12 v. o. *lese man* oberen Coëfficienten *statt* Coëfficienten
— 162 — 7 v. u. *lese man* $b'+2b''$ *statt* $2b'+b''$, *und* $2b+b'$ *statt* $2b+b''$

13.

Sur l'introduction des variables continues dans la théorie des nombres.

(Par Mr. *C. Hermite*, examinateur d'admission à l'école polytechnique, à Paris.)

I.

Amené depuis long-temps par des recherches sur la théorie des fonctions elliptiques et Abeliennes, à diverses questions d'Arithmétique transcendante, je viens offrir aux lecteurs de ce recueil, quelques uns des résultats auxquels je suis parvenu, et les principes de la méthode que j'ai suivie. Ces résultats sont relatifs surtout aux nombres complexes, considérés en général, ou plutôt à la théorie de certaines formes décomposables en facteurs linéaires et dont on verra plus bas la définition. Pour la méthode, son principal caractère consiste dans l'introduction par un procédé général et très simple, de variables continues, qui font dépendre les questions relatives aux nombres entiers des principes analytiques les plus élémentaires. C'est là surtout, ce que je me suis proposé de faire ressortir avec évidence, en revenant même sur une des théories exposées avec tant de profondeur et d'élégance dans les „Disquisitiones arithm." (la distribution en périodes des formes de déterminant positif), pour la présenter sous un nouveau point de vue. Quant aux questions nouvelles que j'ai essayé de traiter, je suis loin de les avoir approfondies autant que je l'aurais souhaité; aussi je demande l'indulgence du lecteur pour ce que mon travail aura d'incomplet, espérant par la suite y revenir et le perfectionner.

II.

On connait toute l'importance du problême général, dont l'objet est de distinguer, si deux formes sont équivalentes, ou non, et de trouver dans le premier cas toutes les transformations de l'une dans l'autre. Je m'occuperai sous ce point de vue, des formes quadratiques définies, à un nombre quelconque de variables, et des formes binaires de degré quelconque, pour présenter d'une manière nouvelle, ce que j'ai déjà dit tome 36 de ce journal. J'essayerai ensuite de fonder la théorie des nombres complexes, sur l'étude d'une série particulière de formes, que je définis de la manière suivante.

Soit

$$f(u) = u^n + Au^{n-1} + Bu^{n-2} + \cdots + Ku + L = 0$$

une équation irréductible à coefficients entiers, et

$$\varphi_i(u) = m_i u^{n-1} + p_i n^{n-2} + \cdots + r_i u + s_i$$

une fonction entière de u, à coefficients entiers: l'expression

$$\textit{Norme}\ \{X\varphi_1(u) + Y\varphi_2(u) + \cdots + V\varphi_n(u)\}$$

sera évidemment une fonction homogène et à coefficients entiers des n variables, $X, Y, \ldots. V$. Je nomme encore, $\varDelta$, le déterminant du système

$$\begin{array}{cccccc} m_1 & p_1 & \ldots. & r_1 & s_1 \\ m_2 & p_2 & \ldots.. & r_2 & s_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ m_n & p_n & \ldots. & r_n & s_n \end{array}$$

Cela étant, j'assimilerai à l'ensemble des formes quadratiques de même déterminant, toutes les expressions

$$\varPhi = \frac{1}{\varDelta}\ \textit{Norme}\ \{X\varphi_1(u) + Y\varphi_2(u) + \cdots + V\varphi_n(u)\}$$

dont les coefficients se réduiront à des nombres entiers. Ainsi il faut concevoir que la fonction $f(u)$, ne changeant point, on attribue à $\varDelta$ la série indéfinie des valeurs entières, puis qu'on prenne pour chaque valeur de $\varDelta$, tous les systêmes de nombres entiers, $m, p, \ldots. s$, qui donnent à la *Norme* le facteur $\varDelta$. Distribuer en classes distinctes, toutes les expressions $\varPhi$, obtenues de la sorte, sera la question fondamentale d'une théorie analogue à celle des formes quadratiques binaires à facteurs réels, et qui indique sous quel point de vue j'envisage l'étude des nombres complexes.

La définition précédente peut être simplifiée, en observant que toute forme $\varPhi$ a une équivalente, dans laquelle le système:

$$\begin{array}{cccccc} m_1 & p_1 & \ldots. & r_1 & s_1 \\ m_2 & p_2 & \ldots. & r_2 & s_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ m_n & p_n & \ldots. & r_n & s_n \end{array}$$

dont le déterminant a p' valeurs Δ, est remplacé par le suivant:

$$\begin{matrix} \delta & g & h & \dots & l \\ 0 & \delta_1 & h' & \dots & l' \\ 0 & 0 & \delta_2 & \dots & l'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \delta_{n-1} \end{matrix}$$

Les nombres entiers, désignés par les lettres, $g, h, \dots l$, sont positifs et vérifient tous les conditions

$$g < \delta_1, \quad h < \delta_2, \quad \dots \quad l < \delta_{n-1},$$

et on a toujours

$$\delta . \delta_1 . \delta_2 \dots \delta_{n-1} = \Delta.$$

Ainsi pour chaque valeur de Δ, on voit qu'il n'existe jamais qu'un nombre fini d'expressions Φ, distinctes. Mais je m'occuperai tout d'abord des formes binaires, qui offrent dans des circonstances analytiques plus simples, l'application des mêmes principes.

III.

La théorie connue de la réduction des formes quadratiques de déterminant négatif, étant le point de départ des recherches que je vais exposer, je le résumerai en peu de mots.

1°. Toute forme $f = ax^2 + 2bxy + cy^2$, de déterminant négatif $b^2 - ac = -D$, a une équivalente $F = AX^2 + 2BXY + CY^2$, où le coefficient moyen $2B$, est en valeur absolue inférieur à A et C. Considérons en effet, l'ensemble des transformées déduites de f, par la substitution

$$x = mX + m_0 Y$$
$$y = nX + n_0 Y,$$

m, n, m_0, n_0 étant des entiers tels que

$$mn_0 - m_0 n = 1;$$

puis réunissons dans un même groupe, toutes celles où le coefficient de X^2, est le plus petit possible, et choisissons dans ce groupe la forme où le coefficient de Y^2, est lui-même un minimum: cette transformée remplira les conditions énoncées.

Pour le prouver, il suffit de faire voir qu'on ne peut supposer $\pm 2B > A$, puisque A, est évidemment le minimum absolu de f, pour des valeurs entières

des indéterminées, et ne peut surpasser C; or on en conclurait

$$A \mp 2B + C < C,$$

et la substitution

$$X = -X' + Y'$$
$$Y = \quad -Y'$$

changerait F en

$$A(-X'+Y')^2 \mp 2BY'(-X'+Y') + CY'^2$$
$$= AX'^2 + 2(\pm B - A)X'Y' + (A \mp 2B + C)Y'^2:$$

transformée équivalente, où un coefficient moindre pour Y^2 est associé avec le même coefficiont de X^2.

Les formes obtenues par la méthode qui vient d'être indiquée, se nomment *formes réduites,* et il est évident que pour une classe donnée, on a au plus deux réduites, qui ne diffèrent que par le signe du coefficient moyen.

2°. Les conditions

$$\pm 2B < A$$
$$\pm 2B < C$$

donnent

$$4B^2 < AC,$$

d'où l'on tire, à cause de $D = AC - B^2$, les limitations suivantes:

$$B^2 < \tfrac{1}{3}D, \quad AC < \tfrac{4}{3}D.$$

On en déduit immédiatement que les formes à coefficients entiers de même déterminant, peuvent être distribuées en un nombre limité de classes, puisqu'elles ne donnent qu'un nombre limité de réduites distinctes.

3°. Les conditions $\pm 2B < A$, $\pm 2B < C$, sont complètement caractéristiques des formes réduites. En effet, supposons pour fixer les idées, B positif, et prenons $F(x, y) = Ax^2 - 2Bxy + Cy^2$, les équations identiques

$$F(x-1, y) = F(x, y) - A(x-y) - y(A-2B) - A(x-1)$$
$$F(x, y-1) = F(x, y) - C(y-x) - x(C-2B) - C(y-1)$$

montrent, qu'on diminue la valeur numérique de la forme, en diminuant d'une unité, celle des deux indéterminées dont la valeur absolue est la plus grande. On conclut de là, que A et C sont les deux premiers minima de F, pour des valeurs entières des indéterminées; le troisième minimum est $A - 2B + C$. Cette démonstration de la proposition énoncee est due à *Legendre;* je me

suis servi de la propriété importante des formes réduites sur laquelle elle se fonde, dans ma recherche du minimum d'une forme ternaire définie, pour des valeurs entières des indéterminées, dont l'une est supposée égale à l'unité.

IV.

Comme première application des résultats précédents, considérons la forme suivante:

$$f = (x - ay)^2 + \frac{y^2}{\Delta^2},$$

dans laquelle a et Δ sont des quantitées réelles quelconques; soit

$$F = AX^2 + 2BXY + CY^2$$

sa réduite, et

$$x = mX + m_0 Y$$
$$y = nX + n_0 Y$$

la substitution propre à l'obtenir. La condition $AC < \frac{4}{3}D$ donne pour le coefficient minimum A, la limite $\sqrt{(\frac{4}{3}D)}$; on a d'ailleurs:

$$D = \frac{1}{\Delta^2}, \quad A = (m - an)^2 + \frac{n^2}{\Delta^2},$$

donc:

Pour une valeur donnée de Δ, on peut toujours déterminer deux entiers m et n, tels qu'on ait:

$$(m - an)^2 + \frac{n^2}{\Delta^2} < \frac{1}{\Delta}\sqrt{\tfrac{4}{3}}.$$

Or de là se tirent plusieurs conséquences:

1°. Le produit des deux facteurs $(m - an)^2$ et $\frac{n^2}{\Delta^2}$ étant toujours inférieur à son minimum, savoir $\frac{1}{4}\left\{(m - an)^2 + \frac{n^2}{\Delta^2}\right\}^2$, on aura a fortiori:

$$(m - an)^2 \frac{n^2}{\Delta^2} < \frac{1}{3\Delta^2}$$

ou

$$m - an < \frac{1}{n\sqrt{3}}.$$

On a d'ailleurs à la fois:

$$(m - an)^2 < \frac{1}{\Delta}\sqrt{\tfrac{4}{3}}, \quad \frac{n^2}{\Delta^2} < \frac{1}{\Delta}\sqrt{\tfrac{4}{3}} \quad \text{ou} \quad n^2 < \Delta\sqrt{\tfrac{4}{3}};$$

donc, on peut approcher indéfiniment d'une quantité quelconque a par des fractions $\frac{m}{n}$ de telle sorte que l'erreur $\frac{m}{n}-a$ soit toujours moindre que $\frac{1}{n^2.\sqrt{3}}$.

2°. Les deux entiers m et n, donnant pour une certaine valeur de Δ, le minimum de f, on ne saurait avoir deux autres nombres entiers m', n', tels que n' soit $< n$ et $(m'-an')^2 < (m-an)^2$, donc, $m-an$ représente un minimum absolu de la fonction linéaire $x-ay$, relativement à toute valeur entière de x, et à des valeurs entières de y, qui ne surpassent pas n. Donc encore $\frac{m}{n}$ approche plus de a, que toute autre fraction de dénominateur moindre, car l'hypothèse $n'<n$, entrainant $(m'-an')^2 > (m-an)^2$, on en déduit immédiatement:

$$\left(\frac{m'}{n'}-a\right)^2 > \left(\frac{m}{n}-a\right)^2.$$

3°. Laissant de côté la recherche complète de tous les minima de la fonction $\frac{x}{y}-a$, ces minima étant relatifs à des valeurs entières quelconques de x, et à des valeurs entières de y, inférieures à une limite donné, qu'on fait grandir indéfiniment: je considère deux minima consécutifs de f, auxquels correspondent deux systèmes distincts $x=m$, $y=n$, puis $x=m'$, $y=n'$.

On devra concevoir deux valeurs infiniment voisines de Δ, auxquelles appartiennent successivement les deux systèmes, de sorte qu'en désignant par δ, une quantité infiniment petite, on ait:

$$(m-an)^2+\frac{n^2}{\Delta^2} < \frac{1}{\Delta}\sqrt{\tfrac{4}{3}},$$

$$(m'-an')^2+\frac{n'^2}{(\Delta+\delta)^2} < \frac{1}{\Delta+\delta}\sqrt{\tfrac{4}{3}},$$

en mettant la seconde inégalité sous la forme

$$(m'-an')^2+\frac{n'^2}{\Delta^2} < \frac{1}{\Delta}\sqrt{\tfrac{4}{3}}+\varepsilon,$$

ε étant encore infiniment petit; et multipliant membre à membre, il viendra:

$$\left((m-an)(m'-an')+\frac{n.n'}{\Delta^2}\right)^2+\left(\frac{mn'-nm'}{\Delta}\right)^2 < \frac{4}{3\Delta^2}+\frac{\varepsilon}{\Delta}\sqrt{\tfrac{4}{3}}.$$

On en conclut, en négligeant ε, vis à vis des quantités finies:

$$(mn'-nm')^2 < \tfrac{4}{3},$$

et par suite:

$$mn'-nm' = \pm 1$$

Cette relation prouve entre autres choses, qu'étant données trois fractions consécutives, $\frac{m}{n}$, $\frac{m'}{n'}$, $\frac{m''}{n''}$, on aura cette loi de formation:

$$m'' = km' \pm n,$$
$$n'' = kn' \pm n;$$

k étant entier. On peut toujours en effet supposer deux inconnues, k, l, définies par les deux équations:

$$m'' = km' + lm$$
$$n'' = kn' + ln,$$

lesquelles donnent $l = \frac{m''n' - n''m'}{m'n - mn'} = \pm 1$, le numérateur ayant aussi bien que le dénominateur, l'unité pour valeur absolue.

V.

Ce qu'on vient de voir sur l'approximation des quantités par des fractions rationnelles, était connue par la théorie des fractions continues; en faisant dépendre ces résultats de la seule notion de formes réduites de déterminant négatif; j'ai eu pour but de donner un premier exemple de l'emploi d'une variable continue, dans une question relative aux nombres entiers, et aussi de faire voir comment cette longue chaine de vérités propres à l'arithmétique transcendante, se lie dans l'origine, aux éléments de l'algèbre. La recherche complète, des conditions d'équivalence de deux formes de déterminant négatif, se présenterait maintenant, comme conséquence des résultats qui viennent d'être obtenus, mais je ne saurais pour cela, que réproduire l'ouvrage même de Mr. *Gauss*. Laissant donc de côté les propositions importantes qui se rapportent à l'équivalence propre et impropre aux formes ambigues, j'arrive à la théorie des fonctions homogènes telles que

$$f(x, y) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + \cdots + a_{n-1} x y^{n-1} + a_n y^n.$$

1°. Désignons par $x + \alpha y$ les facteurs linéaires réels, et par $x + \beta y$, $x + \gamma y$ les facteurs imaginaires conjugués de la forme proposée, de telle sorte qu'on ait:

$$f(x,y) =$$
$$a_0(x+\alpha_1 y)(x+\alpha_2 y)\dots(x+\alpha_\mu y).(x+\beta_1 y)(x+\gamma_1 y)\dots(x+\beta_\nu y)(x+\gamma_\nu y)$$

et

$$\mu + 2\nu = n;$$

composons ensuite, avec ces facteurs, et avec des quantités réelles, $t_1, t_2, \ldots,$ $u_1, u_2, \ldots$ la forme quadratique définie:

$$\varphi(x,y) = t_1^2(x+\alpha_1 y)^2 + t_2^2(x+\alpha_2 y) + \cdots + t_\mu^2(x+\alpha_\mu y)$$
$$+ 2u_1^2(x+\beta_1 y)(x+\gamma_1 y) + \cdots + 2u_\nu^2(x+\beta_\nu y)(x+\gamma_\nu y).$$

Cela étant, on concevra qu'on calcule la suite indéfinie des substitutions propres à réduire φ, lorsque les variables t et u passent par tous les états possibles de grandeur. Chacune de ces substitutions, faite dans f, donnera une certaine transformée; nous désignerons leur ensemble par le symbole (f). Or une première observation consistera en ceci:

f et F étant équivalentes, (f) et (F) seront composés des mêmes formes.

Pour le démontrer, soit

$$x = mX + m_0 Y,$$
$$y = nX + n_0 Y,$$

la substitution qui change f en

$$F = A_0 X^n + A_1 X^{n-1} Y + \cdots + A_{n-1} X Y^{n-1} + A_n Y^n;$$

posons

$$\mathrm{a} = \frac{m_0 + \alpha n_0}{m + \alpha n}, \quad \mathrm{b} = \frac{m_0 + \beta n_0}{m + \beta n}, \quad \mathrm{c} = \frac{m_0 + \gamma n_0}{m + \gamma n},$$

on aura

$$F = A_0(X + \mathrm{a}_1 Y)\ldots(X + \mathrm{a}_\mu Y).(X + \mathrm{b}_1 Y)(X + \mathrm{c}_1 Y)\ldots(X + \mathrm{b}_\nu Y)(X + \mathrm{c}_\nu Y),$$

et la forme quadratique Φ, composée avec F, comme φ avec f, sera:

$$\Phi = T_1^2(X + \mathrm{a}_1 Y)^2 + \cdots + T_\mu^2(X + \mathrm{a}_\mu Y) + 2U_1^2(X + \mathrm{b}_1 Y)(X + \mathrm{c}_1 Y) + \cdots$$
$$\cdots + 2U_\nu^2(X + \mathrm{b}_\nu Y)(X + \mathrm{c}_\nu Y).$$

Cela posé, si l'une des formes de (f) a été obtenue en faisant dans f, la substitution propre à réduire φ, lorsqu'on y suppose en général

$$t = \tau, \qquad u = v:$$

je dis que la même forme se trouvera dans (F), et aura été obtenue en réduisant Φ dans l'hypothèse

$$T^2 = \tau^2(m + \alpha n)^2, \quad U^2 = v^2(m + \beta n)(m + \gamma n).$$

Soit pour abréger, P, la substitution qui transforme f en F, et Q, la substitution propre à réduire φ; on vérifiera d'abord immédiatement que par la substitution P, φ devient Φ: donc réciproquement, par la substitution inverse P^{-1}, Φ devient φ, de telle sorte enfin, que φ et Φ, se changent en une seule et même forme réduite par les substitutions, Q et $P^{-1}.Q$.

Maintenant ces deux substitutions, faites respectivement dans f et F, donnent une même forme; la substitution inverse P^{-1}, ramenant tout d'abord F à f.

Il est ainsi prouvé que toutes les formes de (f) sont dans (F); la réciproque est évidente, car on peut raisonner de F à f, absolument comme on l'a fait de f à F; (f) et (F) sont donc identiques.

2°. C'est parmi les formes dont l'ensemble a été désigné par (f) que nous choisirons une réduite pour représenter la classe entière à laquelle appartient f; dans ce but nous allons établir quelques résultats préliminaires.

Soit, pour un système déterminé de valeurs de t et u,

$$x = mX + m_0 Y$$
$$y = nX + n_0 Y,$$

la substitution propre à réduire φ; en conservant les notations précédentes, la transformée réduite Φ sera:

$$\Phi = T_1^2(X+\mathfrak{a}_1 Y) + \cdots + T_\mu^2(X+\mathfrak{a}_\mu Y) + 2U_1^2(X+\mathfrak{b}_1 Y)(X+\mathfrak{c}_1 Y) + \cdots$$
$$\cdots + 2U_\nu^2(X+\mathfrak{b}_\nu Y)(X+\mathfrak{c}_\nu Y)$$

les quantités T et U ayant pour valeurs:

$$T^2 = t^2(m+\alpha n)^2, \qquad U^2 = u^2(m+\beta n)(m+\gamma n).$$

La transformée déduite de f, par la même substitution, sera également représentée par

$$F = A_0 X^n + A_1 X^{n-1} Y + \cdots + A_{n-1} X Y^{n-1} + A_n Y^n$$
$$= A_0(X+\mathfrak{a}_1 Y)\ldots(X+\mathfrak{a}_\mu Y)(X+\mathfrak{b}_1 Y)(X+\mathfrak{c}_1 Y)\ldots(X+\mathfrak{b}_\nu Y)(X+\mathfrak{c}_\nu Y).$$

Soit encore, pour abréger,

$$\Phi = \mathrm{P}X^2 + 2\mathrm{Q}XY + \mathrm{R}Y^2,$$

de sorte que

$$T_1^2 + \cdots + T_\mu^2 + 2U_1^2 + \cdots + 2U_\nu^2 = \mathrm{P}$$
$$\mathfrak{a}_1^2 T_1^2 + \cdots + \mathfrak{a}_\mu T_\mu^2 + 2\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1 U_1^2 + \cdots + 2\mathfrak{b}_\nu\mathfrak{c}_\nu U_\nu^2 = \mathrm{R}.$$

On pourra faire en général:

$$T = \omega\sqrt{\mathrm{P}}, \qquad U = \varpi\sqrt{\mathrm{P}},$$
$$\mathfrak{a}T = \varphi\sqrt{\mathrm{R}}, \qquad \sqrt{(\mathfrak{b}\mathfrak{c})}\,U = \psi\sqrt{\mathrm{R}};$$

les quantités, ω, ϖ, d'une part, φ, ψ, de l'autre, donnent les équations correspondantes

$$\omega_1^2 + \cdots + \omega_\mu^2 + 2\varpi_1^2 + \cdots + 2\varpi_\nu^2 = 1$$
$$\varphi_1^2 + \cdots + \varphi_\mu^2 + 2\psi_1^2 + \cdots + 2\psi_\nu^2 = 1.$$

Enfin nous remplacerons l'équation unique

$$\sqrt{(bc)}\, U = \psi\sqrt{R},$$

par les deux suivantes:

$$bU = \psi\sqrt{R}.e^{i\lambda}, \quad cU = \psi\sqrt{R}.e^{-i\lambda};$$

λ étant l'argument de l'imaginaire b. Cela posé, nous transformerons comme il suit, l'expression en facteurs lineaires de F. Multiplions les facteurs réels $X+aY$ par T, et chacun des facteurs imaginaires conjugués, $X+bY$, $X+cY$, par U; on aura d'abord:

$$T_1 T_2 \ldots . T_\mu . U_1^2 U_2^2 \ldots . U_\nu^2 F$$
$$= A_0 \ldots . (TX+aTY)(UX+bUY)(UX+cUY) \ldots .;$$

puis en introduisant les quantités ω, ϖ, φ, ψ, et représentant, pour abréger, $T_1 T_2 \ldots . T_\mu . U_1^2 U_2^2 \ldots . U_\nu^2$ par (TU):

$$F = \frac{A_0}{(TU)} \cdots . (\omega\sqrt{P}.X+\varphi\sqrt{R}.Y)(\varpi\sqrt{P}.X+e^{i\lambda}\psi\sqrt{R}.Y)$$
$$(\varpi\sqrt{P}.X+e^{-i\lambda}\psi\sqrt{R}.Y) \ldots ..$$

Or telle est l'expression de F, à laquelle nous voulions arriver; par une simple raison d'homogeneité, on en déduit cette conséquence importante, savoir:

Le produit de deux coefficients de F, également éloignés des extrêmes, s'exprime de la manière suivante:

$$A_i A_{n-i} = \frac{A_0^2 (PR)^{\frac{1}{2}n}}{(TU)^2} . (i),$$

la quantité désignée par (i), dépendant seulement de ω, ϖ, φ, ψ et λ. On a par exemple

$$A_0 A_n = \frac{A_0^2 (PR)^{\frac{1}{2}n}}{(TU)^2} . \omega_1 \ldots . \omega_\mu . \varphi_1 \ldots . \varphi_\mu . \varpi_1^2 \ldots . \varpi_\nu^2 . \psi_1^2 \ldots . \psi_\nu^2 .$$

3°. Cette quantité (i), qui est évidemment réelle, a une valeur numérique essentiellement limitée, et dont le maximum s'obtient, quel que soit i, en annulant les arguments λ, et en faisant

$$\omega = \varpi = \varphi = \psi = \frac{1}{\sqrt{n}};$$

on obtient ainsi la limite

$$(i) < \frac{1}{n^n}\left(\frac{n.n-1 \ldots . n-i+1}{1.2 \ldots . i}\right)^2.$$

Je pense pouvoir supprimer la démonstration, qu'on trouvera sans peine.

4°. Il n'a point été introduit jusqu'ici que la forme quadratique Φ fut réduite. Or cette condition donne, en représentant par D le déterminant $PR-Q^2$,

$$PR < \tfrac{4}{3}D,$$

d'où l'on déduit la limitation:

$$A_i A_{n-i} < (\tfrac{4}{3})^{\frac{1}{2}n}(i)\cdot\frac{A_0^2 D^{\frac{1}{2}n}}{(TU)^2}.$$

On est ainsi conduit à étudier avec attention l'expression

$$\theta = \frac{A_0^2 D^{\frac{1}{2}n}}{(TU)^2},$$

et en premier lieu à chercher comment elle dépend des variables t, u, restées entièrement arbitraires. J'observe à cet effet, qu'on a

$$A_0 = f(m,n)$$
$$= a_0(m+\alpha_1 n)\ldots(m+\alpha_\mu n)(m+\beta_1 n)(m+\gamma_1 n)\ldots.(m+\beta_\nu n)(m+\gamma_\nu n).$$

On a posé d'ailleurs

$$T^2 = t^2(m+\alpha n)^2, \qquad U^2 = u^2(m+\beta n)(m+\gamma n),$$

et on en déduit immédiatement que

$$\frac{A_0^2}{(TU)^2} = \frac{a_0^2}{(tu)^2}.$$

En second lieu le déterminant $PR-Q^2$ de Φ, peut être remplacé par le déterminant de φ, où n'entrent que les variables t et u; on a ainsi:

$$\theta = \frac{a_0^2 D^{\frac{1}{2}n}}{(tu)^2}.$$

Telle est donc la fonction de t, u, et des quantités propres seulement à la forme f, et qui sert à limiter les coefficients de toutes les formes contenues dans (f).

5°. Il importe de bien voir comment cette fonction θ, est liée analytiquement à la classe entière des formes équivalentes à f. A cet effet considérons une transformée quelconque F, déduite de f, par la substitution

$$x = mX + m_0 Y,$$
$$y = nX + n_0 Y.$$

La fonction Θ, relative à F, s'obtiendra en remplacant dans θ, les quantités

$$a_0,\quad \alpha,\quad \beta,\quad \gamma,$$

respectivement par

$$A_0,\quad a,\quad b,\quad c.$$

Mettons encore à la place des variables t et u, de θ, d'autres lettres T et U; cela fait, je dis que θ et Θ, coïncideront, en prenant:

$$T^2 = t^2(m+an)^2, \qquad U^2 = u^2(m+an)(m+\beta n).$$

Effectivement, on trouvera comme tout-à-l'heure:

$$\frac{A_0^2}{(TU)^2} = \frac{a_0^2}{(tu)^2}.$$

D'autre part, ainsi qu'on l'a établi précédemment, la forme quadratique Φ, composée avec F, de même que φ avec f, savoir

$$\Phi = T_1^2(X+\mathfrak{a}_1 Y)^2 + \cdots + T_\mu^2(X+\mathfrak{a}_\mu Y)^2 + U_1^2(X+\mathfrak{b}_1 Y)(X+\mathfrak{c}_1 Y) + \cdots,$$

ou bien dans l'hypothèse admise:

$$\Phi = t_1^2(m+\alpha_1 n)^2(X+\mathfrak{a}_1 Y)^2 + \cdots + t_\mu^2(m+\alpha_\mu n)^2(X+\mathfrak{a}_\mu Y)^2 + \text{etc.},$$

se déduira de φ, par la substitution

$$x = mX + m_0 Y,$$
$$y = nX + n_0 Y;$$

donc les déterminants de ces deux formes seront les mêmes; donc le rapport établi entre les variables de Θ, et celle de θ, rend ces deux fonctions identiques.

Delà se tirent deux conséquences importantes.

Premièrement: les fonctions θ et Θ, relatives à deux formes équivalentes f et F, prennent les mêmes valeurs, lorsque les variables passent par tous les états de grandeur, et ont même minimum. Ce minimum sera pour nous la définition de déterminant de la forme binaire de degré quelconque.

Secondement: les formes quadratiques φ et Φ, déduites de deux formes différentes f et F, avec les valeurs de t et u d'une part, T et U de l'autre, qui donnent le minimum des fonctions θ et Θ, deviendront équivalentes en même temps que f et F. Ainsi Φ se déduira de φ, par la même substitution que F de f. Pour rappeler cette propriété, nous désignerons dorénavant, la forme quadratique φ, la correspondante de f.

VI.

Les considérations précédentes nous conduisent à nommer formes binaires de même déterminant, l'ensemble des fonctions homogènes de même degré, pour lesquelles le minimum absolu de la fonction θ aura une même valeur. Nous donnerons aussi le nom de réduites d'une forme f à la forme unique, ou aux formes de l'ensemble (f), qui correspondent à ce minimum de θ. Cela étant, on établira facilement ces propositions:



1°. Les formes équivalentes ont les mêmes réduites.

Supposons que le minimum de la fonction θ, relative à f, s'obtienne pour les valeurs:

$$t = \tau, \qquad u = v,$$

le même minimum de la fonction Θ, relative à une transformée équivalente F, déduite de f, en faisant

$$x = mX + m_0 Y$$
$$y = nX + n_0 Y,$$

correspondra aux valeurs:

$$T^2 = \tau^2 (m + \alpha n)^2, \qquad U^2 = v^2 (m + \beta n)(m + \gamma n).$$

Or il a été démontré plus haut que les formes de (f) et (F), correspondantes à des valeurs de t, u, T, U, liées de cette manière, étaient précisément les mêmes.

Cette proposition fait dépendre l'équivalence de deux formes, de l'égalité absolue entre les réduites, ou les groupes de réduites qui leur correspondent.

2°. Les formes à coefficients entiers, de même déterminant θ, se distribuent en un nombre fini de classes.

Toutes ces formes ne donnent en effet qu'un nombre limité de réduites; car ces réduites étant représentées par

$$F = A_0 X^n + A_1 X^{n-1} Y + \cdots + A_{n-1} X Y^{n-1} + A_n Y^n,$$

on a pour toutes les valeurs du nombre entier i, de zéro à n, la limitation:

$$A_i A_{n-i} < (\tfrac{4}{3})^{\frac{1}{2}n} \cdot \frac{1}{n^n} \cdot \left(\frac{n.n-1 \ldots . n-i+1}{1.2 \ldots . i}\right)^2 . \theta.$$

VII.

Pour première application des principes qui viennent d'être exposés, nous considérons les formes quadratiques à facteurs réels. Alors la fonction θ, comme on le voit immédiatement, est indépendante des variables t_1, t_2, et se réduit à l'expression connue du déterminant. On a alors l'exemple unique dans les formes à deux indéterminées, mais qui se réproduira dans la suite de ces recherches, et un peu plus étendu, d'un nombre infini de réduites, pour une forme donnée. Effectivement les variables t_1, t_2 restant arbitraires, les réduites d'une forme f, donnent l'ensemble désigné par le symbole (f), et il s'agit maintenant de les obtenir par la réduction continuelle de la forme définie φ, lorsque les variables passent par tous les états de grandeur. Pour

employer les notations habituelles, nous poserons:

$$f = ax^2 + 2bxy + cy^2 = a(x+\alpha y)(x+\alpha' y);$$

on aura:

$$\theta = a^2 \frac{t_1^2 t_2^2 (\alpha - \alpha')^2}{t_1^2 t_2^2} = a^2(\alpha - \alpha')^2 = 4(b^2 - ac)$$

et en introduisant dans φ, le rapport $\left(\frac{t_2}{t_1}\right)^2$, qui y figure seul au fond:

$$\varphi = (x+\alpha y)^2 + \lambda(x+\alpha' y)^2,$$

de sorte que l'ensemble (f) des réduites, s'obtiendra en faisant dans f, toutes les substitutions propres à réduire φ, lorsque λ varie d'une manière continue de zéro à l'infini

En restant dans le cas général, où les coefficients de f, sont des quantités quelconques, nous nous fonderons d'abord sur l'observation suivante.

1°. Concevons qu'on attribue aux indéterminées de φ, tous les systêmes possibles de valeurs entières; soient considérés toutefois comme distincts, deux systêmes tels que x, y et $-x$, $-y$, et qu'on range par ordre croissant de grandeur les valeurs obtenues:

On aura ainsi une suite qui dépendra de la valeur de λ, et que nous désignerons par le symbole (λ); en ayant soin, si plusieurs systèmes des indéterminées reproduisaient une même valeur de φ, de les réunir pour les comprendre dans un même groupe.

Cela étant, faisons croître λ, d'une manière continue de zéro à l'infini positif, et cherchons comment s'introduisent des changements dans l'ordre des termes de l'ensemble (λ). J'observe à cet effet, que tous ces termes sont des fonctions continues de λ, de telle sorte qu'en passant d'une valeur déterminée λ_0, à une autre infiniment voisine, $\lambda_0 + d\lambda$, on n'altèrera jamais l'ordre de deux termes consécutifs, tant que leur différence sera une quantité finie. Mais considérons que les groupes formés de la réunion de deux ou plusieurs termes offrent pour la valeur particulière λ_0, des valeurs numériques égales; on voit clairement que deux termes réunis pour $\lambda = \lambda_0$, auront d'abord été séparés, puis auront intervertis leurs rangs, en passant d'une valeur un peu inférieure à une valeur un peu supérieure à λ_0. Car en représentant λ par une abscisse, ces deux termes seraient les ordonnées de deux droites, qui après leur intersection, changent de position relative par rapport à l'arc des x. C'est donc toujours en devenant égaux, que deux termes consécutifs échangent leurs places,

pour entrer dans une suite nouvelle. Avec cette observation bien simple, l'opération arithmétique de la réduction continuelle de φ, pour toutes les valeurs positives de λ, de zéro à l'infini, devient facile à saisir, comme on va voir.

2°. Prenons pour point de départ, une transformée réduite de φ, dont les coefficients extrêmes soient inégaux. Ces coefficients représenteront, comme on l'a établi, les deux premiers minima de φ; donc, lorsque λ, croissant d'une manière continue, atteint la limite au delà de laquelle une nouvelle réduite vient s'offrir, l'une ou l'autre de ces deux circonstances aura nécessairement lieu. Ou bien, le troisième minimum deviendra égal au second, puis le remplacera, ou bien les deux premiers minima deviendront eux même égaux, et intervertiront leur ordre. Le premier cas pourra d'abord se présenter plusieurs fois de suite, mais le second finira nécessairement par arriver; car à moins d'être indépendant de λ, un même terme ne pourrait toujours être le premier minimum. Il est évident d'ailleurs, qu'il n'aura lieu qu'une seule fois; ce qui conduit à le considérer d'une manière particulière. Nous nommerons donc réduites principales, les formes de (f), auxquelles correspondent des réduites de φ, dont les coefficients extrèmes sont égaux; toutes les autres recevront le nom d'intermédiaires. Cela posé, lorsque λ, croissant d'une manière continue, une transformée réduite de φ, cesse de l'être, par suite de l'échange du troisième minimum avec le second: la substitution propre à obtenir la réduite suivante, sera nécessairement

$$x = X + Y,$$
$$y = \phantom{X+{}} Y,$$

ou son inverse:

$$x = X - Y,$$
$$y = \phantom{X-{}} Y.$$

En effet, le coefficient de X^2, reste égal au premier minimum, et celui de Y^2, est bien le troisième, en employant la première ou la seconde substitution, selon que le coefficient moyen sera négatif ou positif. De la même manière on obtiendra donc ainsi toute réduite intermédiaire de (f) au moyen de la réduite précédente. En second lieu, si une réduite de φ, cesse de l'être, par suite de l'échange des deux premiers minima, on aura la substitution

$$x = Y,$$
$$y = -X.$$

Mais alors on sera parvenu à l'une des réduites principales de (f), que cette substitution changera en son associée opposée. Et en continuant les opérations, on verra de nouveau s'offrir une suite de réduites intermédiaires, puis une réduite principale suivie de son opposée, et ainsi jusqu'à l'infini. Nommons, pour abréger, P et Q, les substitutions:

$$\begin{aligned} x &= X+Y \\ y &= \phantom{X+{}}Y \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} x &= Y, \\ y &= -X; \end{aligned}$$

en partant d'une réduite principale, de rang quelconque, la substitution pour obtenir la suivante, sera Q, suivie de P ou son inverse P^{-1}, prise autant de fois de suite, qu'il se présentera de formes intermédiaires, c. à d. QP^i, le nombre entier i étant positif ou négatif. Et en général, on peut résumer les opérations relatives à la réduction de la forme φ, pour toutes les valeurs de λ, croissant d'une manière continue de zéro à l'infini positif, dans la formule

$$\ldots . QP^i QP^j QP^k \ldots .$$

3°. Les formes de (f), que nous avons nommées principales, ont des caractères distinctifs de toutes les autres, et qu'il importe d'établir.

A cet effet, soit

$$F = AX^2 + 2BXY + CY^2 = A(X+\mathrm{a}Y)(X+\mathrm{a}'Y)$$

une transformée quelconque de f, obtenue par la substitution

$$\begin{aligned} x &= mX + m_0 Y, \\ y &= nX + n_0 Y, \end{aligned}$$

on prouvera d'abord immédiatement que F appartiendra à (f), si la forme définie

$$\Phi = (X+\mathrm{a}Y)^2 + \lambda(X+\mathrm{a}'Y)^2,$$

est réduite, en attribuant à λ, une valeur positive convenable; et cette condition est à la fois nécessaire et suffisante. Mais si l'on veut de plus que F, soit une forme principale, il faut qu'on puisse faire:

$$1+\lambda = \mathrm{a}^2 + \lambda \mathrm{a}'^2;$$

ainsi l'une des deux quantités a et a', doit être plus grande et l'autre plus petite que l'unité. D'ailleurs, d'après la valeur de λ, Φ devient

$$\Phi = \left(\frac{\mathrm{a}-\mathrm{a}'}{1-\mathrm{a}'^2}\right)\left(X^2+Y^2+2\cdot\frac{1+\mathrm{a}\mathrm{a}'}{\mathrm{a}+\mathrm{a}'}XY\right),$$

donc pour que ce soit une forme réduite, on doit poser

$$4\left(\frac{1+\mathrm{a}\mathrm{a}'}{\mathrm{a}+\mathrm{a}'}\right)^2 < 1.$$

Réciproquement, cette condition nécessaire est à elle seule suffisante, car on peut l'écrire ainsi:

$$4(1-a^2)(1-a'^2)+2(a^2+a'^2)+(a-a')^2<0;$$

donc $1-a^2$ et $1-a'^2$, sont de signes contraires, et il est possible de prendre pour Φ, la valeur particulière

$$(1-a'^2)(X+aY)^2-(1-a^2)(X+a'Y)^2=(a-a')\left(X^2+Y^2+2\cdot\frac{1+aa'}{a+a'}XY\right),$$

qui est bien une forme définie réduite, dont les coëfficients extrêmes sont égaux.

Ainsi, pour qu'une transformée $F=(A,B,C)$ soit une réduite principale, il faut et il suffit, que la valeur absolue du coefficient moyen, ne surpasse pas la valeur absolue de la somme des coefficients extrêmes.

4°. On a supposé implicitement, dans tout ce qui précède, qu'à une forme définie donnée, corresponde toujours une réduite unique. Il en est effectivement ainsi en général; cependant nous devons tenir compte des cas d'exception, qui se présentent précisement dans les considérations précédentes, savoir, lorsque le second et le troisième, ou bien les deux premiers minima, sont égaux entre eux. On a alors deux réduites qui diffèrent seulement par le signe du coefficient moyen, et dans (f), deux formes différentes qui leur correspondent. Mais de ces deux formes, l'une d'elle répond à la réduite unique pour une valeur de λ un peu inférieure, l'autre à la réduite unique, pour une valeur de λ un peu supérieure à celle qui rend égaux les deux minima. Enfin, dans le cas plus particulier, où les trois premiers minima seraient tous égaux, on aurait une forme définie proportionelle à $x^2\pm xy+y^2$, et susceptible de se transformer elle même par une substitution de la forme $P^{\mp 1}Q$. Quatre formes de (f), correspondantes à cette réduite, seront alors deux principales, et leurs opposées.

VIII.

Nous avons toujours supposé jusqu'ici que les coefficients de la forme quadratique f, étaient des quantités quelconques. Voyons maintenant les circonstances remarquables qui se présentent lorsqu'on les suppose entiers. Alors l'ensemble (f) des réduites ne comprend plus qu'un nombre fini de formes distinctes, puisque leurs coefficients sont limités. Donc, lorsque la réduction continuelle de φ, pour des valeurs croissantes de λ, aura conduit à une forme déjà obtenue, la nature même des opérations montre clairement, qu'elles se reproduiront dès lors périodiquement en faisant croître λ, jusqu'à l'infini, ou en

le faisant décroître, jusqu'à zéro. Ainsi (f) sera composé d'un groupe de formes en nombre fini, se reproduisant une infinité de fois. Nous pouvons donc raisonner comme le fait Mr. *Gauss* §. 187, pour obtenir toutes les classes distinctes de formes de déterminant D. Calculons pour cela l'ensemble Ω des réduites principales, en employant tous les nombres A, B, C, satisfaisant aux conditions:

$$B^2 - AC = D,$$
$$B^2 > (A+C)^2,$$

et prenons l'une d'elles, F. Il résulte immédiatement de nos principes qu'à la période des réduites principales de (F) appartiendront toutes les formes équivalentes de Ω. Cette période obtenue, on prendra une autre forme G de Ω qui n'y soit pas comprise, et on calculera de même la période des réduites principales de (G). Delà on déduira une nouvelle classe distincte de la précédente, et on poursuivra les mêmes opérations, jusqu'à ce qu'on ait épuisé toutes les formes de Ω. Alors on aura obtenu toutes les classes différentes de déterminant D, représentées chacunes, non par une forme unique, mais par une période répétée indéfiniment, d'un petit nombre de réduites principales. Ces périodes ne coïncident pas absolument avec celles de Mr. *Gauss*, comme on le voit par la définition des réduites données §. 183. Remarquons néanmoins qu'elles présentent, comme celles de l'illustre analyste, une série de formes, dont chacune est contiguë à la précédente, par la première partie. En effet, la substitution QP^i, par laquelle on passe de l'une à l'autre, est précisément le type des substitutions qui donnent une transformée contiguë. On pourrait même sans doute, calculer le nombre i, par la condition que la forme contiguë soit une réduite principale; mais je laisserai cette recherche au lecteur.

IX.

Nous avons encore à présenter quelques considérations sur le problème important dont l'objet est de trouver toutes les transformations possibles de deux formes équivalentes, l'une dans l'autre. La belle solution donnée par Mr. *Gauss* §. 162, dépend d'une méthode profonde et cachée, qui, si je ne me trompe, reparaît encore dans d'autres circonstances, p. ex. dans les recherches relatives à la multiplication des classes. J'aurais plutôt, à essayer d'en pénétrer les principes, qu'à y ajouter quelque chose; aussi je me bornerai à déduire des considérations précédentes, ce cas particulier:

Le calcul de l'ensemble désigné par (f), donne toutes les transformations possibles des réduites principales et intermédiaires en elles mêmes.

Soit $F = A(x + ay)(x + a'y)$ l'une d'elles: nous savons que toutes les autres réduites s'obtiendront par la réduction continuelle de la forme définie

$$\Phi = (x + ay)^2 + \lambda(x + a'y)^2,$$

et cette forme définie, comme correspondante à F, est elle même réduite. p. ex. pour $\lambda = \lambda_0$. Soit donc:

$$x = mX + m_0 Y,$$
$$y = nX + n_0 Y$$

la substitution qui change F, en elle même; par cette substitution la forme

$$\frac{1}{(m+an)^2}(x + ay)^2 + \frac{\lambda_0}{(m+a'n)^2}(x + a'y)^2$$

deviendra précisément Φ, quand on y fait $\lambda = \lambda_0$; ainsi donc en réduisant la forme définie dans l'hypothèse $\lambda = \lambda_0 . \left(\frac{m + an}{m + a'n}\right)^2$, on obtiendra bien une transformée semblable quelconque de F.

Maintenant nommons P, la substitution qui reproduit F, pour la première fois lorsque λ croît depuis la valeur λ_0, d'une manière continue, jusqu'à une certaine limite λ_1; à partir de cette limite, les opérations se reproduiront périodiquement jusqu'à l'infini; c'est donc la substitution P, prise un nombre quelconque de fois qui donnera toutes les transformations semblables. Et si l'on considère les valeurs décroissantes de λ, de λ_1 à λ_0, on aura dans un ordre inverse la même série d'opérations, qu'on pourra prolonger à l'infini, dans l'autre sens, et qui donnera pour transformations semblables la substitution inverse P^{-1}, prise de même un nombre quelconque de fois. Les mêmes choses auraient lieu relativement à la transformation de toute réduite F en $-F$, lorsque cette transformation est possible.

X.

L'équation $x^2 - Dy^2 = 1$, a une infinité de solutions.

En prenant en effet $f = x^2 - Dy^2$, on a l'une des réduites intermédiaires comprises dans (f), car la forme définie correspondante

$$(x + y\sqrt{D})^2 + \lambda(x - y\sqrt{D})^2$$

est réduite pour $\lambda = 1$. Delà résulte l'existence d'une infinité de transfor-

mations semblables, telles que

$$x = mX + m_0 Y$$
$$y = nX + n_0 Y,$$

et toutes donnent nécessairement

$$m^2 - Dn^2 = 1.$$

Pour obtenir la loi de toutes ces solutions, nous emploierons la méthode suivante. Soit $\Pi(z)$ une fonction discontinue, égale pour toutes les valeurs réelles de z, au minimum de la forme

$$e^{2z}(x + y\sqrt{D})^2 + e^{-2z}(x - y\sqrt{D})^2,$$

lorsqu'on y suppose x et y entiers. Je dis que toute solution $x = a$, $y = b$, de l'équation proposée, donnera un indice de périodicité de la fonction Π. On pourra déterminer en effet une quantité réelle ω, telle que

$$e^{\omega} = a + b\sqrt{D}, \qquad e^{-\omega} = a - b\sqrt{D},$$

et on trouvera

$$\Pi(z + \omega) = e^{2z}\left(\frac{x + y\sqrt{D}}{a - b\sqrt{D}}\right)^2 + e^{-2z}\left(\frac{x - y\sqrt{D}}{a + b\sqrt{D}}\right)^2.$$

Or on peut faire:

$$x + y\sqrt{D} = (a - b\sqrt{D})(X + Y\sqrt{D})$$
$$x - y\sqrt{D} = (a + b\sqrt{D})(X - Y\sqrt{D}),$$

car cela revient à la substitution au déterminant 1:

$$x = +aX - bDY$$
$$y = -bX + aY;$$

donc $\Pi(z + \omega)$ ne diffère pas de $\Pi(z)$.

Or la fonction discontinue $\Pi(z)$, est néanmoins par sa définition, du genre des fonctions parfaitement déterminées dans toute l'étendue des valeurs réelles de la variable: donc, d'après l'observation bien connue de Mr. *Jacobi*, tous les indices de périodicité, tels que ω, sont des multiples entiers du plus petit d'entre eux. Autrement dit: toutes les solutions $x = A$, $y = B$ de l'équation proposée, se tirent de la solution unique $x = a$, $y = b$ (pour laquelle $a + b\sqrt{D}$ est le plus petit possible) par la formule

$$A + B\sqrt{D} = (a + b\sqrt{D})^i,$$

i étant un nombre entier positif ou négatif.

Toutes ces solutions d'ailleurs s'obtiendront en cherchant effectivement les minima successifs de $\Pi(z)$, ou bien, ce qui est au fond la même chose,

en formant la période de $x^2 - Dy^2$. On a en effet cette proposition plus générale:

Toute représentation de minimum absolu d'une forme à facteurs réels $f = a(x + \alpha y)(x + \alpha' y)$, sera donnée en cherchant pour des valeurs convenables de t et t', le minimum de la forme définie

$$\varphi = t^2(x + \alpha y)^2 + t'^2(x + \alpha' y)^2.$$

Supposons que f soit le plus petit possible pour

$$x = a, \quad y = b.$$

Si le minimum de φ dans l'hypothèse suivante:

$$t = \frac{1}{a + \alpha b}, \quad t' = \frac{1}{a + \alpha' b}$$

n'était pas donné par le même système de valeurs, c'est qu'il en existerait un autre:

$$x = A, \quad y = B,$$

tel qu'on ait

$$\left(\frac{A + \alpha B}{a + \alpha b}\right)^2 + \left(\frac{A + \alpha' B}{a + \alpha' b}\right)^2 < 2;$$

or on en conclurait

$$\left(\frac{A + \alpha B}{a + \alpha b}\right)^2 \left(\frac{A + \alpha' B}{a + \alpha' b}\right)^2 < 1,$$

donc f ne serait pas, contre l'hypothèse, un minimum absolu pour $x = a$, $y = b$.

XI.

Mr. *Gauss* a encore déduit du développement de la période de la forme $(1, 0, -D)$, la décomposition en deux carrés du déterminant, lorsqu'il est un nombre premier $4n + 1$. Ce beau résultat dépend des spéculations les plus élévées de l'Arithmétique transcendante, car il repose en entier sur cette proposition, que les formes proprement primitives de déterminant premier $4n + 1$, n'ont jamais qu'une classe ambiguë. Je vais essayer cependant, sans sortir des considérations élémentaires, de donner la raison de ces rapports singuliers, entre deux points bien différents de la théorie des formes quadratiques.

Soient a et b deux nombres entiers, tels qu'on ait

$$a^2 - Db^2 = -\Delta,$$

Δ étant essentiellement positif. La période de $(1, 0, -D)$ contiendra une transformée obtenue par la réduction de la forme que nous avons nommée φ,

dans l'hypothère suivante:

$$\varphi = (x+y\sqrt{D})^2(a+b\sqrt{D}) - (x-y\sqrt{D})^2(a-b\sqrt{D})$$
$$= 2\sqrt{D}(b,\ a,\ bD).$$

Or on obtient ainsi une forme à coefficients entiers de déterminant $-\Delta$. Soit donc

$$(\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C})$$

l'une quelconque des réduites pour ce déterminant, et

$$x = mX + m_0 Y,$$
$$y = nX + n_0 Y$$

la substitution propre à passer de $(b,\ a,\ bD)$ à $(\mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{C})$. Cette substitution se présentera nécessairement, pour déduire de $(1, 0, -D)$ l'une des réduites principales ou intermédiaires de sa période; soit $(A,\ B,\ C)$ cette réduite, on aura d'une part

$$AX^2 + 2BXY + CY^2 = (mX+m_0Y)^2 - D(nX+n_0Y)^2,$$

et de l'autre

$$\mathrm{A}X^2 + 2\mathrm{B}XY + \mathrm{C}Y^2$$
$$= b(mX+m_0Y)^2 + 2a(mX+m_0Y)(nX+n_0Y) + bD(nX+n_0Y)^2;$$

or on tire aisément delà l'équation suivante:

$$A\mathrm{C} + 2B\mathrm{B} + C\mathrm{A} = 0,$$

dont nous allons montrer les conséquences.

Soit en effet $\Delta = 1, 2, 3, 4, 5$ etc. Au moyen des réduites connues pour ces déterminants, on trouvera successivement

$$\begin{array}{lll} A+C=0, & & \\ 2A+C=0, & & \\ 3A+C=0 & \text{ou} & A-B+C=0, \\ 4A+C=0 & & A+C=0, \\ 5A+C=0 & & 3A-2B+2C=0, \\ \text{etc.} & & \end{array}$$

et ces relations donneront les représentations suivantes du déterminant D:

$$\begin{array}{lll} A^2+B^2 & & \\ 2A^2+B^2 & & \\ 3A^2+B^2 & \text{ou} & B^2-AB+A^2 \\ 4A^2+B^2 & & A^2+B^2 \\ 5A^2+B^2 & & B^2-AB+\tfrac{3}{2}A^2. \end{array}$$

Dans la dernière A est nécessairement un nombre pair, et en écrivant $2A$ à la place de A, elle devient $B^2 - 2AB + CA^2$ ou $(B - A)^2 + 5A^2$; ainsi la représentation de D, par la forme $(1, 0, -5)$, s'obtiendra par le développement de la période de $(1, 0, D)$, toutes les fois que l'équation

$$a^2 - Db^2 = -5$$

sera possible. Mais de tous ces cas, le premier est le seul où nous puissions affirmer que la forme (A, B, C) est une réduite principale; alors en effet la relation $B^2 > (A + C)^2$ se réduit à $B^2 > 0$, qui est satisfaite d'elle-même. Le second a été l'objet de recherches de Mr. *Göpel,* auteur à jamais illustre du mémoire „Adumbratio levis theoriae functionum Abelianarum", comme on le voit dans la notice où Mr. *Jacobi* a rendu un digne hommage à sa mémoire.

Dans ce champ de recherches sur les fonctions Abeliennes, ouverte en même temps par un autre géomètre dont il eut été l'émule, tous ceux qui suivront ses traces, trouveront à côté de leurs méditations le regret d'une destinée cruelle. Qu'il me soit permis, pour avoir eu quelques pensées en partage avec Mr. *Göpel,* de joindre l'expression sincère de ce regret, à celle de mon admiration pour son génie.

XII.

En passant des formes quadratiques à facteurs réels, aux formes de degré plus élevé, la recherche des classes distinctes pour un déterminant donné, dépend en premier lieu de la détermination du minimum de la fonction que nous avons désignée par θ. On n'a plus alors cet ensemble de circonstances analytiques remarquables que nous venons de parcourir, mais que nous retrouverons dans la théorie des formes à facteurs linéaires que nous avons définies §. II. Le fait le plus important à observer, en abordant la théorie des formes cubiques, biquadratiques etc., consiste peut-être dans l'existence pour chaque degré d'un certain nombre de formes comme celles que nous avons nommées précédemment correspondantes. Mr. *Eisenstein* a découvert le premier une correspondante du second degré pour les formes cubiques, et on peut voir le rôle qu'elle joue dans les savantes recherches sur le nombre des classes distinctes pour un déterminant donné. Nos principes, comme on va voir, conduisent directement à cette même forme.

Posons, pour employer les notations suivies:

$$f = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3,$$

on aura pour la fonction θ, deux expressions bien distinctes, l'une pour le cas

où les facteurs linéaires $x+\alpha y$, $x+\alpha' y$, $x+\alpha'' y$ sont réels, savoir:

$$\theta = a^2 \cdot \frac{\{t^2t'^2(\alpha-\alpha')^2+t^2t''^2(\alpha-\alpha'')^2+t'\,t'^2(\alpha'-\alpha'')^2\}^{\frac{3}{2}}}{t^2t'^2t''^2},$$

l'autre pour le cas où $x+\alpha y$ étant réel, $x+\alpha' y$ et $x+\alpha'' y$, sont imaginaires conjugués:

$$\theta = a^2 \cdot \frac{\{2t^2t'^2(\alpha-\alpha')(\alpha-\alpha'')-t'^4(\alpha'-\alpha'')^2\}^{\frac{3}{2}}}{t^2t'^4}.$$

Ces deux expressions différentes peuvent néanmoins être rapprochées l'une de l'autre de la manière suivante. Faisons dans la première:

$$t^2=\tau^2(\alpha'-\alpha'')^2, \qquad t'^2=\tau'^2(\alpha-\alpha'')^2, \qquad t''^2=\tau''^2(\alpha-\alpha')^2,$$

et dans la seconde:

$$t^2=-\tau^2(\alpha'-\alpha'')^2, \qquad t'^2=\tau'^2(\alpha-\alpha')(\alpha-\alpha''),$$

elles deviendront respectivement:

$$\theta = a^2(\alpha-\alpha')(\alpha-\alpha'')(\alpha'-\alpha'')\left\{\left(\frac{\tau\tau'}{\tau''^2}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{\tau\tau''}{\tau'^2}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{\tau'\tau''}{\tau^2}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{3}{2}},$$

$$\theta = a^2(\alpha-\alpha')(\alpha-\alpha'')(\alpha'-\alpha'')\left\{-2\left(\frac{\tau}{\tau'}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{\tau'^2}{\tau^2}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{3}{2}}.$$

Or il est visible qu'au facteur $\sqrt{-1}$ près, la seconde valeur se déduit de la première en y supposant $\tau''=\tau'$. D'un autre côté le minimum de l'expression

$$\left(\frac{\tau\tau'}{\tau''^2}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{\tau\tau''}{\tau'^2}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{\tau'\tau''}{\tau^2}\right)^{\frac{2}{3}},$$

composée de trois parties dont le produit est l'unité, s'obtiendra en rendant les variables égales, et la même hypothèse donnera la même valeur pour le minimum de la seconde fonction. Posant

$$a^4(\alpha-\alpha')^2(\alpha-\alpha'')^2(\alpha'-\alpha'')^2$$
$$= 27(-a^2d^2+3b^2c^2-4ac^3-4db^3+6abcd) = 27D,$$

on trouvera respectivement pour les minima des deux expressions, les valeurs

$$\sqrt{(3^6.D)} \quad \text{et} \quad \sqrt{(-3^6.D)},$$

et pour les formes définies auxquelles nous avons donné le nom général de correspondantes:

$$\varphi = +(\alpha'-\alpha'')^2(x+\alpha y)^2+(\alpha-\alpha'')^2)(x+\alpha' y)^2+(\alpha-\alpha')^2(x+\alpha'' y)^2,$$
$$\varphi = -(\alpha'-\alpha'')^2(x+\alpha y)^2+2(\alpha-\alpha')(\alpha-\alpha'')(x+\alpha' y)(x+\alpha'' y).$$

La différence analytique de ces deux formes, manifeste la différence de nature entre les formes cubiques à facteurs réels et à facteurs imaginaires; dans le

premiers cas φ, s'exprime rationnellement par les coefficients de f, et on arrive à la forme de Mr. *Eisenstein*, en multipliant par le facteur a^2, savoir:

$$\varphi = (ac-b^2)x^2 + (ad-bc)xy + (bd-c^2)y^2.$$

Dans le second il n'en est plus de même, et l'opération de la réduction exigera le calcul numérique de la racine réelle α. Mais les limitations des coefficients pour les transformées réduites $AX^3 + 3BX^2Y + 3CXY^2 + DY^3$, dépendent toujours de ces formules:

$$AD < (\tfrac{4}{3})^{\frac{3}{2}}\sqrt{D},$$
$$BC < (\tfrac{4}{3})^{\frac{1}{2}}\sqrt{D},$$

en ayant soin de prendre la valeur absolue de D.

La correspondante à coefficients rationnels peut être aussi rattachée à une origine différente de celle que nous venons de lui donner, en la considérant comme le déterminant du système:

$$\begin{matrix} \dfrac{d^2f}{dx^2} & \dfrac{d^2f}{dx\,dy} \\[2ex] \dfrac{d^2f}{dx\,dy} & \dfrac{d^2f}{dy^2} \end{matrix},$$

et de là se déduirait une démonstration facile de sa propriété caractéristique. Mais je veux surtout faire remarquer, comment cette seconde expression conduit au théorème suivant, qu'en multipliant φ par elle-même, le produit est toujours transformable en son opposée.

Partons à cet effet des substitutions:

$$X = (ax+by)x' + (bx+cy)y',$$
$$Y = (bx+cy)x' + (cx+dy)y',$$

et représentons par φ, φ', Φ les déterminants des systèmes

$$\left\{\begin{matrix} ax+by, & bx+cy \\ bx+cy, & cx+dy \end{matrix}\right\}, \quad \left\{\begin{matrix} ax'+by', & bx'+cy' \\ bx'+cy', & cx'+dy' \end{matrix}\right\}, \quad \left\{\begin{matrix} cX-bY, & dX-cY \\ bX-aY, & cX-bY \end{matrix}\right\}.$$

On trouvera d'abord, en résolvant successivement par rapport à x', y', et x, y,

$$x' = \frac{X(cx+dy) - Y(bx+cy)}{\varphi}, \qquad y' = \frac{-(bx+cy)X + (ax+by)Y}{\varphi},$$
$$x = \frac{X(cx'+dy') - Y(bx'+cy')}{\varphi'}, \qquad y = \frac{-(bx'+cy')X + (ax'+by')Y}{\varphi'}.$$

Les deux premières formules donneront ensuite:

$$x = f\frac{y'(cX-bY) + y'(dX-cY)}{\Phi}, \qquad y = f\frac{-y'(cX-bY) + x'(-bX+aY)}{\Phi},$$

et en égalant entre elles les deux valeurs obtenues, par exemple pour x, on trouvera

$$\varphi\varphi' = \Phi.$$

Or on vérifie de suite que Φ est précisement l'opposée des deux correspondantes semblables φ et φ'; ce qui démontre la proposition énoncée.

Si de plus, le coefficient moyen étant pair, ces formes sont proprement primitives, Φ, composée de nouveau avec φ, donnera la forme principale de même déterminant; toutes les classes de formes cubiques auront une correspondante quadratique, dont la triplication donnera cette forme principale. Mais il a été établi en outre par Mr. ***Eisenstein*** qu'à toute classe quadratique $\sqrt[3]{k}$ répondait effectivement une seule et unique classe cubique, lorsque le déterminant n'avait pas de diviseur carré. Ce beau théorème montre, comme on voit, un rapport digne de remarque entre deux théories qui n'offrent au premier abord aucun point de contact.

Paris, Juillet 1850.

(La continuation prochainement)

14.

Pendule à mouvement perpétuel.

Si le poids (P), qui met et tient en mouvement une horloge à pendule (à compensation si l'on veut), pouvait être remonté aussitôt qu'il est arrivé au bas, par quelque force *inanimée* ou *inorganique,* cette horloge serait en mouvement *perpétuel.* Il est très sûr que la remonte du poids P ne peut pas être effectuée par la même force qui fait descendre ce poids, savoir par celle de la *gravité,* parceque le frottement et d'autres résistances diminuent toujours son action: mais *d'autres* forces inorganiques et indépendantes de la gravité, que donne la nature, sont effectivement capables, comme on le verra, de combattre la pesanteur et les autres résistances, et d'élever pendant le temps que P descend, un autre poids Q qui alors, s'il est un peu plus lourd que P, sera propre à remonter P. Donc la remonte de P, sans le secours de l'homme ou de toute autre force organique, et par conséquent une pendule à mouvement perpétuel, n'est nullement impossible. Nous prouverons cela.

Une des forces inorganiques, propres à réagir contre celle de la gravité, est, par ex. *la force expansive de la chaleur.* Voici comment elle pourra être utilisée pour le but proposé.

La chaleur, en augmentant, accroît le volume de tous les corps; en baissant, elle le diminue. Une barre de *fer de fonte,* d'un mètre de longueur, s'allonge de 0,011 millimètres à chaque degré centigrade de chaleur de plus, et elle se raccourcit d'autant à chaque degré de moins. L'allongement et le raccourcissement d'une barre de *cuivre* d'un mètre de longueur, dans les mêmes circonstances, est de 0,017 millimètres; et les forces que les barres, si elles sont assez fortes, exercent, en changeant leurs volumes et leurs longueurs, sont *extrêmement* considérables. Soit donc AB (Tab. I. Fig. 1) une forte barre de *cuivre,* d'un mètre de longuenr; soit son extrémité supérieure A fortement fixée sur une plaque épaisse $acdefghb$ en *fer de fonte,* ainsi que l'axe C du levier BCD, et soit le point C fixé sur la plaque de manière, qu'à une température moyenne, l'horizontale B_1CD_1, passant par C, se trouve à une

distance ***AB*** au dessous de ***A***, précisément égale à la longueur qu'a obtenue alors la barre de cuivre ***AB***. Cela posé: le point ***C*** de la plaque de fonte, avec son horizontale B_1CD_1, ***descendra*** au dessous de ***A*** de 0,011 millimètres à chaque degré de chaleur au dessus de la moyenne, et montera d'autant à chaque degré en moins. L'extrémité inférieure ***B*** de la barre en cuivre ***AB***, de son côté, s'éloignera du point ***A*** de 0,017 millimètres à chaque degré de chaleur de plus, et s'en rapprochera d'autant à chaque degré de moins. Donc le point ***B*** qui, à une température moyenne, comme nous l'avons supposé, est ***dans*** l'horizontale B_1CD_1, se trouvera alors de $0{,}017 - 0{,}011 = 0{,}006$ millimètres ***au dessous*** de l'horizontale, à chaque degré de chaleur au dessus de la moyenne, et de 0,006 millim. ***au dessus*** de l'horizontale, à chaque degré de moins. Si maintenant le bras ***CD*** du levier ***BCD*** a 6 décimètres de longueur, tandis que celui ***BC*** n'en a que 6 centimètres, le point ***D*** s'éloignera de l'horizontale B_1CD_1 de 0,06 millim. à chaque degré de chaleur de plus ou de moins. Puis, si le point ***D*** est mis en communication par la barre ***DE*** avec le point ***E*** du levier ***EFG***, dont l'axe ***F*** est fixée sur la plaque de fonte, et dont le bras ***FE*** a 7 centimètres, l'autre bras ***FG*** 7 décimètres de longueur, le point ***G*** s'éloignera de l'horizontale G_1EE_1 (qui pour la température moyenne est supposée passer par ***G*** et ***E***) de 0,6 millim. à chaque degré de chaleur de plus ou de moins. Si enfin le point ***G*** est mis en communication, au moyen de la barre ***GH***, avec le point ***H*** du levier ***HIK***, dont l'axe ***I*** est fixée sur la plaque en fonte, et dont le bras ***HI*** a 8½ centimètres, l'autre bras ***IK*** 8½ decimètres de longueur, le point ***K*** s'éloignera de l'horizontale H_1IK_1 (qui est supposée passer par ***H*** et ***K*** pour une température moyenne) de 6 millim. à chaque degré de chaleur de plus ou de moins. Donc la chaleur, en augmentant et en diminuant d'un degré centigrade, produira un mouvement de va-et-vient du point ***K*** de 6 millimètres ou d'environ ⅕ pouce; et pour 10 degrés d'environ 2 pouces. Or, comme la variation de la température est continuelle, et ne finit jamais, ce mouvement de va-et-vient du point ***K*** est ***perpétuel;*** il continuera à jamais, sans le secours d'aucune force organique. Les lignes IK_2 et IK_3 dans la figure, représentent environ les positions dans lesquelles la ligne ***IK*** est transportée par une variation de température de 30 degrés au dessus et au dessous de la moyenne.

Maintenant il ne s'agit plus que de transformer le mouvement de va-et-vient du point ***K***, en un mouvement de rotation, propre à élever un poids ***Q***, suffisant pour remonter le poids ***P*** de la pendule; et de faire en sorte que

le poids Q soit arrêté à la hauteur d'où il doit descendre, et qu'il soit mis en liberté au moment où le poids P est arrivé au bas.

On connait plusieurs sortes de mécanismes pour transformer le mouvement de va-et-vient en mouvement rotatoire. En voici une dont la figure (1) donne une esquisse, LKL_1 est un arc de cercle denté qui s'engrène dans la crémaillère RR_1. Celle-ci est dentée à son intérieur de deux côtés, mais les dents du bras LL_1 n'occupent que la *moitié* antérieure de la *largeur* du bras, l'autre moitié est sans dents. Au contraire, la moitié antérieure de la largeur de l'autre bras NN_1 est sans dents, et l'autre moitié est dentée. La moitié antérieure dentée du bras LL_1 de la crémaillère s'engrène dans la roue dentée TT, tandis que la moitié antérieure non-dentée du bras NN_1 ne s'y engrène pas. Au contraire la moitié derrière dentée du bras NN_1 s'engrène dans une autre roue dentée, de même grandeur que celle TT, et qui est derrière, à côté d'elle, et non visible dans la figure, tandis que la moitié derrière non-dentée du bras LL_1 ne s'engrène pas dans cette roue. Les deux roues TT tournent *librement* sur l'essieu M. Donc la crémaillère RR, tant en descendant qu'en montant, fait tourner les deux roues en sens opposés. A côté des deux roues TT sont deux autres roues dentées VV, d'un diamètre un peu moindre que celui de TT. Ces roues VV ne tournent *pas librement* sur l'essieu M, comme celles TT: mais elles y sont *fixées*. Chaque roue TT porte un cliquet Z, qui mord dans la roue VV, et les deux cliquets ont *la même* direction. Cela posé: si la crémaillère est poussée *en bas* par l'arc de cercle LKL_1, elle tournera la roue TT de *droite à gauche*, et cette roue, au moyen du cliquet Z, tournera la roue VV, et avec elle l'essieu M dans le même sens: donc le poids Q, suspendu à une corde XX, qui s'enroule sur une poulie UU, fixée sur l'essieu M, sera élévé. Il est vrai que la crémaillère, en descendant, tournera aussi en même temps l'autre roue TT de *gauche à droite*, mais le cliquet de cette roue ne mord pas dans les dents de la roue correspondante VV; il ne fait que glisser sur ses dents, et par conséquent la seconde roue TT tournera *librement* sur l'essieu. Si, au contraire, la crémaillère est poussée en *haut* par l'arc de cercle LKL_1, elle tournera la roue antérieure TT de gauche à droite, mais non pas la roue VV, parceque son cliquet Z ne fait que glisser sur les dents de VV, de sorte que TT tournera librement sur l'essieu. En même temps la crémaillère, en montant, tourne l'autre TT de droite à gauche, et par le moyen de son cliquet, qui mord dans les dents de l'autre roue VV, cette dernière, et avec

elle, l'essieu ***M***. Donc aussi ***en montant,*** la crémaillère tourne l'essieu dans le sens de droite à gauche, et par conséquent l'arc de cercle LKL_1 élève ***toujours*** le poids ***Q,*** aussi bien en descendant qu'en montant.

Pour faire en sorte que le poids ***Q*** ne soit pas élévé ***au-dessus*** de la hauteur de laquelle il doit retomber pour remonter le poids ***P*** de la pendule, il n'y a qu'à faire ***lever*** les deux cliquets par le poids ***Q*** lui-même, au moment où il est arrivé à la hauteur voulue; alors, bien que la crémaillère continue à tourner les deux roues ***TT,*** elle ne tournera plus les roues ***VV,*** et n'agira plus sur le poids ***Q***. Afin que celui-ci ne retombe pas ***aussitôt,*** on le fera prendre et retenir par des crochets à ressort, en forme de tenaille; et pour le lâcher au moment où le poids ***P*** de la pendule est arrivé au bas, on fera détacher par celui-ci, au moyen d'un petit ressort, la tenaille qui retient le poids ***Q***. Alors le poids ***Q*** tombera et remontera le poids ***P*** de la pendule. Le poids ***Q,*** étant arrivé au bas, détachera par un autre petit mécanisme les cliquets ***Z;*** ils se remettront à fonctionner, et le jeu de la machine recommencera.

Il est à remarquer que toutes les barres, excepté celle ***AB***, peuvent être en ***fer,*** si l'on veut. Seulement la barre ***AB*** doit être en ***cuivre,*** si la plaque ***abcf*** est en fonte de fer, pour gagner par l'action de la variation de la température un abaissement et une élévation du point ***B,*** ***différentes*** de celles du point ***C***. Les leviers ***BCD***, ***EFG*** et ***HIK*** doivent être ***très forts,*** puisque la force nécessaire au point ***B,*** pour élever le poids ***Q,*** est, selon les proportions supposées de la machine, 1000 fois celle du poids ***Q***. La barre ***AB*** ne manquera pas de fournir cette force, quelque considérable qu'elle soit, car la force de la dilatation et de la condensation du métal, produite par la variation de la température, est immense; mais il faut que les leviers ne se ***courbent*** pas sous cette force. Si cela était à craindre, on pourrait substituer aux leviers ***droits*** des leviers ***brisés,*** qui pourront être construits plus forts; ou aussi on pourrait renforcer les leviers droits par des barres qui les croisent dans l'axe, contre lesquels alors les bras des leviers pourront être étayés.

Comme il n'y a pas un seul jour dans toute l'année, où la température ne monte et ne descende de quelques degrès, tandis qu'il se présente des jours, où les variations de la température montent à 10, 12, 15 degrès, et plus, et que de l'autre côté on est parfaitement maître de disposer des proportions des bras des leviers, et même de la hauteur à laquelle le poids ***Q*** doit être

élévé pour remonter le poids ***P*** de la pendule, parceque, pour réduire cette hauteur par ex. à la *moitié*, il n'y a qu'à *doubler* le poids ***Q***: on voit bien qu'il sera toujours *possible* d'élever par le mécanisme décrit, par ex. dans l'espace d'une *semaine*, un poids ***Q*** suffisant, et que par conséquent la possibilité de remonter la pendule, sans le secours d'une force organique, est incontestable; au moins en principe.

Les figures 2 et 3 (Tab. I.), dans lesquelles on n'a indiqué que les lignes *centrales* des différentes barres, et les *centres* des arcs et charnières, représentent deux autres mécanismes, propres à transformer le mouvement de va-et-vient du point ***K*** (fig. 1), produit par les leviers ***BCD***, ***EFG*** et ***HIK***, en mouvement de rotation.

Fig. 2 est le levier dit *à la garousse*. La bielle ***EK*** est immédiatement appliquée au point ***K*** du levier ***HIK*** (fig. 1.), au moyen d'une charnière, et sans l'intervention de l'arc denté LKL_1. Si la bielle ***KE*** (fig. 2) est poussée en haut, le point ***B*** du balancier ***EBAD*** monte aussi, et fait tourner la roue dentée C_1CC_2 de droite à gauche, au moyen du crochet ***BF*** qui mord dans les dents de la roue. En même temps le point ***D*** du balancier descend, et le crochet ***DG*** ne fait que glisser sur les dents de la roue. Si la bielle ***KE*** est tirée en bas, le point ***B*** du balancier descend aussi, et le crochet ***BF*** ne fait que glisser sur les dents de la roue. En même temps le point ***D*** du balancier monte, et fait tourner la roue dentée de droite à gauche au moyen du crochet ***DG*** qui, comme celui ***BF***, mord dans les dents de la roue. Les deux crochets ***BF*** et ***DG*** doivent être pressés contre la roue par des ressorts. Donc: soit que la bielle monte, soit qu'elle descende, la roue C_1CC_2 est toujours tournée de droite à gauche, et le poids ***Q*** est élévé au moyen d'une corde qui s'enroule sur une poulie à côté de la roue dentée.

Dans la fig. 3 la bielle bifurquée ***BAD***, ou bien les deux bielles ***AB*** et ***AD***, sont encore immédiatement appliquées au point ***K*** du levier ***HIK*** (fig. 1) au moyen d'une charnière et sans l'intervention de l'arc denté LKL_1. ***BC*** et ***DC*** (fig. 3) sont deux bras de levier, dont chacun tourne librement sur l'essieu, et dont les extrêmités ***B*** et ***D*** sont jointes au moyen de charnières avec les extrêmités des bielles ***AB*** et ***AD***. Le bras de levier ***BC*** porte le cliquet ***BF***, et celui ***CD*** le cliquet ***DG***. Ces deux cliquets sont pressés contre la roue par des ressorts, et ils mordent dans les dents de la roue C_1CC_2 dans le même sens. Maintenant, si le point ***A*** est *poussé en haut*, le cliquet ***DG*** *pousse* les dents de la roue C_1CC_2, et la fait tourner de droite à gauche,

tandis que le cliquet ***BF*** ne fait que glisser sur la roue. Si le point ***A*** *descend,* le cliquet ***BF*** *pousse* les dents de la roue, et la fait tourner également de droite à gauche, tandis que le cliquet ***DG*** ne fait que glisser sur la roue. Donc, soit que le point ***A*** monte, soit qu'il descende, la roue C_1CC_2 est toujours tournée de droite à gauche, et le poids ***Q*** est élévé au moyen d'une corde qui s'enroule sur la poulie L_1CL_2 à côté de la roue dentée.

Les deux mécanismes (fig. 2 et 3) sont moins compliqués que celui ***RR*** (fig. 1), mais ils sont moins propres à atteindre notre but, parceque les positions du balancier ***EBAD*** (fig. 2) et des bras de levier ***CB*** et ***CD*** (fig. 3), correspondantes aux *milieux* des va-et-vient produits par les variations de la température, différeront le plus souvent plus ou moins *de l'horizontale;* de sorte que les mécanismes ne fonctionneront pas toujours dans les positions les plus favorables. Le mécanisme ***RR*** (fig. 1) au contraire fonctionnera toujours parfaitement bien.

D'ailleurs il existe encore, comme on le sait, d'autres moyens, plus ou moins simples, pour transformer un mouvement de va-et-vient en mouvement de rotation. Le plus simple de tout: la *manivelle,* avec *volant,* n'est pas applicable ici.

Il est vrai que tous les mécanismes décrits ci-dessus, sont encore assez compliqués et que leur exécution présenterait beaucoup de difficultés techniques; mais la construction d'une pendule, et encore plus, celle d'une montre à compensation, et de plusieurs autres machines, par ex. d'une machine à vapeur à détente, sont *aussi* très compliquées, et offrent également beaucoup de difficultés techniques; et comme ces difficultés peuvent être surmontées effectivement, il n'y a pas de doute qu'elles pourront l'être également dans notre machine; il ne s'agit pour cela que de le *vouloir* de bonne foi, et sérieusement.

Or, si toutefois on craignait trop les difficultés techniques des mécanismes décrits, le moyen de tirer de la dilatation et de la condensation des *métaux,* produites par la chaleur, la force nécessaire pour remonter une pendule, n'est pas du tout le seul praticable: on pourra recourir pour cela aussi à la dilatation et à la condensation produites par la chaleur dans les *fluides incompressibles,* et alors des mécanismes moins compliqués suffiront.

Voici par ex. un moyen assez simple de ce genre. Supposons un tube cylindrique en métal, par ex. en *cuivre,* d'un mètre de longueur et de 27 millim. de diamètre (d'un pouce environ), ouvert à son extrémité supérieure, et portant à celle inférieure une grosse boule *en cuivre,* d'un demi mètre de diamètre,

et en communication avec le tube, mais d'ailleurs toute fermée, de sorte que le tout constitue un gros *thermomètre.* La boule et le tube seront emplis de *mercure,* au point que la surface du mercure, à une température *moyenne,* se tienne à mi-hauteur du tube. L'augmentation de la hauteur du mercure dans le tube à un degré de chaleur *au dessus de la moyenne,* sera déjà assez sensible.

Pour trouver cette augmentation, soit D le diamètre intérieur de la boule, Δ celui du tube, à la température moyenne, d l'épaisseur des parois de la boule et du tube, h la hauteur au dessus de la boule, à laquelle le mercure se tient dans le tube à une température moyenne. Soit le volume qu'occupe une masse à un dégré au dessus de la température moyenne, pour le mercure $(1+m)$ fois, et pour le cuivre $(1+n)$ fois celui qu'elle occupe à la température moyenne; enfin soit k la hauteur de laquelle la surface du mercure s'élève dans le tube pour un degré d'élévation de la température, et D_1 le diamètre que prend alors la boule, en vertu de cette augmentation: on obtient ce qui suit.

Le volume que le mercure dans la boule et dans le tube occupe par une température moyenne, est $\frac{1}{6}\pi D^3+\frac{1}{4}h\pi\Delta^2$, et par une température d'un degré plus élévé $(1+m)[\frac{1}{6}\pi D^2+\frac{1}{4}h\pi\Delta^2]$. D'un autre côté, le volume que la boule et le tube présentent au mercure dans la dernière température est $\frac{1}{6}\pi D_1^3+\frac{1}{4}(h+k)\pi\Delta^2$: donc nous obtenons l'équation

$$(1+m)[\tfrac{1}{6}\pi D^3+\tfrac{1}{4}h\pi\Delta^2] = \tfrac{1}{6}\pi D_1^3+\tfrac{1}{4}(h+k)\pi\Delta^2, \text{ ou bien}$$

$$1.\quad (1+m)[2D^3+3h\Delta^2] = 2D_1^3+3(h+k)\Delta^2.$$

A la rigueur, le diamètre Δ du tube augmente aussi par la dilatation du métal, comme celui de la boule, mais comme cette augmentation du petit diamètre du tube est très minime, nous la négligeons dans le calcul. Maintenant le volume qu'occupe le métal de la boule (nous négligeons celui des parois du tube) est $\frac{1}{6}\pi[(D+d)^3-D^3]$, par la température moyenne, et $(1+n)\frac{1}{6}\pi[(D+d)^3-D^3]$ par une température d'un degré plus élévé. Or ce dernier volume peut aussi être exprimé par $\frac{1}{6}\pi[(D_1+d)^3-D_1^3]$, donc nous avons l'équation

$$(1+n)\tfrac{1}{6}\pi[(D+d)^3-D^3] = \tfrac{1}{6}\pi[(D_1+d)^3-D_1^3] \text{ ou bien}$$

$$2.\quad (1+n)(3D^2+3Dd+d^2) = 3D_1^2+3D_1d+d^2.$$

Comme d est très petit comparativement à D_1 et D, on pourra supprimer les termes de cette équation qui contiennent d. Cela réduit l'équation (2.) à

$$3.\quad D_1 = D(1+n)^{\frac{1}{2}}.$$

Cette expression de D_1 étant substituée dans équation (1.), on obtient

$$4.\quad (1+m)[2D^3+3h\Delta^2] = 2D^3(1+n)^{\frac{3}{2}}+3(h+k)\Delta^2.$$

Or, $(1+n)^{\frac{3}{2}}$ étant $=1+\frac{3}{2}n+\frac{3}{8}n^2-\frac{1}{16}n^3\ldots$ et n une très petite fraction, on peut écrire $1+\frac{3}{2}n$ au lieu de $(1+n)^{\frac{3}{2}}$. Cela donne, au lieu de (4.), $(1+m)[2D^3+3h\varDelta^2]=2D^3(1+\frac{3}{2}n)+3(h+k)\varDelta^2$ ou bien

$$2D^3(m-\tfrac{3}{2}n)+3\varDelta^2hm = 3k\varDelta^2,$$ et delà on tire

$$5.\quad k = \frac{2D^3}{3\varDelta^2}(m-\tfrac{3}{2}n)+mh.$$

Nous avons supposé $D=0{,}5$, $\varDelta=0{,}027$, $h=0{,}5$ mètres, et suivant les expériences faites sur la dilatation que la chaleur opère sur le mercure et le cuivre, on a $m=0{,}00018$ et $n=0{,}000052$. Ces chiffres substitués dans (5.), on obtient

$$6.\quad k=\frac{2.0{,}5^3}{3.0{,}027^2}(0{,}00018-0{,}000078)+0{,}00018.0{,}5=11{,}7 \text{ millimètres.}$$

Donc le mercure de la boule s'élèvera dans le tube de 11,7 millim. ou de près d'un *demi-pouce* à chaque degré d'élévation de la température. C'est plus que le double de ce que nous avons obtenu ci-dessus pour le point K de la figure, au moyen d'un système de leviers.

Maintenant dans l'intérieur de notre tube, qui doit être bien calibré, supposons un *piston*, posé sur la surface du mercure et muni d'une tige qui porte un contrepoids, proportionnée au poids Q à élever. La tige du piston et le contrepoids seront élevés avec une grande force par la dilatation du mercure opérée par la chaleur, et le contrepoids auquel vient en aide la pression de l'atmosphère sur la surface du piston, la fera redescendre si la température baisse. Voilà donc un mouvement de va-et-vient, produit seulement par les variations continuelles de la température de l'atmosphère. On pourra se servir de ce mouvement, comme il a été décrit plus haut, pour élever un poids Q qui fera remonter le poids moteur P de la pendule. La tige du piston dans notre tube peut être immédiatement celle de la crémaillère RR (fig. 1), ou la bielle EK (fig. 2), ou celle AT (fig. 3). Ici les difficultés techniques, qu'on pourrait craindre pour le système des leviers, sont évitées, et la machine est beaucoup plus simple. Elle fonctionnera *toujours*, et aussi longtemps que le métal durera; c'est là tout ce qu'on peut rationnellement désirer. Le mercure durera aussi, comme dans tout thermomètre; il n'est nulle part en contact avec l'atmosphère.

On pourrait même se servir de la force *du vent* ou des courants d'air dans un édifice, pour élever au moyen d'un moulinet à ailes horizontales, des poids destinés à remonter le poids moteur de la pendule. Il est bien vrai

que la force des vents et des courants d'air est extrêmement *irrégulière*, et que souvent les calmes complets durent longtemps, mais il ne serait pas impossible d'arranger le mécanisme de manière que d'un côté les vents *forts* élèvent, l'un après l'autre, *plusieurs* poids, chacun égal à celui qui est nécessaire pour remonter le poids de la pendule, poids qui alors seront lâchés dans les temps calmes l'un après l'autre: d'un autre côté de manière que les vents forts, quand ils continuent toujours encore, cessent d'agir sur les poids à élever, aussitôt qu'une provision suffisante en a été gagnée. Mais la force qu'offrent la dilatation et la condensation des *métaux*, sera sans doute préférable à celle du *vent*, parceque les variations de la température qui la produit, sont beaucoup plus continuelles et plus régulières que les mouvements de l'atmosphère.

On croira peut-être pouvoir refuter tout ce qui a été proposé ci-dessus, en disant qu'une machine telle que nous l'avons décrite, ne serait autre chose que ce *perpetuum mobile* si décrié, que les physiciens et les géomètres classent dans la catégorie de la quadrature du cercle, p. ex. Sans le moindre doute la quadrature du cercle n'est possible, ni par la règle et le compas, ni par des nombres entiers ou fractionnaires, et par des racines carrées: mais elle est fort bien possible par des séries infinies, ou par d'autres moyens d'approximation. Également, sans le moindre doute, un mouvement perpétuel est impossible à produire par une *seule* force inorganique de la nature, par ex. par la force de la gravité *seule*, mais, comme nous l'avons fait voir, cela n'est pas impossible, si l'on a recours à plusieurs forces *différentes*, et si l'on fait combattre l'une par l'autre; par ex. si l'on oppose la force de la *chaleur* à celle de la *gravité*. C'est effectivement la même chose que la nature fait elle-même partout et sans cesse, et l'homme, dans tout ce qu'il produit, ne fait jamais que diriger les forces de la nature selon ses buts. Toute la nature est un véritable *perpetuum mobile;* non seulement les corps célestes le sont, avec leurs mouvements: mais sur la terre aussi, tout est en mouvement continuel. La chaleur évaporise l'eau et l'élève dans les nues, malgré la force de la gravité; d'autres forces condensent les vapeurs dans l'atmosphère, et la pesanteur reconduit l'eau sur la terre. L'atmosphère et la mer sont en mouvement continuel. Les molécules de tous les corps sont mobiles, quoique imperceptiblement, en vertu de la dilatation produite par la chaleur. Le mercure dans un thermomètre et dans un baromètre, est en mouvement continuel bien visible. Une aiguille aimantée l'est également etc. Partout le mouvement: nulle part le repos absolu! Pourquoi donc serait-il impossible à l'homme,

d'imiter la nature aussi dans ce cas, et de diriger les différentes forces de cette dernière de manière à produire un mouvement demandé? Qu'on fasse agir la vapeur d'une source chaude naturelle sur une machine à vapeur, et on aura sans doute un mouvement perpétuel très puissant, sans le moindre secours d'une force organique. Les sources chaudes naturelles sont rares, mais l'action de la chaleur sur tous les corps, tant rigides que fluides, existe partout. C'est la même action qui produit les sources chaudes: donc également, comme les sources chaudes peuvent être utilisées pour produire un mouvement perpétuel, l'action de la chaleur sur les corps peut-être utilisée aussi pour le même but.

Berlin, décembre 1850.

15.

Anhang zu der „Tabelle der reducirten positiven ternären quadratischen Formen, etc." im vorigen Hefte.

(Von Herrn Dr. G. *Eisenstein*, Docent an der Universität zu Berlin.)

Dieser Anhang enthält als Beilagen zu der vorhergehenden Arbeit zuerst einige Tafeln, welche sich auf die Theorie der Transformation der positiven ternären Formen beziehen und theils als eine Ergänzung zu §. 6. anzusehen sind; sodann einen Versuch zu einer Tabelle der unbestimmten oder indifferenten ternären quadratischen Formen.

A. Tafeln über die Häufigkeit des Vorkommens der einzelnen Transformations-Anzahlen.

1) Eigentlich primitive Formen.

D	$\delta=$ 1	2	4	6	8	12	24
1							1
2					1		
3					1	1	
4					2		
5			1		1		
6			1		1		
7			1	1	1		
8			2		2		
9			1		2	1	
10			2		1		
11		1	1		1		
12			3		2	1	
13		1	1	1	1		
14		1	1		1		
15			4		1	1	
16			3		3		1
17		2	1		1		
18		1	3		2		
19		2	1	1	1		
20		1	4	1	2		
21		1	4		1	1	
22		2	1		1		
23		3	1		1		
24			8		2		
25		1	2	1	2		

D	$\delta=$ 1	2	4	6	8	12	24
26		2	2		1		
27		3	3		1	2	
28		3	4		2		
29	1	2	1		1		
30		1	5		1		
31		4	1	1	1		
32		3	7		2		
33		3	4		1	1	
34		3	2		1		
35		3	5		1		
36		2	7		4	1	
37	1	3	1	1	1		
38		4	1		1		
39		4	4		1	1	
40		2	10		2		
41	1	4	1		1		
42		2	6		1		
43	1	4	1	1	1		
44		6	4	1	2		
45	1	2	9		2	1	
46	1	3	1		1		
47		7	1		1		
48		2	13		4	1	
49		3	2	2	2		
50	1	3	4		2		

D	$\delta=$ 1	2	4	6	8	12	24
51	1	4	4		1	1	
52	1	6	4		2		
53	2	4	1		1		
54	1	4	5		1		
55		6	5	1	1		
56		6	8		2		
57	1	5	4		1	1	
58	1	4	2		1		
59	1	7	1		1		
60		4	15		2	1	
61	2	5	1	1	1		
62	1	5	1		1		
63	1	6	9		2	1	
64		5	8		4		
65	2	4	5		1		
66		5	6		1		
67	2	6	1	1	1		
68	1	9	4	1	2		
69	1	7	4		1	1	
70		6	5		1		
71	2	7	1		1		
72	2	4	18		4		
73	2	7	1	1	1		
74	2	4	2		1		
75	1	6	8		2	2	

D	δ = 1	2	4	6	8	12	24
76	1	11	4		2		
77	2	6	5		1		
78	1	5	5		1		
79	3	6	1	1	1		
80		8	16		4		
81	1	6	5	1	2	1	
82	1	7	2		1		
83	2	9	1		1		
84	1	7	15		2	1	
85	3	5	5	1	1		
86	2	6	1		1		
87	1	10	4		1	1	
88	2	8	8		2		
89	3	8	1		1		
90	2	4	13		2		
91	2	8	5	1	1		
92	2	12	4	1	2		
93	2	9	4		1	1	
94	2	7	1		1		
95	2	9	5		1		
96	1	7	23		2		
97	3	9	1	1	1		
98	2	8	3		2		
99	4	8	9		2	1	
100	2	7	8	1	4		

2) Uneigentlich primitive Formen.

D	δ = 1	2	4	6	8	12	24
4							1
6						1	
10				1			
12					1	1	
14			1				
16				1			
18						1	
20			1		1		
22			1	1			
24			1			1	
26		1					
28			1	1	1		
30			2			1	
34		1		1			
36			1		2	1	
38		1	1				
40		1		1			
42		1	1			1	
44		1	1		1		
46		1	1	1			
48		1	1			1	
50				1			
52		1	1	1	1		
54		1	1	1		2	
56		1	2				
58		2		1			
60			4		1	1	
62		2	1				
64		1		1			
66		2	1			1	
68		2	1		1		
70		1	3	1			
72			1			1	
74	1	1					
76		2	1	1	1		
78		2	2			1	
80		3					
82		3		1			
84		1	4		1	1	
86	1	1	1				
88		2	2	1			
90		3	2			1	
92		3	1		1		
94		3	1	1			
96		2	1			1	
98			1				
100		1	2	1	2		

Die Zahlen der vorstehenden kleinen Tafeln, welche durch ziemlich mühsames Abzählen der einzelnen δ aus der grofsen Tabelle erhalten worden sind, zeigen an, *wie vielen* Formen mit der am Rande befindlichen Determinante die oben über der Spalte stehende Anzahl von Transformationen zukommt. Addirt man in diesen Tafeln die von der zweiten Spalte an in einer Zeile neben einander stehenden Zahlen, so giebt die Summe die Formenzahl für die in der ersten Spalte befindliche Determinante; multiplicirt man die in der 2ten, 3ten, 4ten, 5ten, 6ten, 7ten, 8ten Spalte stehenden Zahlen resp. mit 24, 12, 6, 4, 3, 2, 1, und dividirt die Summe der Producte durch 24, so erhält man das Maafs oder die Dichtigkeit für dieselbe Determinante.

Unter den allgemeinen Sätzen, welche man aus diesen Tafeln ziehen kann, bemerke ich beispielsweise nur den einen, dafs die Transformations-Anzahl $\delta = 12$ nur dann vorkommt, wenn die Determinante durch 3 theilbar ist, und zwar bei den eigentlich primitiven Formen *so oft,* als es Arten giebt D auf die Form $D = 3mn^2$ zu bringen, während m ungerade und zu n relative Primzahl ist, bei den uneigentlich primitiven Formen *so oft,* als es Arten giebt D auf die Form $D = 6mn^2$ zu bringen, während n ungerade und zu m relative Primzahl ist.

B. Tafeln zur Aufstellung der Substitutionen, durch welche eine reducirte positive ternäre quadratische Form in sich selbst transformirt wird.

Durch die in §. 6. aufgestellten Tafeln ist man in Stand gesetzt, für jede reducirte Form den zugehörigen Werth von δ, d. h. die *Anzahl* der Substitutionen zu finden, durch welche die Form in sich selbst transformirt werden kann. Dies war genügend für die Controlirung der Tabelle der reducirten Formen durch die Bestimmung des Maafses oder der Dichtigkeit $\Sigma\frac{1}{\delta}$. Da es jedoch in anderer Hinsicht von Wichtigkeit sein kann, *die Substitutionen selbst,* und nicht blofs ihre Anzahl kennen zu lernen, so füge ich hier die vollständigeren Tafeln hinzu, welche diesem Zwecke entsprechen. Der Gebrauch der Tafeln I *b.* und II *b.*, welche aus I *a.* resp. II *a.* entsprungen sind, ist bis auf die Bezeichnung der hier auftretenden Substitutions-*Systeme,* von denen sogleich die Rede sein wird, ganz analog dem der Tafeln I. und II. in §. 6.; man mufs wieder jeden Complex von Bedingungen, welchen die Form

Genüge leistet, einzeln in den Tafeln aufsuchen und findet dann nach und nach alle der Form zugehörigen Substitutionen. Bei tabellarischer Anordnung der Formen gelten natürlich ähnliche Vortheile wie in §. 6. Um beiläufig auch der Transformation der *nicht*-reducirten Formen zu erwähnen, so kann man jede solche Form in eine reducirte transformiren, und wenn man die hierdurch gewonnene Substitution mit allen Substitutionen der reducirten Form in sich selbst und sodann mit der jener ersten reciproken Substitution zusammensetzt, so findet man alle Transformationen der vorgelegten Form in sich selbst *).

---

*) *Seeber* war in seinem Werke über die ternären Formen der Lösung der Aufgabe, alle Substitutionen einer reducirten Form in sich selbst zu finden, aufserordentlich nahe. Nachdem er nämlich zum Beweise des Satzes, dafs je zwei äquivalente reducirte Formen identisch sein müssen, zwei Tabellen von Substitutionen aufgestellt hat, welche man ohne gewissen zunächst liegenden Bedingungen zu widersprechen zwischen den beiden reducirten Formen annehmen kann, begnügt er sich zu zeigen, dafs die erhaltenen Substitutionen theils wegen der ferneren Bedingungen unmöglich, theils von solcher Beschaffenheit sind, dafs die zweite reducirte Form mit der ersten identisch wird. Er hätte aber weiter schliefsen können, dafs diejenigen seiner Substitutionen, welche sich nicht als unmöglich erweisen, gerade diejenigen sind, durch welche die erste Form zwar nicht in eine von ihr verschiedene, aber wohl in eine mit ihr identische, also in sich selbst übergeht. Aus diesem Gesichtspuncte betrachtet hätten die *Seeber*schen Tafeln auf Seite 111 ff. und S. 159 ff. jenes Werkes sehr wohl als Grundlage bei der Lösung des hier in Rede stehenden Problems benutzt werden können, wenn nicht bei der grofsen Complication, mit welcher der Gegenstand behandelt wird, sehr gegründete Zweifel an der Vollzähligkeit der dort aufgeführten Fälle entstanden wären. Bei dem Zwecke, welchen sich *Seeber* vorgesetzt hatte, und welcher in dem Beweise eines Satzes negativer Art bestand, war allerdings die Auslassung einiger Fälle von keiner grofsen Erheblichkeit, während hier, wo es sich um positive und zuverlässige Resultate handelt, eine absolute Genauigkeit erfordert wird. Es schien daher rathsam, lieber die ganze Arbeit noch einmal und in einer mehr übersichtlichen Weise von vorn anzufangen, als die *Seeber*schen Tafeln zu benutzen; und in der That wurden zwei Fälle auf Seite 160 vermifst, die keinesweges unmöglich sind, nämlich nach der dortigen Bezeichnung die Fälle $(1, f, \beta)$ und $(1, f, \gamma)$. Dafs übrigens der genannte Verfasser auf den hier ausgesprochenen höchst einfachen Gedanken zur Lösung des Problems der Transformation nicht verfallen ist, geht daraus hervor, dafs er an einer spätern Stelle seines Werkes (No. 33) dasselbe Problem unabhängig von den reducirten Formen und in einer Weise behandelt, welche freilich nicht tiefer in das Wesen der Sache eindringt, indem z. B. aus seinen Betrachtungen, welche eher eine Auseinandersetzung als eine Lösung des Problems genannt werden können, nicht einmal hervorgeht, dafs die Zahl der Transformationen immer ein Divisor von 24 sein mufs. Diese Bemerkung soll jedoch keineswegés einen Tadel des *Seeber*schen Werkes enthalten, dieselbe soll nur darauf hinweisen, dafs in dem *Seeber*schen Beweise des Satzes über die Identität zweier äquivalenten reducirten Formen, welcher durch seine Länge wahrscheinlich die meisten Mathematiker abgeschreckt hat, dem Verfasser *unbewufst* die Elemente zu noch anderen sehr nützlichen Untersuchungen enthalten sind.

I. Tafeln für die Formen $\begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ +b, & +b', & +b'' \end{pmatrix}$ mit *positiven* unteren Coëfficienten.

Da bei der Transformation dieser Formen in sich selbst nur solche Substitutions-Systeme $\begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{pmatrix}$ vorkommen, deren drei Verticalreihen $\begin{cases} \alpha \\ \alpha' \\ \alpha'' \end{cases}$ sowohl, als $\begin{cases} \beta \\ \beta' \\ \beta'' \end{cases}$, als $\begin{cases} \gamma \\ \gamma' \\ \gamma'' \end{cases}$ sämmtlich mit einer oder der andern der 12 folgenden Verticalreihen übereinstimmen:

$$\overset{(1)}{\begin{cases} 1 \\ 0, \\ 0 \end{cases}} \overset{(2)}{\begin{cases} 0 \\ 1, \\ 0 \end{cases}} \overset{(3)}{\begin{cases} 0 \\ 0, \\ 1 \end{cases}} \overset{(4)}{\begin{cases} 1 \\ -1, \\ 0 \end{cases}} \overset{(5)}{\begin{cases} 1 \\ 0, \\ -1 \end{cases}} \overset{(6)}{\begin{cases} 0 \\ 1, \\ -1 \end{cases}}$$

$$\overset{(\bar{1})}{\begin{cases} -1 \\ 0, \\ 0 \end{cases}} \overset{(\bar{2})}{\begin{cases} 0 \\ -1, \\ 0 \end{cases}} \overset{(\bar{3})}{\begin{cases} 0 \\ 0, \\ -1 \end{cases}} \overset{(\bar{4})}{\begin{cases} -1 \\ 1, \\ 0 \end{cases}} \overset{(\bar{5})}{\begin{cases} -1 \\ 0, \\ 1 \end{cases}} \overset{(\bar{6})}{\begin{cases} 0 \\ -1, \\ 1 \end{cases}}$$

so soll der Raumersparnifs und gröfseren Übersichtlichkeit wegen jede Substitution nur durch drei Ziffern angedeutet werden, welche sich auf die eben geschriebenen Verticalreihen von Substitutions-Coëfficienten beziehen; so soll z. B. das Symbol $(1, 2, 3)$ die Substitution $\begin{pmatrix} 1, 0, 0 \\ 0, 1, 0 \\ 0, 0, 1 \end{pmatrix}$ bedeuten, das Symbol $(2, \bar{4}, 6)$ die Substitution $\begin{pmatrix} 0, & -1, & 0 \\ 1, & 1, & 1 \\ 0, & 0, & -1 \end{pmatrix}$, u. s. w. Die nachstehende Tafel enthält nun, systematisch geordnet, alle Substitutionen, welche überhaupt bei den reducirten Formen dieser Art vorkommen können. Ihre Zahl ist 29 und sie vereinigen folgende Eigenschaften in sich: 1) *keine* reducirte Form dieser Art kann durch eine *andere* Substitution (mit der Determinante $+1$) als eine von diesen 29 in sich selbst übergehen; 2) wenn auch bei keiner Form alle diese Substitutionen vereinigt angetroffen werden, so giebt es doch für jede der Substitutionen unendlich viele reducirte Formen, welche durch sie in sich selbst transformirt werden können; 3) jede einzelne dieser 29 Substitutionen findet bei *allen* solchen und *nur* bei solchen reducirten Formen Statt, deren Coëfficienten den der Substitution beigesetzten Relationen Genüge leisten.

I *a*. **Tafel der möglichen Substitutionen nebst den Bedingungen zwischen den Coëfficienten, welche erforderlich und zugleich hinreichend sind, damit durch eine solche Substitution eine reducirte Form mit *positiven* unteren Coëfficienten in sich selbst übergeht.**

Substitutionen.	Bedingungen.
$(1, 2, 3)$	keine Bedingung *).
$(\bar{1}, \bar{2}, \bar{5})$	$a = 2b', \quad b'' = 2b.$
$(\bar{1}, \bar{2}, \bar{6})$	$a' = 2b, \quad b'' = 2b'.$
$(\bar{1}, \bar{3}, \bar{2})$	$a' = a'', \quad b' = b''.$
$(1, 3, 4)$	$a' = a'', \quad a = 2b' = 2b'' = 4b.$
$(\bar{1}, \bar{4}, \bar{3})$	$a = 2b'', \quad b' = 2b.$
$(1, 4, 5)$	$a = 2b' = 2b''.$
$(1, 5, 2)$	$a = a'', \quad a = 2b' = 2b'' = 4b.$
$(\bar{1}, \bar{5}, \bar{4})$	$a' = a'', \quad a = 2b' = 2b''.$
$(\bar{2}, \bar{1}, \bar{3})$	$a = a', \quad b = b'.$
$(2, 3, 1)$	$a = a' = a'', \quad b = b' = b''.$
$(\bar{2}, 4, \bar{6})$	$a = a' = 2b = 2b' = 2b''.$
$(2, 6, \bar{4})$	$a = a' = a'' = 2b = 2b' = 2b''.$
$(3, 1, 2)$	$a = a' = a'', \quad b = b' = b''.$
$(\bar{3}, \bar{2}, \bar{1})$	$a = a' = a'', \quad b = b' = b''.$
$(3, \bar{5}, \bar{6})$	$a = a' = a'' = 2b = 2b' = 2b''.$
$(\bar{3}, 6, 5)$	$a = a' = a'' = 2b = 2b' = 2b''.$
$(\bar{4}, \bar{1}, \bar{5})$	$a = a' = 2b = 2b' = 2b''.$
$(\bar{4}, 2, 6)$	$a = a' = 2b = 2b' = 2b''.$
$(4, 5, 1)$	
$(4, \bar{6}, \bar{2})$	
$(5, 1, 4)$	
$(5, \bar{3}, 6)$	
$(\bar{5}, \bar{4}, \bar{1})$	
$(\bar{5}, \bar{6}, 3)$	$a = a' = a'' = 2b = 2b' = 2b''.$
$(\bar{6}, \bar{2}, 4)$	
$(\bar{6}, 3, \bar{5})$	
$(6, \bar{4}, 2)$	
$(6, 5, \bar{3})$	

*) d. h. durch die Substitution (1, 2, 3) geht *jede* Form in sich selbst über.

Hieraus geht durch umgekehrte Anordnung, indem man jedesmal alle diejenigen Substitutionen zusammenfafst, welchen derselbe Complex von Bedingungen entspricht, die folgende Tafel hervor:

I *b*. Tafel zur Aufstellung aller Transformationen, durch welche eine vorgelegte reducirte Form mit *positiven* unteren Coëfficienten in sich selbst übergeht.

Bedingungen.	Substitutionen.
Keine Bedingung:	$(1, 2, 3)$.
$a = 2b' = 2b''$:	$(1, 4, 5)$.
$a = 2b',\ b'' = 2b$:	$(\bar{1}, \bar{2}, \bar{5})$.
$a = 2b'',\ b' = 2b$:	$(\bar{1}, \bar{4}, \bar{3})$.
$a' = 2b,\ b'' = 2b'$:	$(\bar{1}, \bar{2}, \bar{6})$.
$a = a',\ b = b'$:	$(\bar{2}, \bar{1}, \bar{3})$.
$a = a'',\ b' = b''$:	$(\bar{1}, \bar{3}, \bar{2})$.
$a' = a'',\ a = 2b' = 2b''$:	$(\bar{1}, 5, \bar{4})$.
$a' = a'',\ a = 2b' = 2b'' = 4b$:	$(1, 3, 4)$, $(1, 5, 2)$.
$a = a' = 2b = 2b' = 2b''$:	$(\bar{2}, 4, \bar{6})$, $(\bar{4}, \bar{1}, \bar{5})$, $(\bar{4}, 2, 6)$.
$a = a' = a'',\ b = b' = b''$:	$(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$, $(\bar{3}, \bar{2}, \bar{1})$.
$a = a' = a'' = 2b = 2b' = 2b''$:	$(2, 6, \bar{4})$, $(3, \bar{5}, \bar{6})$, $(\bar{3}, 6, 5)$, $(4, 5, 1)$, $(4, \bar{6}, \bar{2})$, $(5, 1, 4)$, $(5, \bar{3}, 6)$, $(\bar{5}, \bar{4}, \bar{1})$, $(\bar{5}, \bar{6}, 3)$, $(\bar{6}, \bar{2}, 4)$, $(\bar{6}, 3, \bar{5})$, $(6, \bar{4}, 2)$, $(6, 5, \bar{3})$.

Die 29 in diesen Tafeln enthaltenen Substitutionen sind nicht ohne Mühe sämmtlich so ausgewählt, dafs ihre Determinante $= +1$ wird, indem die Substitutionen mit der Determinante -1, welche unnöthiger Weise die Zahl der Systeme verdoppeln würden, ausgeschlossen worden sind; letztere gehen übrigens aus den obigen 29 hervor, wenn man alle neun Coëfficienten der Substitutionssysteme in ihre entgegengesetzten Werthe umwandelt. Ein Beispiel der Anwendung der Tafel I *b*. scheint wegen der grofsen Einfachheit unnöthig zu sein, und verweise ich auf die Beispiele zu II *b*. für den nun folgenden zweiten Fall der reducirten Formen, so wie auf §. 6.

II. Tafeln für die Formen $\begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ -b, & -b', & -b'' \end{pmatrix}$ mit *nicht positiven* unteren Coëfficienten.

Da bei diesen Formen die Substitutions-Systeme nur solche Verticalreihen von Coëfficienten enthalten, welche mit einer der folgenden 14 übereinstimmen,

$$\begin{matrix} (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) & (7) \\ \left\{\begin{matrix}1\\0\\0\end{matrix}\right., & \left\{\begin{matrix}0\\1\\0\end{matrix}\right., & \left\{\begin{matrix}0\\0\\1\end{matrix}\right., & \left\{\begin{matrix}1\\1\\0\end{matrix}\right., & \left\{\begin{matrix}1\\0\\1\end{matrix}\right., & \left\{\begin{matrix}0\\1\\1\end{matrix}\right., & \left\{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}\right. \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} (\overline{1}) & (\overline{2}) & (\overline{3}) & (\overline{4}) & (\overline{5}) & (\overline{6}) & (\overline{7}) \\ \left\{\begin{matrix}-1\\0\\0\end{matrix}\right., & \left\{\begin{matrix}0\\-1\\0\end{matrix}\right., & \left\{\begin{matrix}0\\0\\-1\end{matrix}\right., & \left\{\begin{matrix}-1\\-1\\0\end{matrix}\right., & \left\{\begin{matrix}-1\\0\\-1\end{matrix}\right., & \left\{\begin{matrix}0\\-1\\-1\end{matrix}\right., & \left\{\begin{matrix}-1\\-1\\-1\end{matrix}\right., \end{matrix}$$

so sollen, ähnlich wie oben, die Substitutionen durch Symbole mit drei Ziffern aus der Reihe 1, 2, ... bis 7 und $\overline{1}, \overline{2}$, ... bis $\overline{7}$ vorgestellt werden, welche sich auf die jetzt geltenden, eben aufgestellten Combinationen von Substitutions-Coëfficienten beziehen, so dafs z. B. $(1, 2, \overline{7})$ das Substitutions-System $\begin{pmatrix} 1, & 0, & -1 \\ 0, & 1, & -1 \\ 0, & 0, & -1 \end{pmatrix}$ bedeutet u. s. w.

II *a*. Tafel der möglichen Substitutionen nebst den Bedingungen zwischen den Coëfficienten, welche erforderlich und zugleich hinreichend sind, damit durch eine solche Substitution eine reducirte Form mit *nicht positiven* unteren Coëfficienten in sich selbst übergeht.

Substitutionen.	Bedingungen.
$(1, 2, 3)$	keine Bedingung.
$(1, \overline{2}, \overline{5})$	$a = 2b', \ b'' = 0.$
$(\overline{1}, 2, \overline{6})$	$a' = 2b, \ b'' = 0.$
$(\overline{1}, \overline{2}, 7)$	$a = 2b' + b'', \ a' = 2b + b''.$
$(\overline{1}, \overline{3}, \overline{2})$	$a' = a'', \ b' = b''.$
$(1, 3, \overline{6})$	$a' = a'' = 2b, \ b' = b'' = 0.$

Substitutionen.	Bedingungen.
$(1, 3, \bar{7})$	$a' = a'',\ b' = b'',\ \sigma$ *), $a = 3b'$.
$(1, \bar{4}, \bar{3})$	$a = 2b'',\ b' = 0$.
$(1, 6, \bar{2})$	$a' = a'' = 2b,\ b' = b'' = 0$.
$(\bar{1}, \bar{6}, 3)$	$a' = a'' = 2b,\ b' = b'' = 0$.
$(1, \bar{7}, 2)$	$a' = a'',\ b' = b'',\ \sigma,\ a = 3b'$.
$(\bar{1}, 7, \bar{3})$	$a' = a'',\ b' = b'',\ \sigma,\ a = 3b'$.
$(\bar{2}, \bar{1}, \bar{3})$	$a = a',\ b = b'$.
$(2, \bar{1}, 5)$	$a = a' = 2b = 2b',\ b'' = 0$.
$(\bar{2}, 1, 6)$	$a = a' = 2b = 2b',\ b'' = 0$.
$(2, 1, \bar{7})$	$a = a',\ \sigma$.
$(2, 3, 1)$	$a = a' = a'',\ b = b' = b''$.
$(\bar{2}, \bar{3}, 7)$	$a = a' = a'' = 3b = 3b' = 3b''$.
$(2, \bar{4}, 3)$	$a = a' = 2b'',\ b = b' = 0$.
$(\bar{2}, 7, \bar{1})$	$a = a' = a'',\ \sigma,\ b' = b''$.
$(2, \bar{7}, 3)$	$a = a' = a'' = 3b = 3b' = 3b''$.
$(3, 1, 2)$	$a = a' = a'',\ b = b' = b''$.
$(\bar{3}, \bar{1}, 7)$	$a = a' = a'',\ \sigma,\ b' = b''$.
$(\bar{3}, \bar{2}, \bar{1})$	$a = a' = a'',\ b = b' = b''$.
$(3, 2, \bar{7})$	$a = a' = a'' = 3b = 3b' = 3b''$.
$(3, \bar{7}, 1)$	$a = a' = a'',\ \sigma$.
$(\bar{3}, 7, \bar{2})$	$a = a' = a'',\ \sigma,\ b = b'$.
$(4, \bar{1}, 3)$	$a = a' = 2b'',\ b = b' = 0$.
$(\bar{4}, 2, \bar{3})$	$a = a' = 2b'',\ b = b' = 0$.
$(7, \bar{1}, \bar{2})$	$a = a' = a'' = 3b = 3b' = 3b''$.
$(\bar{7}, 1, 3)$	$a = a' = a'' = 3b = 3b' = 3b''$.
$(\bar{7}, 2, 1)$	$a = a' = a'' = 3b = 3b' = 3b''$.
$(7, \bar{2}, \bar{3})$	$a = a' = a'',\ \sigma,\ b' = b''$.
$(7, \bar{3}, \bar{1})$	$a = a' = a'',\ \sigma,\ b = b'$.
$(\bar{7}, 3, 2)$	$a = a' = a'',\ \sigma$.

*) Der Buchstabe σ bedeutet der Kürze halber so wie in §. 6. die Bedingung $a + a' = 2(b + b' + b'')$.

Aufser den hier aufgestellten 35 Substitutionen müssen aber, was in der Tabelle I. nicht der Fall ist, noch diejenigen zugelassen werden, welche aus ihnen entspringen, indem man den sämmtlichen sechs in irgend zwei Verticalreihen des Substitutions-Systems befindlichen Coëfficienten entgegengesetztes Vorzeichen ertheilt; doch treten für diese neuen 105 Substitutionen noch folgende sehr einfache Bedingungen hinzu. Ist nämlich (p, q, r) eine der in der Tafel vorkommenden Substitutionen, so müssen für die Substitution $(\overline{p}, \overline{q}, r)$ aufser den der Substitution (p, q, r) entsprechenden in der Tafel angegebenen Bedingungen noch die beiden $b = b' = 0$, für die Substitution $(\overline{p}, q, \overline{r})$ noch die Bedingungen $b = b'' = 0$, und für die Substitution $(p, \overline{q}, \overline{r})$ noch die Bedingungen $b' = b'' = 0$ hinzugefügt werden, wobei rücksichtlich der Bezeichnung zu bemerken ist, dafs ein bereits über einer Ziffer befindliches Minuszeichen durch ein neu hinzugesetztes — wieder aufgehoben werden soll. So sind z. B., damit eine reducirte Form durch die Substitution $(\overline{3}, \overline{2}, \overline{1})$, welche in der Tafel vorkommt, in sich selbst übergehe, die Bedingungen $a = a' = a''$, $b = b' = b''$ erforderlich und hinreichend, und es ist nicht nöthig, dafs irgend einer der drei unteren Coëfficienten b, b' oder b'' verschwinde; soll aber die Substitution $(3, 2, \overline{1})$ anwendbar sein, so genügt nicht die Gleichheit der oberen und die der unteren Coëfficienten, sondern es mufs aufserdem $b = b' = 0$ also freilich auch $b'' = 0$ sein; für die Substitution $(3, \overline{2}, 1)$ mufs $b = b'' = 0$ also auch $b' = 0$, endlich für die Substitution $(\overline{3}, 2, 1)$ mufs $b' = b'' = 0$ also auch $b = 0$ sein, so dafs eine reducirte Form wie $\begin{pmatrix} a, & a, & a \\ b, & b, & b \end{pmatrix}$ in Betreff der vier Substitutionen $(\overline{3}, \overline{2}, \overline{1})$, $(3, 2, \overline{1})$, $(3, \overline{2}, 1)$, $(\overline{3}, 2, 1)$ entweder durch alle vier oder nur durch die erste derselben in sich selbst übergeht, je nachdem $b = 0$ oder von Null verschieden ist. Die Substitutionen der Tafel sind in Bezug auf ihre Vorzeichen nach einem solchen Princip ausgewählt worden, dafs die angegebenen Regeln stets gültig bleiben. So durfte in dem eben ausgeführten Beispiele von den vier einander entsprechenden und nur durch die Vorzeichen verschiedenen Substitutionen mit der Determinante $+1$ nur die Substitution $(\overline{3}, \overline{2}, \overline{1})$ in die Tafel aufgenommen werden, weil sie die einzige ist, welche auf Formen wie $\begin{pmatrix} a, & a, & a \\ b, & b, & b \end{pmatrix}$ *unter allen Umständen* anwendbar bleibt. In gewissen Fällen war die Wahl zwischen zweien der vier zusammengehörigen Substitutionen gleichgültig, nämlich dann, wenn die hinzutreten-

den Bedingungen $b = b' = 0$ oder $b = b'' = 0$ oder $b' = b'' = 0$ schon von selbst unter den Bedingungen der Tafel enthalten sind, wie z. B. bei den Substitutionen $(1, 6, \bar{2})$, $(\bar{1}, \bar{6}, 3)$, $(2, \bar{4}, 3)$ u. s. w., welche durch resp. $(1, \bar{6}, 2)$, $(\bar{1}, 6, \bar{3})$, $(\bar{2}, 4, 3)$ u. s. w. in der Tafel hätten ersetzt werden können. — Dafs, aufser den theils in der Tafel befindlichen, theils durch die angegebene Zeichen-Änderung aus ihnen hervorgehenden 140 Substitutionen mit der Determinante $+1$, fernere 140 Substitutionen mit der Determinante -1 als sich von selbst verstehend auch hier gänzlich ausgeschlossen werden, wird gewifs Billigung finden.

Aus der vorhergehenden Tafel erhält man durch umgekehrte Anordnung, nämlich durch Zusammenfassen derjenigen Substitutionen, welchen derselbe Complex von Bedingungen entspricht, die folgende:

II *b*. Tafel zur Aufstellung aller Transformationen, durch welche eine reducirte Form mit *nicht positiven* unteren Coëfficieuten in sich selbst übergeht.

Bedingungen.	Substitutionen.
Keine Bedingung.	$(1, 2, 3)$.
$a = 2b'$, $b'' = 0$:	$(1, \bar{2}, \bar{5})$.
$a = 2b''$, $b' = 0$:	$(1, \bar{4}, \bar{3})$.
$a' = 2b$, $b'' = 0$:	$(\bar{1}, 2, \bar{6})$.
$a = 2b' + b''$, $a' = 2b + b''$:	$(\bar{1}, \bar{2}, 7)$.
$a = a'$, $b = b'$:	$(\bar{2}, \bar{1}, \bar{3})$.
$a' = a''$, $b' = b''$:	$(\bar{1}, \bar{3}, \bar{2})$.
$a = a'$, σ (d. h. $a + a' = 2(b + b' + b'')$):	$(2, 1, \bar{7})$.
$a = a' = 2b = 2b'$, $b'' = 0$:	$(2, \bar{1}, 5)$, $(\bar{2}, 1, 6)$.
$a = a' = 2b''$, $b = b' = 0$:	$(2, \bar{4}, 3)$, $(4, \bar{1}, 3)$, $(\bar{4}, 2, \bar{3})$.
$a' = a'' = 2b$, $b' = b'' = 0$:	$(1, 3, \bar{6})$, $(1, 6, \bar{2})$, $(\bar{1}, \bar{6}, 3)$.
$a' = a''$, $b' = b''$, σ, $a = 3b'$:	$(1, 3, \bar{7})$, $(1, \bar{7}, 2)$, $(\bar{1}, 7, \bar{3})$.
$a = a' = a''$, $b = b' = b''$:	$(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$, $(\bar{3}, \bar{2}, \bar{1})$.
$a = a' = a''$, σ:	$(3, \bar{7}, 1)$, $(\bar{7}, 3, 2)$.
$a = a' = a''$, σ, $b = b'$:	$(\bar{3}, 7, \bar{2})$, $(7, \bar{3}, \bar{1})$.
$a = a' = a''$, σ, $b' = b''$:	$(\bar{2}, 7, \bar{1})$, $(\bar{3}, \bar{1}, 7)$, $(7, \bar{2}, \bar{3})$.
$a = a' = a'' = 3b = 3b' = 3b''$:	$(\bar{2}, \bar{3}, 7)$, $(2, \bar{7}, 3)$, $(3, 2, \bar{7})$, $(7, \bar{1}, \bar{2})$, $(\bar{7}, 1, 3)$, $(\bar{7}, 2, 1)$.

Für den Fall, dafs zwei der unteren Coëfficienten der Form verschwinden, verdoppelt sich die Zahl der aus dieser Tafel hervorgehenden Transformationen; jeder aus der Tafel erhaltenen Substitution mufs dann eine zweite entsprechende hinzugefügt werden, welche aus ihr dadurch abgeleitet wird, dafs man, wenn $b = b' = 0$ ist, die sechs Coëfficienten der ersten und zweiten Verticalreihe, wenn $b = b'' = 0$ ist, die sechs Coëfficienten der 1ten und 3ten Verticalreihe, wenn $b' = b'' = 0$ ist, die sechs Coëfficienten der 2ten und 3ten Verticalreihe des Substitutionssystems mit entgegengesetzten Vorzeichen annimmt, wobei es ganz gleichgültig ist, ob jene Bedingungen ($b = b' = 0$ u. s. w.) schon unter denen der Tafel begriffen sind, oder nicht. Für den Fall, dafs alle drei unteren Coëfficienten verschwinden, also $b = b' = b'' = 0$ ist, liefert die Tafel nur den vierten Theil der Substitutionen, und die übrigen werden erhalten, indem man nach und nach und immer gleichzeitig sowohl in der 1ten und 2ten, als in der 1ten und 3ten, als auch endlich in der 2ten und 3ten Verticalreihe der Substitutions-Systeme die angegebene Zeichenänderung vornimmt. — Zwei Beispiele werden nicht überflüssig sein, um den Gebrauch der Tafeln zu erläutern. Um alle Substitutionen der Form $\begin{pmatrix} 3, & 3, & 4 \\ -1, & -1, & -1 \end{pmatrix}$ in sich selbst zu finden, mufs man die für sie stattfindenden Relationen (Bedingungen) zwischen den Coëfficienten: $a = a'$, $b = b'$, $b' = b''$, $a + a' = 2(b + b' + b'')$ (σ), zum Gebrauch der Tafel in folgende Gruppen zerlegen:

ohne Rücksicht auf die Bedingungen erhält man die Substitution (1, 2, 3),
die Gruppe $a = 2b' + b''$, $a' = 2b + b''$ liefert - - - $(\overline{1}, \overline{2}, 7)$,
die Gruppe $a = a'$, $b = b'$ liefert . . . . . - - - $(\overline{2}, \overline{1}, \overline{3})$,
die Gruppe $a = a'$, σ liefert . . . . - . - - $(2, 1, \overline{7})$,

also geht die vorgelegte Form durch jede der vier Substitutionen

$$\begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1, & 0, & 1 \\ 0, & -1, & 1 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0, & -1, & 0 \\ -1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0, & 1, & -1 \\ 1, & 0, & -1 \\ 0, & 0, & -1 \end{pmatrix}$$

mit der Determinante $+1$ und nur durch diese in sich selbst über, insofern es überflüssig erscheint, die vier Substitutionen mit der Determinante -1, welche aus jenen durch Zeichenänderung sämmtlicher *neun* Substitutions-Coëfficienten hervorgeben, noch besonders vorzuführen. Für die Form $\begin{pmatrix} 1, & 4, & 5 \\ -2, & 0, & 0 \end{pmatrix}$ ergiebt sich, aufser der evidenten Substitution (1, 2, 3), aus der Gruppe von

Bedingungen $a' = 2b$, $b'' = 0$ noch die Substitution $(\bar{1}, 2, \bar{6})$; da aber $b' = b'' = 0$ ist, so müssen diesen beiden aus der Tafel erhaltenen die beiden folgenden $(1, \bar{2}, \bar{3})$, $(\bar{1}, \bar{2}, 6)$ hinzugefügt werden, so dafs die Form $\begin{pmatrix} 1, & 4, & 5 \\ -2, & 0, & 0 \end{pmatrix}$ und jede Form wie $\begin{pmatrix} 1, & 4, & a'' \\ -2, & 0, & 0 \end{pmatrix}$, in der $a'' > 4$ ist, durch jede der vier Substitutionen mit der Determinante $+1$:

$$\begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & -1 \\ 0, & 0, & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & -1, & 0 \\ 0, & 0, & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1, & 0, & 0 \\ 0, & -1, & 1 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$$

und *nur* durch diese in sich selbst transformirt werden kann.

C. Versuch einer Tabelle der nicht äquivalenten unbestimmten (indifferenten) ternären quadratischen Formen für die Determinanten ohne quadratischen Theiler unter 20.

Determinante.	Indifferente ternäre quadratische Formen.
1	$\begin{pmatrix} 0, & 0, & 1 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$.
2	$\begin{pmatrix} 0, & 1, & 2 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$,
	$\begin{pmatrix} 0, & 0, & 2 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$ *).
3	$\begin{pmatrix} 0, & 0, & 3 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1, & 1, & -3 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$.
5	$\begin{pmatrix} 0, & 0, & 5 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1, & 2, & -2 \\ 1, & 0, & 0 \end{pmatrix}$.
6	$\begin{pmatrix} 0, & 1, & 6 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1, & 1, & -6 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$,
	$\begin{pmatrix} 0, & 0, & 6 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$.
7	$\begin{pmatrix} 0, & 0, & 7 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1, & 1, & -7 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$.
10	$\begin{pmatrix} 0, & 1, & 10 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1, & 2, & -5 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$,
	$\begin{pmatrix} 0, & 0, & 10 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$

*) Die in zweiter Zeile stehenden Formen für die *geraden* Determinanten sind die *uneigentlich* primitiven.

Determinante.	Indifferente ternäre quadratische Formen.
11	$\begin{pmatrix}0, & 0, & 11\\ 0, & 0, & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1, & 1, & -11\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$.
13	$\begin{pmatrix}0, & 0, & 13\\ 0, & 0, & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1, & 2, & -6\\ 1, & 0, & 0\end{pmatrix}$.
14	$\begin{pmatrix}0, & 1, & 14\\ 0, & 0, & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1, & 1, & -14\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0, & 0, & 14\\ 0, & 0, & 1\end{pmatrix}$.
15	$\begin{pmatrix}0, & 0, & 15\\ 0, & 0, & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1, & 1, & -15\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1, & -3, & 5\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1, & 3, & -5\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$.
17	$\begin{pmatrix}0, & 0, & 17\\ 0, & 0, & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1, & 3, & 6\\ 1, & 0, & 0\end{pmatrix}$.
19	$\begin{pmatrix}0, & 0, & 19\\ 0, & 0, & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1, & 1, & -19\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$.

Bei der Construction dieser kleinen Tabelle, welche noch während des Druckes vorliegender Abhandlung hinzugefügt worden ist, bestand die eigentliche Arbeit in dem strengen Nachweise, dafs die hier aufgestellten Formen wirklich erschöpfend sind, d. h. dafs jede andere unbestimmte Form mit derselben Determinante in eine von ihnen transformirt werden kann; denn dafs sie selbst alle untereinander nicht-äquivalent sind, geht unmittelbar daraus hervor, dafs sie sämmtlich in verschiedene *Genera* (vergl. im 35ten Bande dieses Journals S. 125 ff.) gehören. Indem ich mir die Auseinandersetzung der hierbei angewandten eigenthümlichen Vortheile vorbehalte, bemerke ich nur, dafs obige Formen als Repräsentanten der sie enthaltenden Classen immer so ausgewählt sind, dafs ihr erster Coëfficient mit der absolut kleinsten durch die Form darstellbare Zahl zusammenfällt. Was namentlich diejenigen Formen betrifft, durch welche *Null* darstellbar ist und deren Repräsentanten oben in der Tabelle die erste Stelle einnehmen, so zeigt man durch eine einfache Reduction (vergl. *Gauss* Disq. arithm. S. 317 der französischen Übersetzung), dafs jede solche Form in eine äquivalente von folgender Art

$$\begin{pmatrix}0, & a', & a''\\ b, & 0, & b''\end{pmatrix}$$

transformirt werden kann, in welcher der erste und fünfte Coëfficient $= 0$ sind *),

*) Es kann dies als ein specieller Fall eines von *Jacobi* neuerdings aufgestellten Satzes angesehen werden, dafs man nämlich jede quadratische Form mit beliebig vielen Variabeln in eine äquivalente transformiren kann, in welcher alle Glieder fehlen, bis auf die Quadrate und die Producte je zweier unmittelbar auf einander folgenden Variabeln.

so dafs die Determinante Δ einfach $= a'' b''^2$ wird, während überdies a' und b noch besonderen Grenzbedingungen in Bezug auf a'' und b'' unterworfen werden können. Enthält die Determinante Δ keine quadratischen Theiler, so mufs $b'' = 1$, $a'' = \Delta$ sein, und alle jene Formen reduciren sich dann für ein ungerades Δ auf die einzige $\begin{pmatrix} 0, & 0, & \Delta \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$, und für ein gerades Δ auf die beiden $\begin{pmatrix} 0, & 1, & \Delta \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0, & 0, & \Delta \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$. Bezeichnet man durch F die zugeordnete dieser Formen, so stellt F die Zahl $+1$ dar, es ist daher F quadratischer Rest zu allen in Δ aufgehenden Primfactoren. Andrerseits folgt leicht aus dem von *Legendre* aufgestellten Satze über die Lösbarkeit der unbestimmten Gleichung

$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 = 0,$$

und aus der Entwicklung, welche *Gaufs* diesem Satze gegeben hat, dafs umgekehrt *Null* durch jede ternäre Form f darstellbar ist, deren Determinante keinen quadratischen Theiler enthält, und für welche $FR\Delta$, also F zu sämmtlichen Primfactoren von Δ quadratischer Rest ist. Diese Bemerkung in Verbindung mit dem vorhergehenden Resultate, dafs für einen ungeraden Werth von Δ ohne quadratischen Theiler alle Formen, durch welche Null darstellbar ist, auf die einzige $\begin{pmatrix} 0, & 0, & \Delta \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$ reducirt werden können, führte zu dem merkwürdigen Satze,

„*dafs für jede ungerade Determinante Δ ohne quadratischen Theiler dasjenige Genus unbestimmter ternärer quadratischer Formen, welchem die sämmtlichen in $FR\Delta$ enthaltenen zugeordneten Charactere entsprechen, immer überhaupt nur eine einzige Classe von Formen enthält, welche durch die Form $\begin{pmatrix} 0, & 0, & \Delta \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$ oder auch durch die ihr äquivalente Form $\begin{pmatrix} 1, & -1, & \Delta \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix} = x^2 - y^2 + \Delta z^2$ repräsentirt wird* *).

*) Für ein gerades Δ ohne quadratischen Theiler existiren zwei solcher *genera*, ein eigentlich primitives und ein uneigentlich primitives, welche ebenfalls jedes immer nur eine einzige Classe enthalten, ersteres die Classe der Form $\begin{pmatrix} 0, & 1, & \Delta \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$, letzteres die Classe der Form $\begin{pmatrix} 0, & 0, & \Delta \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$.

Aus diesem (streng bewiesenen) Satze ergab sich die am Schlusse der ersten Abtheilung ausgesprochene Vermuthung, welche wenigstens durch die obigen allerdings nicht sehr zahlreichen Beispiele keine Widerlegung findet, dafs auch die übrigen *Genera* für eine solche Determinante nur *eine* Classe von Formen enthalten, also die Zahl der Classen mit der Zahl der *Genera* $= 2^{\mu}$ übereinstimmen möchte. Ist z. B. die Determinante eine ungerade Primzahl $\Delta = p$, so existiren überhaupt nur 2 *Genera* mit den zugeordneten Characteren FRp und FNp, und für das erstere FRp ist durch das Vorhergehende bereits bewiesen, dafs es nur *eine* Classe enthält; dasselbe wäre also nur noch für das zweite *Genus* nachzuweisen; ist $p \equiv 3 \pmod{4}$, so enthält dieses zweite *Genus* jedenfalls die Form $f = \begin{pmatrix} 1, 1, -p \\ 0, 0, \quad 0 \end{pmatrix}$ mit der zugeordneten $F = \begin{pmatrix} p, p, -1 \\ 0, 0, \quad 0 \end{pmatrix}$, so dafs für eine solche Primzahl nur die Frage bleibt, ob wirklich jede Form, für welche FNp oder $-FRp$, jener $x^2 + y^2 - pz^2$ äquivalent ist. Die genauere Ergründung des hier angeregten schwierigen Problems mufs jedoch ferneren Untersuchungen vorbehalten bleiben.

16.

Transformation einer beliebigen gegebenen homogenen Function 4ten Grades von zwei Variabeln durch lineäre Substitutionen neuer Variabeln in die Form, welche nur die geraden Potenzen der neuen Variabeln enthält.

(Von Herrn *Otto Hesse*, Professor an der Universität zu Königsberg.)

Es giebt nur zwei homogene ganze Functionen, deren Determinanten respective von demselben Grade sind, wie die Functionen selbst. Ich verstehe unter *Determinante* einer Function die aus den zweiten partiellen Differentialquotienten zusammengesetzte Determinante. Die Transformation der einen, nämlich der homogenen ganzen Function dritten Grades von drei Variabeln, durch lineäre Substitutionen, habe ich in diesem Journal Bd. 28. S. 68 auseinandergesetzt. Die Transformation der andern, der homogenen ganzen Function 4ten Grades von zwei Variabeln, welche eine in die Augen fallende Analogie mit der ersteren darbietet und gleich wie jene eine einfache geometrische Interpretation gestattet, werde ich im Folgenden behandeln. An diese Aufgabe wird sich die Auflösung der allgemeinen biquadratischen Gleichungen anschliefsen; nebst der Untersuchung einer irreductibeln Gleichung vom 6ten Grade, welche vermöge gewisser Eigenschaften der Wurzeln sich algebraisch auflösen läfst.

§. 1.

Wenn man durch u eine beliebige gegebene homogene Function 4ten Grades der beiden Variabeln x_1, x_2, durch u_1, u_2 die ersten und durch u_{11}, $u_{12} = u_{21}$, u_{22} die zweiten partiellen Differentialquotienten, nach den Variabeln genommen, bezeichnet, so hat man:

$$(1.)\quad \begin{cases} x_1 u_{11} + x_2 u_{12} = 3u_1, \\ x_1 u_{21} + x_2 u_{22} = 3u_2. \end{cases}$$

Betrachtet man in diesen Gleichungen diejenigen Gröfsen x_1, x_2, welche in den Theilen derselben links explicite vorkommen, als die Unbekannten und

löset sie in Rücksicht auf diese Unbekannten linearen Gleichungen auf, so erhält man, wenn man für den Ausdruck $u_{11}u_{22}-u_{12}^2$ (der in dem Folgenden den Namen der *Determinante* der Function u führen soll) der Kürze wegen v setzt:

$$(2.)\quad \begin{cases} x_1 v = +3u_1 u_{22} - 3u_2 u_{12}, \\ x_2 v = -3u_1 u_{12} + 3u_2 u_{11}. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen gehen nun durch Differentiation nach den Variabeln folgende Gleichungen hervor:

$$(3.)\quad \begin{cases} x_1 v_1 - 2v = 3u_1 u_{221} - 3u_2 u_{112}, \\ x_1 v_2 = 3u_1 u_{222} - 3u_2 u_{122}, \\ x_2 v_1 = -3u_1 u_{112} + 3u_2 u_{111}, \\ x_2 v_2 - 2v = -3u_1 u_{122} + 3u_2 u_{112}, \end{cases}$$

in welchen der Kürze wegen v_1 v_2 für die ersten partiellen Differentialquotienten der Function v und u_{111}, u_{112}, u_{122}, u_{222} für die dritten Differentialquotienten der Function u gesetzt ist.

Es sei ferner die gegebene Function:

$$(4.)\quad u = a_{40}x_1^4 + 4a_{31}x_1^3 x_2 + 6a_{22}x_1^2 x_2^2 + 4a_{13}x_1 x_2^3 + a_{04}x_2^4,$$

und die aus den zweiten Differentialquotienten gebildete Determinante dieser Function:

$$(5.)\quad v = b_{40}x_1^4 + 4b_{31}x_1^3 x_2 + 6b_{22}x_1^2 x_2^2 + 4b_{13}x_1 x_2^3 + b_{04}x_2^4.$$

Alsdann hat man:

$$(6.)\quad \begin{cases} \tfrac{1}{4}u_1 = a_{40}x_1^3 + 3a_{31}x_1^2 x_2 + 3a_{22}x_1 x_2^2 + a_{13}x_2^3, \\ \tfrac{1}{4}u_2 = a_{31}x_1^3 + 3a_{22}x_1^2 x_2 + 3a_{13}x_1 x_2^2 + a_{04}x_2^3, \\ \tfrac{1}{4}v_1 = b_{40}x_1^3 + 3b_{31}x_1^2 x_2 + 3b_{22}x_1 x_2^2 + b_{13}x_2^3, \\ \tfrac{1}{4}v_2 = b_{31}x_1^3 + 3b_{22}x_1^2 x_2 + 3b_{13}x_1 x_2^2 + b_{04}x_2^3. \end{cases}$$

Betrachtet man in diesen vier Gleichungen die vier Gröfsen x_1^3, $x_1^2 x_2$, $x_1 x_2^2$, x_2^3 rechts als die Unbekannten und löset die in Rücksicht auf sie Unbekannten linearen Gleichungen auf, so erhält man Gleichungen von der Form:

$$(7.)\quad \begin{cases} 4Rx_1^3 = \pi_{40}u_1 + \pi_{31}u_2 + p_{40}v_1 + p_{31}v_2, \\ 4Rx_1^2 x_2 = \pi_{31}u_1 + \pi_{22}u_2 + p_{31}v_1 + p_{22}v_2, \\ 4Rx_1 x_2^2 = \pi_{22}u_1 + \pi_{13}u_2 + p_{22}v_1 + p_{13}v_2, \\ 4Rx_2^3 = \pi_{13}u_1 + \pi_{04}u_2 + p_{13}v_1 + p_{04}v_2; \end{cases}$$

welche Gleichungen aus eben so vielen verschiedenen Gröfsen p und π zusammengesetzt sind, als die aufzulösenden Gleichungen verschiedene Coëfficienten a und b enthalten. Der gemeinsame Nenner R der Unbekannten ist, da

die Gröfsen b vom zweiten Grade sind, vom 6ten Grade, und homogen in Rücksicht auf die Gröfsen a. Die Gröfsen π und p sind ebenfalls homogen und von den Graden 5 und 4.

Zum Beweise jener Behauptung dienen die Gleichungen (3.), welche ich vorausgeschickt habe. Denn multiplicirt man die erste Gleichung (7.) mit x_2, die zweite mit x_1 und setzt die Werthe von $x_1 v_1$, $x_1 v_2$, $x_2 v_1$, $x_2 v_2$ aus (3.), so erhält man

$$\begin{aligned} 4Rx_1^3 x_2 &= u_1\{\pi_{40} x_2 - p_{40} 3u_{112} - p_{31} 3u_{122}\} \\ &\quad + u_2\{\pi_{31} x_2 + p_{40} 3u_{111} + p_{31} 3u_{112}\} + p_{31} 2v, \\ 4Rx_1^3 x_2 &= u_1\{\pi_{31} x_1 + p_{31} 3u_{221} + p_{22} 3u_{222}\} \\ &\quad + u_2\{\pi_{22} x_1 - p_{31} 3u_{112} - p_{22} 3u_{122}\} + p_{31} 2v; \end{aligned}$$

welche beide Gleichungen die Form

$$4Rx_1^3 x_2 = u_1 A_1 + u_2 A_2 + A.2v$$

haben, wo A_1 und A_2 homogene Functionen von x_1 und x_2 ersten Grades sind und A eine Constante ist. Betrachtet man aber in dieser identischen Gleichung die vier Coëfficienten der Variabeln in A_1 und A_2 und die Constante A als fünf Unbekannte, so erhält man, durch Gleichsetzung der Coëfficienten gleicher Potenzen und Producte der Variabeln auf beiden Seiten der Gleichung fünf, in Beziehung auf die Unbekannten lineäre Gleichungen, aus welchen sich für die Unbekannte A nur ein einziger Werth ergiebt. Dieser Coëfficient A von $2v$ ist also in den beiden vorhergehenden Gleichungen einer und derselbe; also ist auch die Gröfse p_{31} in den beiden ersten Gleichungen (7.) eine und dieselbe. Auf eben die Art läfst sich beweisen, dafs auch die Gröfsen p_{22} in der zweiten und dritten Gleichung denselben Werth haben, etc.

Um zu beweisen, dafs auch π_{31} in den beiden ersten Gleichungen (7.) eine und dieselbe Gröfse ist, setze ich in den Gleichungen (3.) statt $2v$ seinen Werth $= \frac{1}{2}(x_1 v_1 + x_2 v_2)$ und statt u_{111}, u_{112}, u_{122}, u_{222} ihre Werthe als lineäre Functionen von x_1, x_2. Wenn man zu diesen Gleichungen, welche, da die erste und letzte Gleichung nicht verschieden sind, nur die Stelle von drei Gleichungen vertreten, noch die Gleichung $4u = x_1 u_1 + x_2 u_2$ hinzufügt, so hat man vier Gleichungen, deren Theile rechts die vier Gröfsen $x_1 u_1$, $x_1 u_2$, $x_2 u_1$, $x_2 u_2$ und die Theile links die fünf Gröfsen $x_1 v_1$, $x_1 v_2$, $x_2 v_1$, $x_2 v_2$ und u auf lineäre Weise enthalten. Es lassen sich also die vier ersten Gröfsen lineär durch die fünf letzten Gröfsen ausdrücken. Setzt man nun diese Ausdrücke für $x_1 u_1$, $x_1 u_2$, $x_2 u_1$, $x_2 u_2$ in die erste mit x_2 multiplicirte Gleichung (7.) und gleich-

zeitig in die zweite mit x_1 multiplicirte Gleichung (7.), so nehmen beide Gleichungen die Form

$$4Rx_1^3x_2 = v_1B_1 + v_2B_2 + B.4u$$

an; wo B_1 und B_2 lineäre homogene Functionen von x_1 und x_2 und B eine Constante bedeuten. Bestimmt man die vier Coëfficienten in B_1 und B_2 und die Constante B, indem man die Coëfficienten gleicher Potenzen und Producte der Variabeln auf beiden Seiten der letzten identischen Gleichung einander gleich setzt, so wird sich, weil die aufzulösenden Gleichungen lineär sind, nur ein einziger Werth von B ergeben. Da aber eben sowohl in der ersten, als in der zweiten behandelten Gleichung (7.), um sie auf die genannte gemeinschaftliche Form zurückzuführen, B für π_{31} zu setzen war, so wird auch diese Gröfse π_{31} in den beiden ersten Gleichungen (7.) denselben Werth haben. Eben so läfst sich beweisen, dafs π_{22} in der zweiten und dritten Gleichung denselben Werth haben etc.

Wenn man die Werthe von x_1^3, $x_1^2x_2$, $x_1x_2^2$, x_2^3 aus den Gleichungen (7.) in die Theile rechts der Gleichungen (6.) setzt, so erhält man durch Gleichstellung der Coëfficienten der Gröfsen u_1, u_2, v_1 und v_2 auf beiden Seiten der Gleichungen (6.) folgende Systeme von Gleichungen:

$$(8.)\quad \begin{cases} R = a_{40}\pi_{40} + 3a_{31}\pi_{31} + 3a_{22}\pi_{22} + a_{13}\pi_{13}, \\ 0 = a_{40}\pi_{31} + 3a_{31}\pi_{22} + 3a_{22}\pi_{13} + a_{13}\pi_{04}, \\ 0 = a_{31}\pi_{40} + 3a_{22}\pi_{31} + 3a_{13}\pi_{22} + a_{04}\pi_{13}, \\ R = a_{31}\pi_{31} + 3a_{22}\pi_{22} + 3a_{13}\pi_{13} + a_{04}\pi_{04}, \end{cases}$$

$$(9.)\quad \begin{cases} 0 = b_{40}\pi_{40} + 3b_{31}\pi_{31} + 3b_{22}\pi_{22} + b_{13}\pi_{13}, \\ 0 = b_{40}\pi_{31} + 3b_{31}\pi_{22} + 3b_{22}\pi_{13} + b_{13}\pi_{04}, \\ 0 = b_{31}\pi_{40} + 3b_{22}\pi_{31} + 3b_{13}\pi_{22} + b_{04}\pi_{13}, \\ 0 = b_{31}\pi_{31} + 3b_{22}\pi_{22} + 3b_{13}\pi_{13} + b_{04}\pi_{04}, \end{cases}$$

$$(10.)\quad \begin{cases} 0 = a_{40}p_{40} + 3a_{31}p_{31} + 3a_{22}p_{22} + a_{13}p_{13}, \\ 0 = a_{40}p_{31} + 3a_{31}p_{22} + 3a_{22}p_{13} + a_{13}p_{04}, \\ 0 = a_{31}p_{40} + 3a_{22}p_{31} + 3a_{13}p_{22} + a_{04}p_{13}, \\ 0 = a_{31}p_{31} + 3a_{22}p_{22} + 3a_{13}p_{13} + a_{04}p_{04}, \end{cases}$$

$$(11.)\quad \begin{cases} R = b_{40}p_{40} + 3b_{31}p_{31} + 3b_{22}p_{22} + b_{13}p_{13}, \\ 0 = b_{40}p_{40} + 3b_{31}p_{31} + 3b_{22}p_{22} + b_{13}p_{13}, \\ 0 = b_{31}p_{31} + 3b_{22}p_{22} + 3b_{13}p_{13} + b_{04}p_{04}, \\ R = b_{31}p_{31} + 3b_{22}p_{22} + 3b_{13}p_{13} + b_{04}p_{04}. \end{cases}$$

Diese vier Systeme von Gleichungen lassen sich, als Sätze, wie folgt aussprechen:

(8.) *Die Ausdrücke x_2u_1 und x_1x_2 verschwinden, wenn man in ihnen $\pi_{\varkappa\lambda}$ für die Producte $x_1^\varkappa x_2^\lambda$ setzt, während die Ausdrücke x_1u_1 und x_2u_2 den Werth 4R annehmen.*

(9.) *Die Ausdrücke x_1v_1, x_1v_2, x_2v_1, x_2v_2 verschwinden sämmtlich, wenn man $\pi_{\varkappa\lambda}$ für $x_1^\varkappa x_2^\lambda$ setzt.*

(10.) *Die Ausdrücke x_1u_1, x_1u_2, x_2u_1, x_2u_2 verschwinden sämmtlich, wenn man $p_{\varkappa\lambda}$ für $x_1^\varkappa x_2^\lambda$ setzt.*

(11.) *Die Ausdrücke x_2v_1 und x_1v_2 verschwinden, wenn man in ihnen $p_{\varkappa\lambda}$ für die Producte $x_1^\varkappa x_2^\lambda$ setzt, während die Ausdrücke x_1v_1 und x_2v_2 den Werth 4R annehmen.*

Man setze nun statt der Gröfsen a die entsprechenden Gröfsen b. Durch diese Änderung mögen die Gröfsen p, welche allein von den Gröfsen a abhangen, in die entsprechenden Gröfsen q übergehen, so dafs die Gleichungen (10.) in

$$(12.)\quad \begin{cases} 0 = b_{40}q_{40}+3b_{31}q_{31}+3b_{22}q_{22}+b_{13}q_{13}, \\ 0 = b_{40}q_{31}+3b_{31}q_{22}+3b_{22}q_{13}+b_{13}q_{04}, \\ 0 = b_{31}q_{40}+3b_{22}q_{31}+3b_{13}q_{22}+b_{04}q_{13}, \\ 0 = b_{31}q_{31}+3b_{22}q_{22}+3b_{13}q_{13}+b_{04}q_{04} \end{cases}$$

sich verwandeln. Aus der Vergleichung dieses Systemes von Gleichungen mit dem Systeme (9.) ergiebt sich, dafs die Gröfsen q den entsprechenden Gröfsen π proportional sind. Es folgt daher:

$$q_{\varkappa,4-\varkappa} = \mu\pi_{\varkappa,4-\varkappa}.$$

Und wenn man diese Werthe der Gröfsen π in die Gleichungen (8.) setzt, so gehen dieselben in

$$(13.)\quad \begin{cases} \mu R = a_{40}q_{40}+3a_{31}q_{31}+3a_{22}q_{22}+a_{13}q_{13}, \\ 0 = a_{40}q_{31}+3a_{31}q_{22}+3a_{22}q_{13}+a_{13}q_{04}, \\ 0 = a_{31}q_{40}+3a_{22}q_{31}+3a_{13}q_{22}+a_{04}q_{13}, \\ \mu R = a_{31}q_{31}+3a_{22}q_{22}+3a_{13}q_{13}+a_{04}q_{04} \end{cases}$$

über. Diese beiden Systeme enthalten folgende Sätze:

(12.) *Die Ausdrücke x_1v_1, x_1v_2, x_2v_1, x_2v_2 verschwinden sämmtlich, wenn man $q_{\varkappa\lambda}$ für die Producte $x_1^\varkappa x_2^\lambda$ setzt.*

(13.) *Die Ausdrücke x_2u_1, x_1u_2 verschwinden, wenn man in ihnen $q_{\varkappa\lambda}$ für die Producte $x_1^\varkappa x_2^\lambda$ setzt, während die Ausdrücke x_1u_1, x_2u_2 die Werthe $4\mu R$ annehmen.*

Da die Gröfsen p in Rücksicht auf die Gröfsen a vom vierten Grade sind, so werden die Gröfsen q vom achten und die Gröfse μ wird vom dritten Grade sein.

Man kann die Gröfsen p, π, R, so wie die Gröfsen q und μ, dem Vorhergehenden zufolge, als Functionen von a bestimmt betrachten. Die erstern stellen sich nämlich, wenn man die gegebenen Gleichungen (6.) auflöset, als die Coëfficienten in den aufgelöseten Gleichungen (7.) dar; die Gröfsen q entstehen aus den entsprechenden Gröfsen p, wenn man in den letzteren die Gröfsen a in die entsprechenden Gröfsen b verändert, und die Gröfse μ stellt sich als der gemeinsame Quotient bei der Division der Gröfsen q durch die entsprechenden Gröfsen π dar. Wenn nun diese Gröfsen auf die angegebne Art als bestimmt betrachtet werden, so kann man umgekehrt die Aufgabe stellen: die Form der Gröfsen a zu bestimmen, welche allein den Gleichungen (13.) genügen. Mit Rücksicht auf die Gleichungen (12.) wird man finden, dafs dieselben von der Form

$$a_{\varkappa,4-\varkappa}+Nb_{\varkappa,4-\varkappa}$$

sind, oder, wenn in den Gleichungen (13.) μR eine beliebige Gröfse bedeutet, so werden die Werthe der Gröfsen a von der Form

$$Ma_{\varkappa,4-\varkappa}+Nb_{\varkappa,4-\varkappa}$$

sein. Hierauf beruht folgender Satz:

(14.) ***Jede homogene Function u vom 4ten Grade, deren Coëfficienten a den Gleichungen (13.) genügen, in welchen μR einen beliebigen Werth hat, die Gröfsen q aber die im Vorhergehenden bestimmten Werthe haben, ist von der Form:***

$$Mu+Nv.$$

Woraus wiederum folgt:

(15.) ***Die Determinante w der Function v, das heifst die Determinante der Determinante der Function u ist von der Form:***

$$w = mu+nv.$$

Denn setzt man in den Gleichungen (3.) für die Gröfsen a die entsprechenden Gröfsen b, wodurch die Gröfsen b in die Gröfsen c übergehen mögen und die Functionen u in v und v in w sich verändern, so verschwinden die Theile rechts, der auf diese Weise veränderten Gleichungen, wenn man $q_{\varkappa\lambda}$ für die Producte $x_1^{\varkappa}x_2^{\lambda}$ setzt, nach (12.), und die Gleichungen selbst nehmen die Gestalt der Gleichungen (13.) an; mit dem Unterschiede, dafs die Gröfsen c

die Stelle der Gröfsen a vertreten. Es verschwinden also die Ausdrücke $x_2 w_1$ und $x_1 w_2$, wenn man $q_{x,\lambda}$ für die Producte $x_1^x x_2^\lambda$ setzt, während die Ausdrücke $x_1 w_1$, $x_2 w_2$ einen und denselben Werth annehmen.

Die Gröfse R war im Vorhergehenden als die Determinante folgender Componenten bestimmt:

$$\begin{matrix} a_{40} & 3a_{31} & 3a_{22} & a_{13}, \\ a_{31} & 3a_{22} & 3a_{13} & a_{04}, \\ b_{40} & 3b_{31} & 3b_{22} & b_{13}, \\ b_{31} & 3b_{22} & 3b_{13} & b_{04}. \end{matrix}$$

Durch die Änderung der Gröfsen a in die entsprechenden Gröfsen b, wodurch die Gröfsen $b_{x\lambda}$ nach (15.) in die entsprechenden Gröfsen $ma_{x\lambda}+nb_{x\lambda}$ übergehen, möge R in S übergehen. Macht man aber die erwähnte Änderung der Componenten der Determinante R und bildet hierauf die Determinante, so zeigt sich leicht, dafs

$$(16.)\quad S = m^2 R$$

ist. Ändert man auch die erste Gleichung (11.) auf die genannte Weise, so geht dieselbe in

$$S = m(a_{40}q_{40}+3a_{31}q_{31}+3a_{22}q_{22}+a_{13}q_{13})$$

über. Vergleicht man diese Gleichung mit der ersten des Systems (13.), so ergiebt sich, mit Rücksicht auf (16.):

$$(17.)\quad \mu = m.$$

Wenn man in den Gleichungen (8.) und (9.), durch welche die Gröfsen π bestimmt sind, die Gröfsen a in die entsprechenden Gröfsen b übergehen läfst, wodurch die Gröfsen b in die Gröfsen $ma+nb$ und R in m^2R übergehen, so werden die Gleichungen erfüllt, wenn man für die Gröfsen π die entsprechenden Gröfsen m^2p-nq setzt. Daraus folgt:

(18.) *Dafs durch die Änderung der Gröfsen a in die entsprechenden Gröfsen b, die Gröfsen b in die entsprechenden Gröfsen $ma+nb$, die Gröfsen π in die entsprechenden Gröfsen m^2p-nq, die Gröfsen p in die entsprechenden Gröfsen $m\pi$, ferner R in m^2R, u in v und v in $w = mu+nv$ übergehen.*

Wenn man eine Function U aus der beliebig gegebenen Function u vierten Grades und ihrer Determinante v in der Art zusammensetzt, dafs

$$(19.)\quad U = d.u+\delta.v$$

ist, wo d und δ beliebige Constanten bedeuten, so hat die Determinante V

dieser Function die merkwürdige Eigenschaft, dafs sie von *derselben* Form wie U ist.

Denn erwägt man, dafs die Ausdrücke $x_2 U_1$ und $x_1 U_2$ verschwinden und die Ausdrücke $x_1 U_1$ und $x_2 U_2$ den Werth $4mRd$ annehmen, wenn man $q_{\varkappa,\lambda}$ für $x_1^\varkappa x_2^\lambda$ setzt, und verändert man in den Gleichungen (3.) die Buchstaben u in U und v in V: so ist aus diesen geänderten Gleichungen zu ersehen, dafs auch die Ausdrücke $x_2 V_1$ und $x_1 V_2$ verschwinden, während die Ausdrücke $x_1 V_1$ und $x_2 V_2$ gleiche Werthe annehmen, wenn man $q_{\varkappa,\lambda}$ für $x_1^\varkappa x_2^\lambda$ setzt; woraus sich mit Rücksicht auf (14.) Folgendes ergiebt:

(20.) *Die Determinante V der Function $d.U+\delta.V$ ist von der Form*

$$V = D.u + \Delta.v.$$

Um D und Δ zu bestimmen, bemerke ich, dafs u den Werth $2R$ annimmt, und v verschwindet, wenn man $\pi_{\varkappa,\lambda}$ für die Producte $x_1^\varkappa x_2^\lambda$ setzt, und dafs v den Werth $2R$ annimmt und u verschwindet, wenn man $p_{\varkappa,\lambda}$ für $x_1^\varkappa x_2^\lambda$ setzt. Bezeichnet man nun durch V_π und V_p die Ausdrücke, in welche V übergeht, wenn man $\pi_{\varkappa,\lambda}$ oder $p_{\varkappa,\lambda}$ für die Producte $x_1^\varkappa x_2^\lambda$ setzt, so erhält man aus (20.):

$$(21.) \qquad V_\pi = 2RD; \qquad V_p = 2R\Delta.$$

Durch diese Gleichungen werden zwar die Gröfsen D und Δ als homogene Functionen zweiten Grades in Rücksicht auf d und δ bestimmt, allein die folgende directe Bestimmung dieser Functionen gewährt noch einfachere Resultate. Ich bemerke noch, dafs die Coëfficienten von δ^2 in den Functionen D und Δ respective m und n sind, weil für $d=0$ und $\delta=1$, $V=mu+nv$ wird, und dafs die Coëfficienten von d^2 in den Functionen D und Δ respective 0 und 1 sind, weil für $\delta=0$, $V=v$ wird.

Wenn man die Determinante v der in (4.) gegebenen Function u bildet, so wird man für die Coëfficienten b der Determinante v folgende Werthe erhalten:

$$(22.) \quad \begin{cases} \quad b_{40} = 12^2(a_{40}a_{22}-a_{13}^2), \\ 2.b_{31} = 12^2(a_{40}a_{13}-a_{31}a_{22}), \\ 6.b_{22} = 12^2(a_{40}a_{04}+2a_{31}a_{13}-3a_{22}^2), \\ 2.b_{13} = 12^2(a_{04}a_{31}-a_{13}a_{22}), \\ \quad b_{04} = 12^2(a_{04}a_{22}-a_{13}^2). \end{cases}$$

Bildet man hierauf die Determinante V und setzt die Coëfficienten x_1^4 und x_2^4 auf beiden Seiten der Gleichung (20.) einander gleich, so erhält man die

beiden Gleichungen

$$12^2\{(da_{40}+\delta b_{40})(da_{22}+\delta b_{22})-(da_{31}+\delta b_{31})^2\} = Da_{40}+\Delta b_{40},$$
$$12^2\{(da_{04}+\delta b_{04})(da_{22}+\delta b_{22})-(da_{13}+\delta b_{13})^2\} = Da_{04}+\Delta b_{40},$$

aus welchen sich folgende Werthe von D und Δ und m und n, welches die Coëfficienten von δ^2 in D und Δ sind, ergeben:

$$(23.)\quad \begin{cases} D = -2nd\delta+m\delta^2, \\ \Delta = +d^2+n\delta^2, \\ m = 3.12^6\{a_{22}a_{04}a_{40}+2a_{13}a_{31}a_{22}-a_{22}^3-a_{04}a_{31}^2-a_{40}a_{13}^2\}, \\ n = +12^3\{4a_{13}a_{31}-3a_{22}^2-a_{04}a_{40}\}. \end{cases}$$

Setzt man der Kürze wegen:

$$(24.)\quad \nabla = d\Delta-\delta\Delta = d^3+3nd\delta^2-m\delta^3,$$

so lassen sich die Gröfsen D und Δ durch die partiellen Differentialquotienten von ∇ wie folgt ausdrücken:

$$D = -\tfrac{1}{3}\frac{\partial\nabla}{\partial\delta},\qquad \Delta = +\tfrac{1}{3}\frac{\partial\nabla}{\partial d}.$$

Die Determinante von $w = mu+nv$ wird nach dem Vorhergehenden gleich $-n^2m.u+(m^2+n^3)v$. Dieselbe wird aber auch aus $w = mu+nv$ gefunden, wenn man die Gröfsen a in die entsprechenden Gröfsen b verändert; wodurch u in v und v in $mu+nv$ übergeht. Wenn nun durch diese Änderung m in m' und n in n' übergeht, so geht u in $mn'u+(m'+nn')v$ über. Es ist daher

$$-n^2m = mn' \quad\text{und}\quad m^2+n^3 = m'+nn',$$

woraus

$$m' = m^2+2n^3;\quad n' = -n^2 \text{ folgt.}$$

(25.) *Wenn also die Gröfsen a in die entsprechenden Gröfsen b übergehen, so geht m in m^2+2n^3 und $(-n)$ in $(-n)^2$ über.*

§. 2.

Die Transformation der gegebenen Function $u = a_{40}x_1^4+4a_{31}x_1^3x_2+6a_{22}x_1^2x_2^2+4a_{13}x_1x_2^3+a_{04}x_2^4$ (4.) durch Substitutionen von der Form

$$(26.)\quad \begin{cases} x_1 = \alpha y_1+\beta y_2, \\ x_2 = \alpha' y_1+\beta' y_2 \end{cases}$$

in die Form

$$(27.)\quad u = Ay_1^4+6Cy_1^2y_2^2+By_2^4$$

erfordert die Bestimmung von 7 unbekannten Gröfsen α, β, α', β', A, B, C.

Substituirt man die Werthe von x_1 und x_2 und (26.) in die gegebene Function u, welche den Theil links der Gleichung (27.) bildet und setzt auf beiden Seiten dieser Gleichung die Coëfficienten gleicher Potenzen und Producte der Variabeln einander gleich, so erhält man nur 5 Gleichungen; welches beweiset, dafs man zweien von den zu bestimmenden Unbekannten beliebige Werthe geben, z. B. $\alpha' = \beta' = 1$ setzen kann. Von diesen 5 Gleichungen führe ich nur die 3 an, welche die Werthe von A, B, C bestimmen, nemlich:

$$(28.)\quad \begin{cases} A = (u)_\alpha, \quad B = (u)_\beta, \\ 12C = \alpha\alpha(u_{11})_\beta + 2\alpha\alpha'(u_{12})_\beta + \alpha'\alpha'(u_{22})_\beta \\ \quad\;\; = \beta\beta(u_{11})_\alpha + 2\beta\beta'(u_{12})_\alpha + \beta'\beta'(u_{22})_\alpha; \end{cases}$$

wo $(u)_\alpha$, $(u_{11})_\alpha, \ldots, (u)_\beta, (u_{11})_\beta, \ldots$ die Ausdrücke bedeuten, in welche $u, u_{11}, \ldots$ übergehen, wenn man in ihnen statt $x_1 x_2$ entweder $\alpha\alpha'$ oder $\beta\beta'$ setzt. Die beiden andern Gleichungen, welche die Verhältnisse $\alpha:\alpha'$ und $\beta:\beta'$ bestimmen, werde ich durch andere äquivalente Gleichungen ersetzen.

Betrachtet man u als eine Function der Variabeln y_1, y_2, bezeichnet die Determinante $\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y_1 \partial y_2}\right)^2$ derselben durch v' und setzt die Determinante $\alpha\beta' - \alpha'\beta = r$, so ist die Determinante:

$$(29.)\quad v = \frac{1}{r^2}v'.$$

Diese Gleichung findet man in diesem Journal (Bd. 28. S. 89) hergeleitet. Die Determinante v' ist nun

$$v' = 12^2.C\left(Ay_1^4 + \frac{AB-3C^2}{C}\cdot y_1^2 y_2^2 + By_2^4\right).$$

Wenn man diesen Werth in (29.) setzt, so wird

$$v = \frac{12^2 C}{r^2}\left\{Ay_1^4 + \frac{AB-3C^2}{C}y_1^2 y_2^2 + By_2^4\right\}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $\delta = \frac{r^2\varrho}{12^2(AB-9C^2)}$, die Gleichung (27.) mit $d = -\frac{C\varrho}{(AB-9C^2)}$ und addirt beide Gleichungen, so erhält man

$$(30.)\quad d.u + \delta.v = \varrho y_1^2 y_2^2.$$

Diese Gleichung beweiset, *dafs sich jede gegebene homogene Function vierten Grades von zwei Variabeln, und ihre Determinante, mit solchen Constanten multipliciren läfst, dafs die Summe ein vollständiges Quadrat wird.*

Um die Constanten d und δ, oder vielmehr ihr Verhältnifs, worauf es hier ankommt, zu bestimmen, bemerke ich, dafs, da $U = d.u + \delta.v$ ein vollständiges Quadrat ist, dieselben Werthe der Variabeln x_1, x_2, welche U verschwinden machen, auch die partiellen Differentialquotienten U_1, U_2 dieser Function werden verschwinden machen. Aus den Gleichungen (2.) ist aber zu ersehen, dafs für die Werthe der Variabeln x_1, x_2, für welche die partiellen Differentialquotienten u_1 und u_2 der Function u verschwinden, auch die Determinante verschwindet. Mithin verschwindet für die Werthe der Variabeln, für welche U verschwindet, auch die Determinante $V = Du + \varDelta v$ dieser Function. Nun ist aber, wie aus (26.) erhellet, $y_1 = 1$, $y_2 = 0$ für $x_1 = \alpha$, $x_2 = \alpha'$, und $y_1 = 0$, $y_2 = 1$ für $x_1 = \beta$, $x_2 = \beta'$. Es verschwindet also nach (30.) $U = d.u + \delta.v$ für diese beiden Werthenpaare, und eben so die Determinante $V = Du + \varDelta v$ dieser Function. Diese Werthenpaare genügen also den beiden Gleichungen

$$(31.)\quad d.u + \delta.v = 0 \quad \text{und} \quad Du + \varDelta v = 0.$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen u und v und setzt der Kürze wegen, wie in dem vorigen Paragraphen, $\nabla = d.\varDelta - \delta.\varDelta$, so erhält man, mit Rücksicht auf (24.), zur Bestimmung des Verhältnisses $d:\delta$ die cubische Gleichung

$$(32.)\quad \nabla = d^3 + 3nd\delta^2 - m\delta^3 = 0.$$

Diese Gleichung beweiset: *dafs sich jede beliebige Function vierten Grades von zwei Variabeln, und ihre Determinante, auf drei verschiedene Arten mit solchen Constanten multipliciren läfst, dafs ihre Summe jedesmal ein vollständiges Quadrat wird.*

Wenn man nun ein Werthenpaar d und δ bestimmt hat, welches der cubischen Gleichung (32.) genügt, und man setzt dieses für d und δ in eine der Gleichungen (31.), z. B. in die erste, so werden die beiden Werthenpaare von x_1, x_2, welche dieser ersten Gleichung genügen, die gesuchten Werthe von $\alpha\alpha'$ und $\beta\beta'$ sein. Da aber in diese Gleichung nur das Verhältnifs von x_1 zu x_2 eingeht, so wird man von diesen Variabeln die eine, z. B. x_2, und eben so die Unbekannten α' und β', gleich 1 setzen können; worauf sich die beiden andern α und β als die ungleichen Wurzeln der nach x_1 biquadratischen Gleichung darstellen, welche zwei Paare gleicher Wurzeln enthält. Hat man aber durch Auflösung dieser Gleichung die Coëfficienten der Substitutionen (26.) gefunden, so geben die Gleichungen (28.) die Werthe der Coëfficienten A, B, C in der transformirten Function (27.).

Die Verhältnisse $\alpha:\alpha'$ und $\beta:\beta'$ sind nach dem Vorhergehenden als die ungleichen Wurzeln einer der biquadratischen Gleichungen (31.) bezeichnet. Es ist aber wichtig, statt dieser eine quadratische Gleichung zu bilden, deren Wurzeln die ungleichen Wurzeln der biquadratischen Gleichung (31.) sind. Zu diesem Zwecke differentiire ich die durch die Substitutionen (26.) identische Gleichung (30.)

$$d.u+\delta.v = \varrho y_1^2 y_2^2$$

zweimal partiell nach x_1, was

$$d.u_{11}+\delta.v_{11} = 2\varrho\left\{\left(\frac{dy_1}{dx_1}\right)^2 y_2^2+4\frac{dy_1}{dx_1}\frac{dy_2}{dx_1}y_1y_2+\left(\frac{dy_2}{dx_1}\right)^2 y_1^2\right\}$$

giebt, oder, wenn man $\alpha\beta'-\alpha'\beta = r$ setzt:

$$d.u_{11}+\delta.v_{11} = \frac{2\varrho}{r^2}\{\beta'^2 y_2^2-4\alpha'\beta' y_1 y_2+\alpha'^2 y_1^2\}.$$

Ich nehme nun an, es sei in dieser identischen Gleichung, sowohl rechts als links, $\alpha\alpha'$ oder $\beta\beta'$ statt $x_1 x_2$ gesetzt. Unter dieser Hypothese verschwindet das Product $y_1 y_2$ und es bleibt die Gleichung richtig, wenn man das Glied $-4\alpha'\beta' y_1 y_2$ in $+2\alpha'\beta' y_1 y_2$ verändert. Durch diese Änderung geht aber die Gleichung in

$$d.u_{11}+\delta.v_{11} = \frac{2\varrho}{r^2}(\beta' y_2+\alpha' y_1)^2$$

über, oder, wenn man für $\beta' y_2+\alpha' y_1$ seinen Werth x_2 setzt, in:

$$d.u_{11}+\delta.v_{11}-\frac{2\varrho}{r^2}x_2^2 = 0.$$

Dieses ist die gesuchte quadratische Gleichung, deren Wurzeln die ungleichen Wurzeln der biquadratischen Gleichung (31.) sind. Ich führe folgende drei Formen dieser quadratischen Gleichung an:

$$(33.)\quad \begin{cases} d.u_{11}+\delta.v_{11}-\frac{2\varrho}{r^2}x_2^2 = 0, \\ d.u_{12}+\delta.v_{12}+\frac{2\varrho}{r^2}x_1 x_2 = 0, \\ d.u_{22}+\delta.v_{22}-\frac{2\varrho}{r^2}x_1^2 = 0. \end{cases}$$

Die zweite und dritte Gleichung erhält man durch einen ähnlichen Calcul, wenn man, statt die identische Gleichung (30.) zweimal nach x_1 zu differentiiren, sie nach x_1 und x_2, oder zweimal nach x_2 differentiirt. Die dritte Gleichung erhält man aber auch unmittelbar aus der ersten, wenn man x_1 mit x_2 ver-

tauscht, und die zweite aus einer angemessenen Combination der ersten und dritten Gleichung mit der Gleichung (31.).

Um diese drei Gleichungen in *eine* von der allgemeinsten Form zu vereinigen, bezeichne ich mit p_1 und p_2 zwei beliebige Gröfsen, multiplicire die drei Gleichungen der Reihe nach mit p_1^2, $2p_1p_2$, p_2^2 und addire die Producte. Dies giebt die Gleichung

$$(34.)\qquad d\{u_{11}p_1^2+2u_{12}p_1p_2+u_{22}p_2^2\}$$
$$+\delta(v_{11}p_1^2+2v_{12}p_1p_2+v_{22}p_2^2)-\frac{2\varrho}{r^2}(x_1p_2-x_2p_1)^2 = 0,$$

welche sich auch, wenn man mit (u_{11}), (u_{12}), ... (u_{22}), (v_{11}), ... die Ausdrücke bezeichnet, in welche u_{11}, u_{12}, ... übergehen, wenn man darin statt x_1, x_2 die beliebigen Gröfsen p_1, p_2 setzt, so darstellen läfst:

$$(35.)\qquad d\{(u_{11})x_1^2+2(u_{12})x_1x_2+(u_{22})x_2^2\}$$
$$+\delta\{(v_{11})x_1^2+2(v_{12})x_1x_2+(v_{22})x_2^2\}-\frac{2\varrho}{r^2}(x_1p_2-x_2p_1)^2 = 0.$$

Es bleibt nun noch übrig, den Werth von $\frac{2\varrho}{r^2}$, welche Gröfse in den vorhergehenden Gleichungen vorkommt, zu bestimmen. Zu diesem Zwecke erinnere man sich, dafs die angegebenen quadratischen Gleichungen dieselben Wurzeln haben, welche die biquadratischen Gleichungen (31.) doppelt enthalten. Aus diesem Umstande läfst sich schliefsen, dafs die quadratischen Gleichungen, z. B. die erste Gleichung (33.), quadrirt, in die biquadratische Gleichung, abgesehen von einem constanten Factor σ, übergehen mufs, oder, dafs folgende identische Gleichung Statt findet:

$$\left\{du_{11}+\delta v_{11}-\frac{2\varrho}{r^2}x_2^2\right\}^2 = \sigma(du+\delta v).$$

Setzt man die Coëfficienten von x_1^4 zu beiden Seiten dieser Gleichung einander gleich, so erhält man

$$\sigma = 12^2(da_{40}+\delta b_{40}).$$

Durch Gleichsetzung der Coëfficienten von $x_1x_2^3$ zu beiden Seiten der Gleichung erhält man eine Gleichung, aus welcher sich, wenn man den gefundenen Werth von σ substituirt, folgender Werth von $-\frac{2\varrho}{r^2}$ ergiebt:

$$-\frac{2\varrho}{r^2} = \frac{\frac{12^2}{2}\{(da_{40}+\delta b_{40})(da_{13}+\delta b_{13})-(da_{31}+\delta b_{31})(da_{22}-\delta b_{22})}{6(da_{31}+\delta b_{31})},$$

Um den Zähler dieses Ausdrucks zu transformiren, nehme ich die zweite

Gleichung (22.), nemlich

$$b_{31} = \frac{12^2}{2}(a_{40}a_{13} - a_{31}a_{22})$$

zu Hülfe. Diese Gleichung geht in

$$Da_{31} + \Delta b_{31} = \frac{12^2}{2}\{(da_{40} + \delta b_{40})(da_{13} + \delta b_{13}) - (da_{31} + \delta b_{31})(da_{22} + \delta b_{22})\}$$

über, wenn man die Gröfsen a in die entsprechenden Gröfsen $da + \delta b$ übergehen läfst; durch welche Anordnung u in $du + \delta v$ und v in $Du + \Delta v$ übergeht. Es ist daher:

$$-\frac{2r}{\varrho^2} = \tfrac{1}{6}\cdot\frac{Da_{31} + \Delta b_{31}}{da_{31} + \delta b_{31}}.$$

Da aber nach (32.) $\frac{D}{\Delta} = \frac{d}{\delta}$ ist, so nimmt der gesuchte Werth von $-\frac{2r}{\varrho^2}$ die einfache Gestalt

$$(36.)\qquad -\frac{2\varrho}{r^2} = \tfrac{1}{6}\cdot\frac{\Delta}{\delta} \text{ an.}$$

Ich werde nun noch ein Paar Formeln ableiten, welche in der vorliegenden Untersuchung eine Anwendung finden.

In der identischen Gleichung (30.) hatten die Coëfficienten d und δ die Bedeutung:

$$d = -\frac{C\varrho}{AB - 9C^2}, \qquad \delta = \frac{r^2\varrho}{12^2(AB - 9C^2)}.$$

Wenn man die zweite Gleichung in die erste dividirt, so erhält man

$$\frac{d}{\delta} = -12^2\frac{C}{r^2},$$

und wenn man den Werth von $r = \alpha\beta' - \alpha'\beta$ substituirt,

$$(37.)\qquad C = -\frac{(\alpha\beta' - \alpha'\beta)^2}{12^2}\cdot\frac{d}{\delta}.$$

Dieser Werth von C hat eine einfachere Gestalt, als der in (28.). Ferner erhält man aus der zweiten der eben angegebenen Gleichungen, wenn man den Werth von ϱ aus (36.) substituirt:

$$(38.)\qquad AB - 9C^2 = -\frac{(\alpha\beta' - \alpha'\beta)^4}{12^3}\cdot\frac{\Delta}{\delta^2}.$$

Diese Untersuchung beweiset folgende Auflösungsmethode des behandelten Problems:

„Man bestimme durch Auflösung der cubischen Gleichung (32.) ein „Werthenpaar d und δ, welches dieser Gleichung genügt, setze dasselbe

„und den Werth von $-\frac{2\varrho}{r^2}=\frac{1}{6}\cdot\frac{\Delta}{\delta}$ aus (26.) in eine der quadratischen „Gleichungen (33.) und suche zwei Werthenpaare $\alpha\alpha'$ und $\beta\beta'$, den Wur- „zeln der quadratischen Gleichung entsprechend, welche der Gleichung „genügen. Diese sind dann die Coëfficienten der Substitutionen (26.), „durch welche die gegebene Function u in

$$(39.)\qquad u=(u)_\alpha y_1^4-\frac{(\alpha\beta'-\alpha'\beta)^2}{2.12}\cdot\frac{d}{\delta}y_1^2y_2^2+(u)_\beta y_2^4$$

„transformirt wird."

Jeder Wurzel der cubischen Gleichung (32.) entspricht eine andere Transformation der gegebenen Function.

§. 3.

Mit der Transformation der homogenen Functionen vierten Grades, von den beiden Variabeln x_1, x_2, steht die Auflösung der allgemeinen biquadratischen Gleichungen in der engsten Verbindung. Setzt man nämlich $\frac{x_1}{x_2}=X$ und $\frac{y_1}{y_2}=Y$, so geht die allgemeine biquadratische Gleichung

$$(40.)\qquad \frac{u}{x_2^4}=a_{40}X^4+4a_{31}X^3+6a_{22}X^2+4a_{13}X+a_{04}=0$$

durch die Substitution

$$(41.)\qquad X=\frac{\alpha Y+\beta}{\alpha' Y+\beta'}$$

in die nach Y^2 quadratische Gleichung

$$(42.)\qquad AY^4+6CY^2+B=0$$

über. Es seien nun $Y^2=\lambda^2$ und $Y^2=\mu^2$ die beiden Wurzeln dieser quadratischen Gleichung, also $Y=\pm\lambda$ und $Y=\pm\mu$ die vier Wurzeln der Gleichung (42.). Setzt man diese Werthe von Y in (41.) und bezeichnet die Wurzeln der biquadratischen Gleichung (40.) durch X_1, X_2, X_3, X_4, so erhält man für die Werthe der Wurzeln der biquadratischen Gleichung (40.):

$$(43.)\qquad \begin{cases} X_1=\frac{\alpha\lambda+\beta}{\alpha'\lambda+\beta'}, & X_2=\frac{\alpha\lambda-\beta}{\alpha'\lambda-\beta'}, \\ X_3=\frac{\alpha\mu+\beta}{\alpha'\mu+\beta'}, & X_4=\frac{\alpha\mu-\beta}{\alpha'\mu-\beta'}. \end{cases}$$

Wenn man der Kürze wegen $\frac{\alpha}{\alpha'}=a$ und $\frac{\beta}{\beta'}=b$ setzt, so erhält man durch Elimination von λ und μ aus den Gleichungen (43.) folgende Relationen

zwischen den Wurzeln X der biquadratischen Gleichung (40.) und der Wurzeln $\frac{x_1}{x_2} = a$, $\frac{x_1}{x_2} = b$ der quadratischen Gleichung (33.):

$$(44.)\quad \begin{cases} X_1 X_2 - \frac{1}{2}(X_1 + X_2)(a+b) + ab = 0, \\ X_3 X_4 - \frac{1}{2}(X_3 + X_4)(a+b) + ab = 0. \end{cases}$$

Die Ausdrücke (43.) der Wurzeln der biquadratischen Gleichung (40.) haben eine ungewöhnliche Form. Es ist bekannt, dafs sich jeder Wurzel einer algebraisch auflösbaren Gleichung eine Form von der Art geben läfst, dafs die algebraischen Ausdrücke, aus welcher sie zusammengesetzt ist, sich als rationale Functionen der Wurzeln der Gleichung darstellen lassen. Es lassen sich aber auf keine Weise die Gröfsen $\alpha\beta$, wenn man $\alpha'\beta'$ etwa $= 1$ setzt, und eben so wenig die Gröfsen λ, μ, rational durch die Wurzeln X ausdrücken. Diese Form der Wurzeln wird man erhalten, wenn man gleichmäfsig alle drei Wurzeln der cubischen Gleichung (32.) in die Rechnung einführt.

Ich werde durch $\frac{d_1}{\delta_1}$, $\frac{d_2}{\delta_2}$, $\frac{d_3}{\delta_3}$ die drei Wurzeln der cubischen Gleichung (32.) bezeichnen, und die diesen entsprechenden Wurzeln $\frac{x_1}{x_2}$ der quadratischen Gleichung (33.) durch $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, $a_3 b_3$. Die Gleichungen (44.) geben dann:

$$(45.)\quad \begin{cases} X_1 X_2 - \frac{1}{2}(X_1 + X_2)(a_1 + b_1) + a_1 b_1 = 0, \\ X_3 X_4 - \frac{1}{2}(X_3 + X_4)(a_1 + b_1) + a_1 b_1 = 0. \end{cases}$$

Durch Vertauschung der Wurzeln X_2 und X_3 erhält man aus diesen beiden Gleichungen:

$$(46.)\quad \begin{cases} X_1 X_3 - \frac{1}{2}(X_1 + X_3)(a_2 + b_2) + a_2 b_2 = 0, \\ X_2 X_4 - \frac{1}{2}(X_2 + X_4)(a_2 + b_2) + a_2 b_2 = 0, \end{cases}$$

und durch Vertauschung der Wurzeln X_2 und X_4 in (45.):

$$(47.)\quad \begin{cases} X_1 X_4 - \frac{1}{2}(X_1 + X_4)(a_3 + b_3) + a_3 b_3 = 0, \\ X_2 X_3 - \frac{1}{2}(X_2 + X_3)(a_3 + b_3) + a_3 b_3 = 0. \end{cases}$$

Aus je zwei dieser drei Systeme von Gleichungen geht eine Gleichung folgenden Systems hervor:

$$(48.)\quad \begin{cases} a_2 b_2 - \frac{1}{2}(a_2 + b_2)(a_3 + b_3) + a_3 b_3 = 0, \\ a_3 b_3 - \frac{1}{2}(a_3 + b_3)(a_1 + b_1) + a_1 b_1 = 0, \\ a_1 b_1 - \frac{1}{2}(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) + a_2 b_2 = 0. \end{cases}$$

Wenn man die drei Gleichungen, welche sich aus der quadratischen Gleichung (33.) finden, indem man nach einander statt $\frac{d}{\delta}$ die Wurzeln der

cubischen Gleichung (32.) setzt, mit einander multiplicirt, so erhält man eine Gleichung 6ten Grades, deren Coëfficienten symmetrische Functionen der Wurzeln der cubischen Gleichung (32.) enthalten. Drückt man diese durch die Coëfficienten der cubischen Gleichung aus, so werden die Coëfficienten in der Gleichung 6ten Grades zu rationalen Functionen der Gröfsen $a_{\varkappa\lambda}$. Diese Gleichung, zwischen deren Wurzeln a, b die Relationen (48.) Statt finden, läfst sich nun umgekehrt mit Hülfe der cubischen Gleichungen (32.) in drei quadratische Gleichungen zerlegen, und ist also algebraisch auflösbar in Rücksicht auf die Gröfsen $a_{\varkappa\lambda}$. In dem folgenden Paragraphen werde ich die eben gemachte Bemerkung dahin erweitern, dafs ich beweisen werde, wie jede Gleichung 6ten Grades aufgelöset werden kann, wenn zwischen den Wurzeln derselben die Relationen (48.) Statt finden.

Addirt man die beiden Gleichungen (45.) und setzt für die Summe $X_1+X_2+X_3+X_4$ ihren Werth $\frac{4a_{31}}{a_{40}}$, so erhält man

$$X_1X_2+X_3X_4+2\cdot\frac{a_{31}(a_1+b_1)+a_{40}a_1b_1}{a_{40}}.$$

Es haben aber a_1+b_1 und a_1b_1 folgende, aus der ersten von den Gleichungen (33.) entnommene Werthe:

$$a_1+b_1 = -2\cdot\frac{\frac{d_1}{\delta_1}a_{31}+b_{31}}{\frac{d_1}{\delta_1}a_{40}+b_{40}}$$

$$a_1b_1 = \frac{\frac{d_1}{\delta_1}a_{22}+b_{22}-\frac{1}{12}\cdot\frac{2\varrho}{r^3}}{\frac{d_1}{\delta_1}a_{40}+b_{40}}$$

Setzt man diese Werthe in die vorhergehende Gleichung, so kann man derselben, mit Berücksichtigung der Gleichungen (36., 23. und 22.), folgende Gestalt geben:

$$4(X_1X_2+X_3X_4) = \frac{\frac{d_1^2}{\delta_1^2}a_{40}+\frac{d_1}{\delta_1}(b_{40}-6.12.a_{22}a_{40})-6.12.b_{40}a_{22}}{9a_{40}\left(\frac{d_1}{\delta_1}a_{40}+b_{40}\right)},$$

oder die noch einfachere:

$$(49.)\qquad 4(X_1X_2+X_3X_4) = -\frac{1}{9.a_{40}}\left\{\frac{d_1}{\delta_1}-6.12.a_{22}\right\}.$$

Diese Gleichung beweiset, dafs sich die Wurzeln der cubischen Gleichung (32.) rational durch die Wurzeln der biquadratischen Gleichung (40.) ausdrücken lassen.

Addirt man zu der Gleichung (49.) die beiden Gleichungen

$$\Sigma X_x^2 = \frac{4a_{22}}{a_{40}} - \tfrac{1}{3}\cdot\frac{b_{40}}{a_{40}^2},$$

$$-2\Sigma X_x X_\lambda = -12\cdot\frac{a_{22}}{a_{40}},$$

so erhält man:

$$(X_1+X_2-X_3-X_4)^2 = -\frac{1}{9.a_{40}^2}\left\{\frac{d_1}{\delta_1}a_{40}+b_{40}\right\};$$

woraus durch Wurzel-Ausziehung

$$X_1+X_2-X_3-X_4 = \frac{1}{3.a_{40}}\sqrt{\left(-\left(\frac{d_1}{\delta_1}a_{40}+b_{40}\right)\right)}$$

hervorgeht. Man hat nun folgende vier Gleichungen:

$$(50.)\quad \begin{cases} X_1+X_2+X_3+X_4 = -\frac{4.a_{31}}{a_{40}}, \\ X_1+X_2-X_3-X_4 = \frac{1}{3.a_{40}}\sqrt{\left(-\left(\frac{d_1}{\delta_1}a_{40}+b_{40}\right)\right)} \\ X_1-X_2+X_3-X_4 = \frac{1}{3.a_{40}}\sqrt{\left(-\left(\frac{d_2}{\delta_2}a_{40}+b_{40}\right)\right)} \\ X_1-X_2-X_3+X_4 = \frac{1}{3.a_{40}}\sqrt{\left(-\left(\frac{d_3}{\delta_3}a_{40}+b_{40}\right)\right)}. \end{cases}$$

von denen die beiden letzten durch Vertauschung der Wurzeln aus den ihnen vorhergehenden gefunden werden.

Von den Vorzeichen der Quadratwurzeln in den Gleichungen (50.) bestimmen immer zwei das dritte. Denn multiplicirt man die drei letzten Gleichungen (50.) mit einander, so wird der Theil links der resultirenden Gleichung eine symmetrische Function der Wurzeln der biquadratischen Gleichung (40.) sein. Drückt man diese durch die Coëfficienten der biquadratischen Gleichung aus, so kann man der genannten Gleichung die einfache Gestalt

$$(51.)\quad 12(a_{31}b_{40}-a_{40}b_{31}) =$$
$$\sqrt{\left(-\left(\frac{d_1}{\delta_1}a_{40}+b_{40}\right)\right)}\sqrt{\left(-\left(\frac{d_2}{\delta_2}a_{40}+b_{40}\right)\right)}\sqrt{\left(-\left(\frac{d_3}{\delta_3}a_{40}+b_{40}\right)\right)}$$

geben. Hat man nun Sorge getragen, den drei Quadratwurzeln solche Vorzeichen zu geben, dafs der Gleichung (51.) genügt wird, so erhält man die Wurzeln der biquadratischen Gleichung (40.) durch Addition und Subtraction der Gleichungen (50.).

Ich will noch darauf aufmerksam machen, dafs die cubische Gleichung (32.), auf welche in dem Vorhergehenden die Auflösung der biquadratischen Gleichung (40.) zurückgeführt worden ist, gerade die Form hat, dafs sich die Cardanische Regel zum Ausdruck ihrer Wurzeln ohne Weiteres anwenden läfst. Setzt man

$$a_{41}=1,\quad a_{31}=0,\quad 6a_{22}=p,\quad 4a_{13}=q,\quad a_{04}=r,$$

wodurch die biquadratische Gleichung (40.) in

$$X^4+pX^2+qX+r = 0$$

übergeht, in welcher Form man die biquadratischen Gleichungen zu behandeln pflegt, so erhält man aus der cubischen Gleichung (32.) die sogenannte reducirte Gleichung

$$x^3+2pz^2+(p^2-4r)z-q^2 = 0$$

durch die Substitution

$$-\left(\frac{d}{\delta}a_{40}+b_{40}\right) = 36z.$$

§. 4.

Man kann sagen, dafs eine Gleichung $n$ten Grades n durch die Gleichung bestimmte Puncte einer geraden Linie darstelle, wenn man die n Wurzeln der Gleichung als die Abscissen auf der geraden Linie von einem beliebig gewählten Anfangspuncte der geraden Linie betrachtet und unter den n Puncten die Endpuncte dieser Abscissen versteht. Dieses vorausgesetzt, wird die biquadratische Gleichung (40.) vier Puncte in der geraden Linie darstellen, welche ich, wie die Wurzeln der Gleichungen, mit den Buchstaben X_1, X_2, X_3, X_4 bezeichnen werde. Eben so stellt die Gleichung (33.), wenn man in derselben den Gröfsen d und δ die Werthe d_1 und δ_1 giebt, zwei Puncte a_1 und b_1 auf derselben geraden Linie vor. Die erste Gleichung (45.) ist, wie bekannt, die Bedingung, welche die Punctenpaare X_1, X_2 und a_1, b_1 zu erfüllen haben, wenn sie *harmonisch* sein sollen. Demnach werden die Gleichungen (45.) dasjenige Punctenpaar a_1, b_1 bestimmen, welches sowohl mit dem Punctenpaare X_1, X_2 harmonisch ist, als mit dem Punctenpaare X_3, X_4. Auf gleiche Weise bestimmen die Gleichungen (46.) dasjenige Punctenpaar a_2, b_2, welches harmonisch ist zu den Punctenpaaren X_1, X_3 und X_2, X_4. Endlich bestimmen die Gleichungen (48.) das zu den Punctenpaaren X_1, X_4 und X_2, X_3 harmonische Punctenpaar a_3, b_3. Die so bestimmten Punctenpaare sind unter einander harmonisch; wie es die Gleichungen (48.) beweisen.

Man hat also folgenden Lehrsatz:

„Wenn vier Puncte auf einer geraden Linie gegeben sind, so giebt es drei Punctenpaare, deren jedes harmonisch ist, zu einem Paare, wie zu dem andern Paare der vier gegebenen Puncte. Diese drei Punctenpaare sind unter einander selbst harmonisch.

Die Abscissen irgend eines von diesen drei Punctenpaaren a, b sind die Coëfficienten α, β in den Substitutionen (41.), wenn man $\alpha' = \beta' = 1$ setzt.

Ich werde nun noch kurz angeben, wie sich die Puncte a und b construiren lassen. Zu diesem Ende lege ich durch die von der biquadratischen Gleichung (40.) gegebenen vier Puncte der Abscissenaxe vier gerade Linien, welche ein Viereck bilden werden. Durch die Ecken dieses Vierecks lege ich die beiden Kegelschnitte, welche zugleich die Abscissenaxe berühren. Die Berührungspuncte werden dann das gesuchte Punctenpaar a, b sein. Erwägt man aber, dafs die vier geraden Linien, welche durch die von der biquadratischen Gleichung gegebenen Puncte gelegt werden, drei verschiedene Vierecke bilden, so wird man auf die angedeutete Weise auch drei Punctenpaare a, b erhalten. Diese drei Punctenpaare werden durch eine Gleichung 6ten Grades bestimmt, welche, wie wir oben bemerkt haben, algebraisch lösbar ist.

Ich werde nun auch unabhängig von der vorhergehenden Untersuchung beweisen: *dafs jede gegebene Gleichung 6ten Grades algebraisch auflösbar ist, wenn zwischen den Wurzeln* $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, $a_3 b_3$ *die Gleichungen* (48.) *Statt finden.*

In der That: setzt man

$$\begin{array}{lll} a_1+b_1 = -a', & a_2+b_2 = -a'', & a_3+b_3 = -a''', \\ a_1 b_1 = +b', & a_2 b_2 = +b'', & a_3 b_3 = +b''', \end{array}$$

so stellen sich die Gleichungen (48.) wie folgt dar:

$$(a.)\qquad \begin{cases} b'' - \tfrac{1}{2}a''a''' + b''' = 0, \\ b''' - \tfrac{1}{2}a'''a' + b' = 0, \\ b' - \tfrac{1}{2}a'a'' + b'' = 0, \end{cases}$$

mit deren Hulfe nun die gegebene Gleichung 6ten Grades in folgende drei Gleichungen zerfallen wird:

$$(b.)\qquad \begin{cases} x^2 + a'x + b' = 0, \\ x^2 + a''x + b'' = 0, \\ x^2 + a'''x + b''' = 0, \end{cases}$$

deren Product die gegebene Gleichung

$$(c.)\qquad x^6+c_5x^5+c_4x^4+c_3x^3+\cdots c_0 = 0$$

selbst ist. Denn setzt man die Coëfficienten der Variabeln in dem aus den Gleichungen (*b.*) gebildeten Product den Coëfficienten der Variabeln in (*c.*) einander gleich, so erhält man:

$$c_5 = a'+a''+a''',$$
$$c_4 = a''a'''+a'''a'+a'a''+b'+b''+b''',$$
$$c_3 = a'a''a'''+a'(b''+b''')+a''(b'''+b')+a'''(b'+b''),$$

und mit Berücksichtigung der Gleichungen (*a.*):

$$c_5 = a'+a''+a''',$$
$$c_4 = \tfrac{5}{4}(a''a'''+a'''a'+a'a''),$$
$$c_3 = \tfrac{3}{2}(a'a''a''').$$

Die Coëfficienten a in den Gleichungen (*b.*) sind demnach die Wurzeln der cubischen Gleichung:

$$y^3-c_5y^2+\tfrac{4}{5}c_4y-\tfrac{2}{3}c_3 = 0.$$

Wenn diese Wurzeln gefunden sind, so ergeben sich die Coëfficienten b in den Gleichungen (*b.*) aus den Gleichungen (*a.*).

Königsberg im Januar 1849.

17.

Algebraische Auflösung derjenigen Gleichungen 6ten Grades, zwischen deren Wurzeln $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ die Bedingungsgleichung

$$(x_1-y_2)(x_2-y_3)(x_3-y_1)+(y_1-x_2)(y_2-x_3)(y_3-x_1) = 0$$

Statt findet.

(Von Herrn *Otto Hesse*, Professor an der Universität zu Königsberg.)

Viele Probleme der Geometrie führen in letzter Instanz auf Gleichungen, welche algebraisch auflösbar sind. Zwei Beispiele dieser Art, eine Gleichung vom 9ten und eine vom 6ten Grade, habe ich in diesem Journale (Bd. 34. S. 193) und in diesem Bande (S. 243) behandelt. Das Problem der Kreisschnitte einer Oberfläche zweiter Ordnung, welches analytisch darauf beruht, einen Factor λ so zu bestimmen, dafs die aus einer gegebenen homogenen Function zweiten Grades von den drei Variabeln x, y, z und dem Ausdrucke $\lambda(x^2+y^2+z^2)$ zusammengesetzte Summe in zwei lineäre Factoren zerfällt, führt ebenfalls, wenn man das Verhältnifs der Coëfficienten in einer der lineäre Factoren als die gesuchte Unbekannte betrachtet, auf eine Gleichung 6ten Grades, welche algebraisch auflösbar ist. Wenn man auf den innern Grund der Auflösbarkeit der genannten Gleichung zurückgeht, so wird man ihn darin finden, dafs zwischen den Wurzeln x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3 der Gleichung die Bedingungsgleichung

$$(1.)\quad (x_1-y_2)(x_2-y_3)(x_3-y_1)+(y_1-x_2)(y_2-x_3)(y_3-x_1) = 0$$

Statt findet. Ich werde in dem hier Folgenden beweisen, dafs jede gegebene Gleichung 6ten Grades algebraisch auflösbar ist, wenn zwischen ihren Wurzeln die angegebene Bedingungsgleichung Statt findet.

Wenn man der Kürze wegen:

$$x_1+y_1=a_1,\quad x_2+y_2=a_2,\quad x_3+y_3=a_3,$$
$$x_1y_1=b_1,\quad x_2y_2=b_2,\quad x_3y_3=b_3$$

setzt, so läfst sich die Gleichung (1.) auch so darstellen:

$$(2.)\quad a_1b_2-a_2b_1+a_2b_3-a_3b_2+a_3b_1-a_1b_3 = 0.$$

Der Theil links dieser Gleichung ist die aus den Gröfsen

$$\begin{matrix} 1, & a_1, & b_1, \\ 1, & a_2, & b_2, \\ 1, & a_3, & b_3 \end{matrix}$$

gebildete *Determinante* Es lassen sich daher zwei Gröfsen A und B so bestimmen, dafs sie folgenden drei Gleichungen genügen:

$$(3.)\quad \begin{cases} B+Aa_1+b_1 = 0, \\ B+Aa_2+b_2 = 0, \\ B+Aa_3+b_3 = 0; \end{cases}$$

aus welchen durch Elimination von A und B wiederum die Gleichung (2.) hervorgeht. Die Auflösung der beiden letzten Gleichungen giebt

$$-A = \frac{b_2-b_3}{a_2-a_3}; \quad +B = \frac{b_2 a_3 - b_3 a_2}{a_2-a_3};$$

welche Werthe von A und B nach (3.) ungeändert bleiben, wenn man die Indices 1, 2, 3 beliebig mit einander vertauscht. Aus diesen Werthen bilde ich folgenden, in z quadratischen Ausdruck:

$$(4.)\quad Z = z^2+2Az+B;$$

welcher durch die genannte Änderung eben so wenig seinen Werth ändert.

Ich werde nun zeigen, wie diese in z quadratische Function sich durch die Coëfficienten der gegebenen Gleichung rational ausdrücken läfst.

Wenn man den Ausdruck Z, welcher eine rationale Function der Wurzeln x_2, y_2, x_3, y_3 ist, durch

$$f(x_2, y_2, x_3, y_3)$$

bezeichnet und

$$(5.)\quad Z_1=f(x_2,y_2,x_3,y_3); \quad Z_2=f(x_3,y_3,x_1,y_1); \quad Z_3=f(x_1,y_1,x_2,y_2)$$

setzt, so sind die Ausdrücke Z_1, Z_2, Z_3 zwar von einander verschieden, aber vermöge der Gleichung (1.) ihrem Werthe nach gleich Z. Ich setze nun in dem Ausdrucke Z_1 für x_2, y_2, x_3, y_3 die 15 Combinationen der 6 Wurzeln der gegebenen Gleichung zur 4ten Classe und permutire überdies noch die vier Wurzeln in jeder Combination auf jede mögliche Art. Dadurch entstehen 15·24 Ausdrücke. Unter diesen Ausdrücken werden mehrere gleiche vorkommen. Denn es sei einer derselben:

$$(6.)\quad C_x = f(x_1, y_1, x_2, x_3).$$

Da dieser Ausdruck so beschaffen ist, dafs er sich nicht ändert, wenn man x_1 mit y_1 oder x_2 mit x_3 vertauscht, oder wenn man x_1 mit x_2 und zu

35 *

gleicher Zeit y_1 mit x_3 vertauscht, so wird er unter den 15·24 Ausdrücken 8 mal vorkommen. Dasselbe gilt von jedem der drei Ausdrücke Z. Die Anzahl der verschiedenen Ausdrücke

$$Z_1,\; Z_2,\; Z_3,\; C_1,\; C_2,\; \ldots\; C_n$$

beträgt demnach $\frac{15.24}{8}$; woraus folgt, dafs $n = 42$ ist.

Durch jede beliebige Permutation der 6 Wurzeln der gegebenen Gleichung in der angegebenen Reihe der 45 Ausdrücke gehen nun die einen in die andern über, so dafs eine neue Reihenfolge eben derselben 45 Ausdrücke hervorgeht. Es ist daher folgende homogene ganze Function der Variabeln α und β von der 45ten Ordnung:

$$(7.)\quad F(\alpha,\beta) = (\alpha-\beta Z_1)(\alpha-\beta Z_2)(\alpha-\beta Z_3)(\alpha-\beta C_1)(\alpha-\beta C_2)\ldots(\alpha-\beta C_n)$$

eine symmetrische Function der 6 Wurzeln der gegebenen Gleichung und kann daher durch die Coëfficienten der gegebenen Gleichung rational ausgedrückt werden. Ist dies geschehen, so hat die nunmehr in den Coëfficienten der gegebenen Gleichung rationale Gleichung

$$(8.)\quad F(\alpha,\beta) = 0,$$

wenn man $\frac{\alpha}{\beta}$ als die Unbekannte betrachtet, 45 Wurzeln, von denen die drei Wurzeln Z_1, Z_2, Z_3 gleich Z, die übrigen aber sämmtlich verschieden sind.

Wenn man erwägt, dafs jede der folgenden Gleichungen vom 43ten Grade

$$\frac{\partial^2 F(\alpha,\beta)}{\partial\alpha^2} = 0,\quad \frac{\partial^2 F(\alpha,\beta)}{\partial\alpha\,\partial\beta} = 0,\quad \frac{\partial^2 F(\alpha,\beta)}{\partial\beta^2} = 0$$

erfüllt wird, wenn man $\alpha = Z$ und $\beta = 1$ setzt, so giebt das *Sylvestersche* Eliminationsverfahren ein Mittel, diesen Werth von $\alpha = Z$ aus zwei von den angegebenen Gleichungen, z. B. aus den beiden ersten, zu ermitteln. Dieses besteht darin, dafs man unter der Voraussetzung $\beta = 1$ die Gleichungen

$$\begin{array}{ll}
\frac{\partial^2 F(\alpha,\beta)}{\partial\alpha^2} = 0, & \frac{\partial^2 F(\alpha,\beta)}{\partial\alpha\,\partial\beta} = 0,\\
\alpha\cdot\frac{\partial^2 F(\alpha,\beta)}{\partial\alpha^2} = 0, & \alpha\cdot\frac{\partial^2 F(\alpha,\beta)}{\partial\alpha\,\partial\beta} = 0,\\
\alpha^2\cdot\frac{\partial^2 F(\alpha,\beta)}{\partial\alpha^2} = 0, & \alpha^2\cdot\frac{\partial^2 F(\alpha,\beta)}{\partial\alpha\,\partial\beta} = 0,\\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\
\alpha^{42}\cdot\frac{\partial^2 F(\alpha,\beta)}{\partial\alpha^2} = 0, & \alpha^{42}\cdot\frac{\partial^2 F(\alpha,\beta)}{\partial\alpha\,\partial\beta} = 0
\end{array}$$

bildet, in diesen Gleichungen die Glieder nach Potenzen von α ordnet und, indem man eine beliebige Gleichung ausschliefst, aus den übrigen die 85 verschiedenen Potenzen von α, so wie die Unbekannten, aus linearen Gleichungen berechnet. Auf diese Weise stellt sich der Werth von $\alpha = Z$ als ein rationaler Bruch dar, dessen Zähler und Nenner ganze Functionen von z sind; und zwar wird der Grad des Zählers den des Nenners um zwei Einheiten übersteigen. Dividirt man den Nenner in den Zähler, so erhält man eine ganze Function zweiten Grades, in Beziehung auf z, und einen echten Bruch. Da aber nach (4.) der gesuchte Werth von Z eine ganze Function zweiten Grades ist, so ist jene ganze Function von z der gesuchte Werth von Z, und der echte Bruch mufs mit Rücksicht auf die Bedingungsgleichung (1.) verschwinden. Die Coëfficienten von z' und z^0 des auf diese Weise gefundenen Werths von Z sind rationale Functionen der Coëfficienten der gegebenen Gleichung und respective gleich $2A$ und B in dem Ausdrucke (4.).

Nachdem ich den in z quadratischen Ausdruck $Z = z^2 + 2Az + B$ durch die Coëfficienten der gegebenen Gleichung rational ausgedrückt habe, setze ich denselben $= 0$; was die quadratische Gleichung

$$(9.)\qquad z^2 + 2Az + B = 0$$

giebt. Die Wurzeln z_1, z_2 dieser Gleichung bestimme ich durch Auflösung der Gleichung als irrationale Functionen der Coëfficienten der gegebenen Gleichung.

Ich setze nun:

$$(10.)\qquad \begin{cases} \dfrac{x_1 - z_1}{x_1 - z_2} = \lambda_{,}, & \dfrac{y_1 - z_1}{y_1 - z_2} = \lambda', \\ \dfrac{x_2 - z_1}{x_2 - z_2} = \lambda_{,,}, & \dfrac{y_2 - z_1}{y_2 - z_2} = \lambda'', \\ \dfrac{x_3 - z_1}{x_3 - z_2} = \lambda_{,,,}, & \dfrac{y_3 - z_1}{y_3 - z_2} = \lambda''', \end{cases}$$

und bilde die in Rücksicht auf die Wurzeln der gegebenen Gleichung symmetrische Function

$$(11.)\qquad L = (\lambda - \lambda_{,})(\lambda - \lambda_{,,})(\lambda - \lambda_{,,,})(\lambda - \lambda')(\lambda - \lambda'')(\lambda - \lambda''').$$

vom 6ten Grade in λ, welche ich durch die Coëfficienten der gegebenen Gleichung und die Wurzeln z_1, z_2 rational ausdrücke. In der Entwickelung dieses Ausdrucks nach Potenzen von λ lasse ich die mit den ungeraden Potenzen von λ multiplicirten Glieder, als verschwindend durch die Gleichung (1.),

aus. Denn es ist, mit Rücksicht auf die Gleichungen (3.):

$$\lambda_{,}+\lambda'=0,\quad \lambda_{,,}+\lambda''=0,\quad \lambda_{,,,}+\lambda'''=0.$$

Dadurch ergiebt sich L unter der Form:

$$(12.)\qquad L=\lambda^6+M\lambda^4+N\lambda^2+P,$$

in welcher M, N, P rationale Functionen der Coëfficienten der gegebenen Gleichung und der Wurzeln x_1, x_2 sind.

Um nun die 6 Werthe $\lambda_{,}$, λ', ... $\lambda_{,,,}$, λ''' zu finden, löse ich die in λ^2 cubische Gleichung:

$$(13.)\qquad \lambda^6+M\lambda^4+N\lambda^2+P=0$$

auf und ziehe aus den Wurzeln derselben die 6 Quadratwurzeln. Setzt man diese für die Gröfsen λ in (10.), so ist nur noch die Auflösung jener linearen Gleichungen (10.) nöthig, um die Wurzeln der gegebenen Gleichung als algebraische Ausdrücke der Coëfficienten der gegebenen Gleichung darzustellen.

Ich führe hier noch zwei Lehrsätze an, welche sich auf ähnliche Art beweisen lassen.

1. „Jede Gleichung *achten Grades* ist algebraisch auflösbar, wenn „zwischen je drei Wurzelpaaren x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4 die Bedingungs- „gleichung

$$(x_\varkappa-y_\lambda)(x_\lambda-y_\mu)(x_\mu-y_\varkappa)+(y_\varkappa-x_\lambda)(y_\lambda-x_\mu)(y_\mu-x_\varkappa)=0$$

„Statt findet."

2. „Jede Gleichung *2nten Grades* ist algebraisch auf eine Gleichung „*n*ten Grades reducirbar, wenn je drei Wurzelpaare x_1, y_1, x_2, y_2, ... x_n, y_n „der Gleichung der angegebenen Bedingungsgleichung genügen."

Die Bedingungsgleichung drückt geometrisch aus, dafs die durch die drei Wurzelpaare dargestellten Puncte einer geraden Linie sich *in Involution* befinden."

Königsberg im Februar 1849.

18.

Eine Bemerkung zum *Pascal*schen Theorem.

(Von Herrn *Otto Hesse,* Professor an der Universität zu Königsberg.)

In seinem grofsen Werke: „Systematische Entwickelungen etc. 1832." stellt *Steiner* (S. 311) folgende Theoreme zusammen:

1. „Irgend sechs Puncte eines beliebigen Kegelschnitts bestimmen 60 ein-„geschriebene einfache Sechsecke."
2. „In jedem der letzteren liegen die drei Puncte, in welchen die gegen-„überliegenden Seiten sich schneiden, in einer Geraden G; so dafs also „60 solcher Geraden G Statt finden."
3. „Von diesen 60 Geraden gehen drei und drei durch irgend einen „Punct P; so dafs also 20 solcher Puncte P entstehen."
4. Und von diesen 20 Puncten P liegen 15 mal 4 in einer Geraden g; „so dafs jeder in drei solchen Geraden liegt."

Steiner fügt hierzu noch die Frage:

„Welche Beziehungen haben diese 15 Geraden g weiter zu einander?"

Von diesen Sätzen ist derjenige No. 4., wie *Plücker* in der Note zum *Pascal*schen Theorem im 34ten Bande dieses Journals ausdrücklich bemerkt, aus seiner Abhandlung vom Jahre 1829 (in diesem Journal Bd. 5. S. 268) in das *Steiner*sche Werk übergegangen. Es ist daher anzunehmen, dafs *Steiner* eine andere Erledigung seiner Frage verlangt, als die erwähnte frühere Abhandlung von *Plücker* gewährt. Weder die Note von *Plücker,* noch die andern in diesem Journal enthaltenen Schriften, welche das *Pascal*sche Theorem wieder in Erinnerung bringen, berühren die interessante *Steiner*sche Frage. Ich nehme Gelegenheit, dieselbe durch Anführung einiger aus meinen Universitätsvorträgen entnommenen Sätze zu beantworten.

5. „Die 15 Geraden g entsprechen den 15 Systemen von drei Geraden, „welche sich durch die sechs Puncte des Kegelschnitts legen lassen, in „folgender Art:

   „Wenn $u=0$, $v=0$, $w=0$ die Gleichungen von drei Geraden „bedeuten, welche durch die sechs Puncte des Kegelschnitts hin-

„durchgehen, dessen Gleichung sich bekanntlich auf die Form

$$Au^2+Bv^2+Cw^2+2Fvw+2Gwu+2Huv = 0$$

„zurückführen läfst, so ist:

$$AFu+BGv+CHw = 0$$

„die Gleichung der Geraden g, welche dem Systeme von drei Ge-„raden $u=0$, $v=0$, $w=0$ zugehört."

Die drei Geraden g, welche auf diese Weise den drei geraden Seiten eines der 60 Sechsecke, den drei ungeraden Seiten desselben Sechsecks und den drei Diagonalen entsprechen, welche die gegenüberliegenden Ecken des Sechsecks verbinden, schneiden sich in einem und demselben Puncte P.

Eben so schneiden sich die drei Geraden g, welche dem ersten Paare der gegenüberliegenden Seiten des betrachteten Sechsecks und der ersten Diagonale (welche das letzte Eckenpaar des Sechsecks verbindet), dem zweiten Paare gegenüberliegender Seiten und der zweiten Diagonale, dem dritten Paare gegenüberliegender Seiten und der dritten Diagonale entsprechen, in einem und demselben Puncte p, welcher in Rücksicht auf den Kegelschnitt der harmonische Pol zu dem vorhin gedachten Puncte P ist.

6. „Wenn die Ecken von drei Dreiecken auf drei Geraden g liegen, welche „sich in einem und demselben Puncte P schneiden, so schneiden sich „die entsprechenden Seiten je zweier von diesen Dreiecken in drei „Puncten, welche auf einer Geraden γ liegen, und die drei Geraden γ „schneiden sich wieder in einem und demselben Puncte p.

In der That: wenn man durch $a=0$, $b=0$, $c=0$ die Gleichungen der Seiten des ersten Dreiecks, durch $a'=0$, $b'=0$, $c'=0$ und $a''=0$, $b''=0$, $c''=0$ die Gleichungen der Seiten des zweiten und dritten Dreiecks, endlich durch $g=0$, $g'=0$, $g''=0$ die Gleichungen der drei Geraden g bezeichnet, auf welchen die Ecken der drei Dreiecke liegen und welche sich in dem Puncte P schneiden, so lassen sich die 12 willkürlichen Constanten, welche die genannten Gleichungen als Factoren enthalten, unter den aufgestellten Bedingungen so bestimmen, dafs folgendem Systeme von Gleichungen identisch genügt wird:

$$\begin{aligned} b-c &= b'-c' = b''-c'' = g, \\ c-a &= c'-a' = c''-a'' = g', \\ a-b &= a'-b' = a''-b'' = g''; \end{aligned}$$

und umgekehrt, wenn diesem Systeme identischer Gleichungen Genüge ge-

schieht, so stellen obige Gleichungen die Seiten von drei Dreiecken dar, deren Ecken auf den drei Geraden g liegen, welche sich in einem und demselben Puncte schneiden.

Bezeichnet man nun die Ausdrücke $a'-a''$, $a''-a$, $a-a'$ respective durch γ, γ', γ'', so folgt aus dem aufgestellten Systeme identischer Gleichungen sogleich folgendes System:

$$\begin{aligned} a'-a'' &= b'-b'' = c'-c'' = \gamma, \\ a''-a &= b''-b = c''-c = \gamma', \\ a-a' &= b-b' = c-c' = \gamma'', \end{aligned}$$

dessen geometrische Deutung den angeführten Satz giebt.

Ich führe diesen Satz, dessen erster Theil bekannt ist, hier an, weil er ein Bild von der Lage der 20 Puncte P und der 15 Geraden g zu einander giebt. Die Puncte P nemlich werden durch die 9 Ecken der drei Dreiecke, durch die 9 Schnittpuncte der entsprechenden Seiten je zweier von diesen Dreiecken, und durch die Puncte P und p repräsentirt; ferner die 15 Geraden g durch die 9 Seiten der drei Dreiecke, durch die drei Geraden g, auf welchen ihre Ecken liegen, und durch die drei Geraden γ.

Die durch die 20 Puncte P und die 15 Geraden g gebildete Figur ist demnach symmetrisch: in der Art, dafs man, wie von dem Puncte P ausgehend, zu dem Puncte p gelangt, eben so in derselben Figur von dem Puncte p ausgehend zu dem Puncte P gelangen wird. Dasselbe gilt von allen 20 Puncten P. Auf diese Weise paaren sich die 20 Puncte P, und diese Punctenpaare stehen wieder zu dem Kegelschnitt in der Beziehung, welche der folgende Satz angiebt:

7. „Die 20 Puncte p bilden 10 harmonische Polenpaare des Kegelschnitts." Den aus diesem Satze durch das Princip der Reciprocität abgeleiteten Satz habe ich am Ende meiner Schrift „Über das geradlinige Sechseck auf dem Hyperboloïd" bewiesen (S. dieses Journal Bd. 24.).

Königsberg im September 1849.

19.

Über die Wendepuncte der algebraischen ebenen Curven und die Schmiegungs-Ebenen der Curven von doppelter Krümmung, welche durch den Schnitt zweier algebraischen Oberflächen entstehen.

(Von Herrn *Otto Hesse,* Professor an der Universität zu Königsberg.)

Die Gleichung der Tangente einer beliebig gegebenen ebenen Curve, so wie die Gleichung der Tangenten-Ebene einer beliebig gegebenen Oberfläche, lassen sich bekanntlich mit Hülfe der Gleichung der Curve oder Oberfläche auf einen in Rücksicht auf die Coordinaten des Berührungspuncts um 1 niedrigeren Grad zurückführen, in dem Falle, wenn die Curve oder Oberfläche algebraisch ist. Eben so kann man die Bedingungsgleichung zwischen den Coordinaten eines Puncts, welche Statt finden mufs, wenn der Punct ein Wendepunct einer gegebenen ebenen Curve sein soll, auf einen um zwei Einheiten niedrigeren Grad zurückführen; in dem Falle einer algebraischen Curve (S. dieses Journal Bd. 28. S. 104. Lehrsatz 9.).

Ich werde im Folgenden diese Transformation auf einem Wege ausführen, auf welchem man auch die mit ihr verwandte Transformation der Gleichung der Schmiegungs-Ebene einer durch den Schnitt zweier algebraischen Oberflächen erzeugten Curve doppelter Krümmung auf einen in Rücksicht auf die Coordinaten des Berührungspuncts um zwei Einheiten niedrigeren Grad erreichen kann. Die Transformation der Gleichung der Schmiegungs-Ebene wird den Gegenstand des zweiten Paragraphen bilden.

Durch die erste Transformation bestimmt man die Wendepuncte einer ebenen Curve, oder, was auf Dasselbe hinauskommt, die Berührungspuncte der Schmiegungs-Ebenen, welche sich von einem gegebenen Puncte aufserhalb der Ebene, in welcher die Curve liegt, an die Curve legen lassen. Denn die Ebenen, welche durch den gegebenen Punct und die Wendetangenten der Curve gelegt werden, sind eben Schmiegungs-Ebenen der Curve, weil sie durch drei auf einander folgende unendlich nahe Puncte der Curve hindurchgehen. Durch die zweite Transformation werden die Berührungspuncte der Schmiegungs-Ebenen bestimmt, welche durch einen gegebenen Punct an eine

Curve doppelter Krümmung gelegt werden können. Die letztere Bestimmung ist also die allgemeinere.

Ich werde im Folgenden besonders von zwei Sätzen von den Determinanten öfter Gebrauch machen, deren Beweise man in diesem Journal (Bd. 22. S. 310—312) findet. Setzt man nemlich der Kürze wegen:

$$A = \Sigma \pm a_0^0 a_1^1 \dots a_n^n, \quad B = \Sigma \pm b_0^0 b_1^1 \dots b_n^n, \quad C = \Sigma \pm c_0^0 c_1^1 \dots c_n^n.$$
$$\Gamma = \Sigma \pm c_0^0 c_1^1 \dots c_{n-1}^{n-1},$$

so ist unter der Voraussetzung, dafs

$$c_x^\lambda = a_0^x b_0^\lambda + a_1^x b_1^\lambda + \dots a_n^x b_n^\lambda,$$

wo x und λ die Zahlen 0, 1, 2, ... n bedeuten:

$$\text{(I.)} \quad C = A.B,$$

$$\text{(II.)} \quad \Gamma = \frac{\partial A}{\partial a_0^n} \cdot \frac{\partial B}{\partial b_0^n} + \frac{\partial A}{\partial a_1^n} \cdot \frac{\partial B}{\partial b_1^n} + \dots \frac{\partial A}{\partial a_n^n} \cdot \frac{\partial B}{\partial b_n^n}.$$

§. 1.

Es seien x_1, x_2, x_3 gegebene lineäre Functionen der rechtwinkligen Coordinaten eines beliebig gegebenen Puncts p in der Ebene. Ich werde jene drei Functionen, durch deren Verhältnisse die rechtwinkligen Coordinaten des Puncts p bestimmt sind und deren Werthe wiederum durch die rechtwinkligen Coordinaten des Puncts bestimmt werden, die Coordinaten des erwähnten Puncts nennen. Es sei ferner u eine beliebig gegebene homogene ganze Function $n$ten Grades von den Coordinaten x_1, x_2, x_3. Aus den partiellen Differentialquotienten u_1, u_2, u_3 dieser Function, nach den drei Coordinaten genommen, und den sechs beliebig gewählten constanten Gröfsen a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3, setze ich die Determinante

$$\text{(1.)} \quad B = \begin{vmatrix} u_1, & u_2, & u_3 \\ a_1, & a_2, & a_3 \\ b_1, & b_2, & b_3 \end{vmatrix}$$

zusammen und bestimme die Coordinaten x_1, x_2, x_3 als Functionen der unabhängigen Variable t durch die simultanen Differentialgleichungen

$$\text{(2.)} \quad \frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial B}{\partial b_1}, \quad \frac{dx_2}{\partial t} = \frac{\partial B}{\partial b_2}, \quad \frac{\partial x_3}{\partial t} = \frac{\partial B}{\partial b_3}.$$

Durch Integration erhält man folgende beide Gleichungen mit den willkürlichen Constanten a und b:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = a, \quad u = b.$$

Das dritte Integral führt die dritte willkürliche Constante durch das $+$ Zeichen mit der unabhängigen Variable t verbunden ein. Da nun durch die Differentialgleichungen (2.) die Coordinaten noch nicht vollständig als Functionen von t bestimmt sind, so will ich $b = 0$ setzen und die beiden andern willkürlichen Constanten gleich beliebig gegebenen Gröfsen annehmen. Durch diese Bestimmungen wird der Punct p in eine durch die Gleichung

$$(3.)\qquad u = 0$$

gegebene Curve $n$ter Ordnung verlegt, und man erhält die Coordinaten aller Puncte dieser Curve, wenn man den unabhängigen Variabeln t alle nur möglichen Werthe giebt. Die Coordinaten dreier unendlich nahe aufeinander folgender Puncte der Curve sind nun:

$$\begin{array}{lll} x_1, & x_2, & x_3, \\ x_1+dx_1, & x_2+dx_2, & x_3+dx_3, \\ x_1+2dx_1+d^2x_1, & x_2+2dx_2+d^2x_2, & x_3+2dx_3+d^2x_3. \end{array}$$

Setzt man die Determinante R, gebildet aus diesen Gröfsen, oder, was dasselbe ist

$$(4.)\qquad R = \begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \\ dx_1, & dx_2, & dx_3 \\ d^2x_1, & d^2x_2, & d^2x_3 \end{vmatrix}$$

gleich 0, so erhält man die Bedingungsgleichung:

$$(5.)\qquad R = 0,$$

welche die Coordinaten des Puncts p der Curve $u = 0$ zu erfüllen haben, wenn die ihm unendlich nahe gelegenen nächstfolgenden beiden Puncte der Curve mit ihm in einer und derselben geraden Linie liegen sollen, d. h. wenn der Punct p ein Wendepunct der Curve ist.

Die Determinante R werde ich nun durch die Coordinaten des Puncts p ausdrücken. Zu diesem Zwecke dienen die folgenden Gleichungen, welche aus den Gleichungen $u = 0$ und $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = a$ durch Differentiation hervorgehen:

$$(6.)\quad \begin{cases} u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0, & a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0, \\ u_1dx_1 + u_2dx_2 + u_3dx_3 = 0, & a_1dx_1 + a_2dx_2 + a_3dx_3 = 0, \\ u_1d^2x_1 + u_2d^2x_2 + u_3d^2x_3 = -U, & a_1d^2x_1 + a_2d^2x_2 + a_3d^2x_3 = 0, \end{cases}$$

wo U die Bedeutung

$$(7.)\quad U = u_{11}dx_1^2 + u_{22}dx_2^2 + u_{33}dx_3^2 + 2u_{23}dx_2dx_3 + 2u_{31}dx_3dx_1 + 2u_{12}dx_1dx_2$$

hat und $u_{11}, u_{22}, \dots$ die zweiten partiellen Differentialquotienten der Function u bezeichnen.

Multiplicirt man die Gleichungen (2.) respective mit $b_1 dt$, $b_2 dt$, $b_3 dt$ und addirt, so erhält man:

$$b_1 dx_1 + b_2 dx_2 + b_3 dx_3 = B\,dt.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit R und bemerkt, dafs nach Satz (I.) $B.R = -Ua(b_1 dx_1 + b_2 dx_2 + b_3 dx_3)$ ist, so geht dieselbe in

$$(8.) \qquad R = -Ua\,dt$$

über. Nun ist aber nach (7.)

$$\begin{aligned} \frac{U}{dt^2} = & \left\{u_{11}\frac{dx_1}{dt} + u_{12}\frac{dx_2}{dt} + u_{13}\frac{dx_3}{dt}\right\}\frac{dx_1}{dt} \\ & + \left\{u_{21}\frac{dx_1}{dt} + u_{22}\frac{dx_2}{dt} + u_{23}\frac{dx_3}{dt}\right\}\frac{dx_2}{dt} \\ & + \left\{u_{31}\frac{dx_1}{dt} + u_{32}\frac{dx_2}{dt} + u_{33}\frac{dx_3}{dt}\right\}\frac{dx_3}{dt}. \end{aligned}$$

Setzt man in diese Gleichung für $\frac{dx_1}{dt}$, $\frac{dx_2}{dt}$, $\frac{dx_3}{dt}$ die Werthe aus (2.) und bezeichnet durch G_1, G_2, G_3 die Determinanten

$$(9.) \quad G_1 = \begin{vmatrix} u_1, & u_2, & u_3 \\ a_1, & a_2, & a_3 \\ u_{11}, & u_{12}, & u_{13} \end{vmatrix}, \quad G_2 = \begin{vmatrix} u_1, & u_2, & u_3 \\ a_1, & a_2, & a_3 \\ u_{21}, & u_{22}, & u_{23} \end{vmatrix}, \quad G_3 = \begin{vmatrix} u_1, & u_2, & u_3 \\ a_1, & a_2, & a_3 \\ u_{31}, & u_{32}, & u_{33} \end{vmatrix},$$

so läfst sich jene Gleichung wie folgt darstellen:

$$(10.) \qquad \frac{U}{dt^2} = G_1\frac{\partial B}{\partial b_1} + G_2\frac{\partial B}{\partial b_2} + G_3\frac{\partial B}{\partial b_3}.$$

Dieser Ausdruck von $\frac{U}{dt^2}$ ist in Rücksicht auf die Coordinaten des Puncts p vom Grade $3n-4$. Ich werde demselben eine solche Form geben, dafs man sieht, wie er mit Hülfe der Gleichung der Curve $u=0$ auf den Grad $3(n-2)$ zurückgeführt werden kann.

Um die drei Determinanten G_1, G_2, G_3 zu transformiren, stelle ich folgende Gleichungen auf:

$$(11.) \quad \begin{cases} (n-1)u_1 = u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + u_{13}x_3, \\ (n-1)u_2 = u_{21}x_1 + u_{22}x_2 + u_{23}x_3, \\ (n-1)u_3 = u_{31}x_1 + u_{32}x_2 + u_{33}x_3, \end{cases}$$

$$(12.) \quad \begin{cases} \Delta x_1 = (n-1)\{U_{11}u_1 + U_{12}u_2 + U_{13}u_3\}, \\ \Delta x_2 = (n-1)\{U_{21}u_1 + U_{22}u_2 + U_{23}u_3\}, \\ \Delta x_3 = (n-1)\{U_{31}u_1 + U_{32}u_2 + U_{33}u_3\}. \end{cases}$$

Die drei ersten dieser Gleichungen drücken die bekannte Eigenschaft der homogenen Functionen u_1, u_2, u_3 aus. Die drei letzten stellen die Auflösungen der drei ersten Gleichungen dar, wenn man die in ihnen explicite vorkommenden Gröfsen x_1, x_2, x_3 als die Unbekannten ansieht. Demnach ist die Determinante

$$(13.)\qquad \varDelta = \begin{vmatrix} u_{11}, & u_{12}, & u_{13} \\ u_{21}, & u_{22}, & u_{23} \\ u_{31}, & u_{32}, & u_{33} \end{vmatrix}$$

homogen und vom Grade $3(n-2)$ in Rücksicht auf die Coordinaten x_1, x_2, x_3; und die Coëfficienten $U_{\varkappa\lambda}$ in dem Systeme Gleichungen (12.) sind ebenfalls homogene Functionen vom Grade $2(n-2)$.

Zu dem genannten Zwecke führe ich ferner die Gröfsen α_1, α_2, α_3 ein, welche durch das folgende System von Gleichungen definirt werden:

$$(14.)\qquad \begin{cases} (n-1)a_1 = u_{11}\alpha_1 + u_{12}\alpha_2 + u_{13}\alpha_3, \\ (n-1)a_2 = u_{21}\alpha_1 + u_{22}\alpha_2 + u_{23}\alpha_3, \\ (n-1)a_3 = u_{31}\alpha_1 + u_{32}\alpha_2 + u_{33}\alpha_3, \end{cases}$$

aus welchen sich wiederum durch Auflösung

$$(15.)\qquad \begin{cases} \varDelta\alpha_1 = (n-1)\{U_{11}a_1 + U_{12}a_2 + U_{13}a_3\}, \\ \varDelta\alpha_2 = (n-1)\{U_{21}a_1 + U_{22}a_2 + U_{23}a_3\}, \\ \varDelta\alpha_3 = (n-1)\{U_{31}a_1 + U_{32}a_2 + U_{33}a_3\} \end{cases}$$

ergiebt. Setzt man nun in die Determinante G_1 für u_1, u_2, u_3 die Werthe aus (10.) und für a_1, a_2, a_3 die Werthe aus (14.), so geht dieselbe in die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{n-1}(u_{11}x_1+u_{12}x_2+u_{13}x_3), & \frac{1}{n-1}(u_{21}x_1+u_{22}x_2+u_{23}), & \frac{1}{n-1}(u_{31}x_1+u_{32}x_2+u_{33}x_3) \\ \frac{1}{n-1}(u_{11}\alpha_1+u_{12}\alpha_2+u_{13}\alpha_3), & \frac{1}{n-1}(u_{21}\alpha_1+u_{22}\alpha_2+u_{23}), & \frac{1}{n-1}(u_{31}\alpha_1+u_{32}\alpha_2+u_{33}\alpha_3) \\ u_{11} & u_{12} & u_{13} \end{vmatrix}$$

über. Diese Determinante ist aber nach Satz I. gleich dem Product

$$\frac{1}{(n-1)^2}\begin{vmatrix} u_{11}, & u_{12}, & u_{13} \\ u_{21}, & u_{22}, & u_{23} \\ u_{31}, & u_{32}, & u_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3 \\ 1, & 0, & 0 \end{vmatrix};$$

und wenn man die Determinante durch C bezeichnet, so dafs

$$(16.)\qquad C = \begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3 \\ c_1, & c_2, & c_3 \end{vmatrix},$$

so wird das genannte Product gleich

$$(17.) \quad \frac{1}{(n-1)^2}\Delta\frac{\partial C}{\partial c_1} = G_1.$$

Auf diese Weise stellen sich die transformirten Determinanten G_1, G_2, G_3 wie folgt dar:

$$(18.) \quad G_1 = \frac{\Delta}{(n-1)^2}\frac{\partial C}{\partial c_1}, \quad G_2 = \frac{\Delta}{(n-1)^2}\frac{\partial C}{\partial c_2}, \quad G_3 = \frac{\Delta}{(n-1)^2}\frac{\partial C}{\partial c_3}.$$

Setzt man diese Werthe der Determinanten in (10.), so erhält man

$$(19.) \quad \frac{U}{dt^2} = \frac{\Delta}{(n-1)^2}\left\{\frac{\partial B}{\partial b_1}\frac{\partial C}{\partial c_1}+\frac{\partial B}{\partial b_2}\frac{\partial C}{\partial c_2}+\frac{\partial B}{\partial b_3}\frac{\partial C}{\partial c_3}\right\}.$$

Hieraus ergiebt sich nun mit Anwendung des Satzes (II.):

$$\frac{U}{dt^2} = \frac{\Delta}{(n-1)^2}\begin{vmatrix}(u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3)(u_1\alpha_1+u_2\alpha_2+u_3\alpha_3)\\(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)(a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+a_3\alpha_3)\end{vmatrix}.$$

Es ist aber, wie aus den aufgestellten Gleichungen zu sehen:

$$\begin{aligned}u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3 &= nu\\ a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3 &= a,\\ u_1\alpha_1+u_2\alpha_2+u_3\alpha_3 &= a,\\ a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+a_3\alpha_3 &= \frac{(n-1)D}{\Delta},\end{aligned}$$

wenn man der Kürze wegen

$$(20.) \quad D = U_{11}a_1^2+U_{22}a_2^2+U_{33}a_3^2+2U_{23}a_2a_3+2U_{31}a_3a_1+2U_{12}a_1a_2$$

setzt. Mithin wird:

$$(21.) \quad \frac{U}{\partial t^2} = \frac{\Delta}{(n-1)^2}\begin{vmatrix}nu, & a\\ a, & \frac{(n-1)D}{\Delta}\end{vmatrix} = \frac{n}{n-1}Du-\frac{a^2\Delta}{(n-1)^2}.$$

Setzt man diesen Werth von U in (8.), so erhält man:

$$(22.) \quad R = a\left(\frac{a^2\Delta}{(n-1)^2}-\frac{n}{n-1}Du\right)dt^3.$$

Da aber $u=0$ ist, so reducirt sich die Gleichung $R=0$, welche in Rücksicht auf die Coordinaten vom Grade $3n-4$ ist, auf die Gleichung

$$(23.) \quad \Delta = 0$$

vom $3(n-2)$ten Grade.

Dieses ist die gesuchte Bedingungsgleichung, welche die Coordinaten eines Puncts der Curve $u=0$ erfüllen müssen, wenn der Punct ein Wendepunct der Curve sein soll.

§. 2.

Es seien x_1, x_2, x_3, x_4 gegebene lineäre Functionen der rechtwinkligen Coordinaten eines beliebig gegebenen Puncts p im Raume. Es seien ferner y_1, y_2, y_3, y_4 dieselben lineären Functionen der rechtwinkligen Coordinaten eines beliebigen andern Puncts q. Diese gegebenen lineären Functionen der Coordinaten werde ich die Coordinaten der Puncte p und q nennen. Durch u und v bezeichne ich zwei beliebige homogene ganze Functionen der Coordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 des Puncts p, respective von den Graden n und m, aus deren partiellen Differentialquotienten u_1, u_2, u_3, u_4 und v_1, v_2, v_3, v_4, nach den Coordinaten des Puncts p genommen, und den 8 beliebig gewählten constanten Gröfsen a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4 ich folgende Determinante B zusammensetze:

$$(1.)\qquad B = \begin{vmatrix} u_1, & u_2, & u_3, & u_4 \\ v_1, & v_2, & v_3, & v_4 \\ a_1, & a_2, & a_3, & a_4 \\ b_1, & b_2, & b_3, & b_4 \end{vmatrix}.$$

Die Coordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 des Puncts p bestimme ich als Functionen der unabhängigen Variablen t durch die Differentialgleichungen

$$(2.)\qquad \frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial B}{\partial b_1},\quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{\partial B}{\partial b_2},\quad \frac{dx_3}{dt} = \frac{\partial B}{\partial b_3},\quad \frac{dx_4}{dt} = \frac{\partial B}{db_4}.$$

In den drei Integralgleichungen

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = a,$$
$$u = b,\quad v = c$$

dieses Systems von Differentialgleichungen setze ich die willkürlichen Constanten a gleich einer beliebig gegebenen Gröfse b, und c gleich 0. Die vierte Integralgleichung führt die willkürliche Constante, der ich einen beliebigen, aber festen Werth geben will, mit der unabhängigen Variable t durch das $+$ Zeichen verbunden ein. Durch diese Bestimmungen rückt der beliebige Punct p in die Curve doppelter Krümmung, in welcher sich die durch die Gleichungen

$$(3.)\qquad u = 0,\quad v = 0$$

gegebenen Oberflächen $n$ter und $m$ter Ordnung schneiden, und man erhält die Coordinaten aller Puncte dieser Curven, wenn man der unabhängigen Variablen t alle nur möglichen Werthe giebt.

Die Coordinaten des beliebigen Punctes q und dreier unendlich nahe auf einander folgender Puncte der genannten Curve doppelter Krümmung sind nun:

$$\begin{array}{llll} y_1, & y_2, & y_3, & y_4 \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4, \\ x_1+dx_1, & x_2+dx_2, & x_3+dx_3, & x_4+dx_4, \\ x_1+2dx_1+d^2x_1, & x_2+2dx_2+d^2x_2, & x_3+2dx_3+d^2x_3, & x_4+2dx_4+d^2x_4. \end{array}$$

Setzt man die Determinante R, gebildet aus diesen Gröfsen, oder, was dasselbe ist, die Determinante

$$(4.)\quad R = \begin{vmatrix} y_1, & y_2, & y_3, & y_4 \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \\ dx_1, & dx_2, & dx_3, & dx_4 \\ d^2x_1, & d^2x_2, & d^2x_3, & d^2x_4 \end{vmatrix}$$

gleich 0, so erhält man, wenn man den Punct q mit seinen Coordinaten als variabel betrachtet, die Gleichung

$$(5.)\quad R = 0$$

der Schmiegungs-Ebene in dem Puncte p der Curve doppelter Krümmung.

Um R zu transformiren, dienen folgende Gleichungen, welche sich aus den Gleichungen $u=0$, $v=0$, $a_1x_1+a_2x_2 \dots a_4x_4 = a$ ergeben:

$$(6.)\quad \begin{cases} u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0, \\ u_1dx_1 + u_2dx_2 + u_3dx_3 + u_4dx_4 = 0, \\ u_1d^2x_1+u_2d^2x_2+u_3d^2x_3+u_4d^2x_4 = -U; \\ v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3 + v_4x_4 = 0, \\ v_1dx_1 + v_2dx_2 + v_3dx_3 + v_4dx_4 = 0, \\ v_1d^2x_1+v_2d^2x_2+v_3d^2x_3+v_4d^2x_4 = -V; \\ a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = a, \\ a_1dx_1 + a_2dx_2 + a_3dx_3 + a_4dx_4 = 0, \\ a_1d^2x_1+a_2d^2x_2+a_3d^2x_3+a_4d^2x_4 = 0; \end{cases}$$

wo U und V die Bedeutung

$$(7.)\quad \begin{cases} U = u_{11}dx_1^2+u_{22}dx_2^2+u_{33}dx_3^2+u_{44}dx_4^2+2u_{12}dx_1dx_2+2u_{13}dx_1dx_3 \\ \qquad +2u_{14}dx_1dx_4+2u_{23}dx_2dx_3+2u_{24}dx_2dx_4+2u_{34}dx_3dx_4, \\ V = v_{11}dx_1^2+v_{22}dx_2^2+v_{33}dx_3^2+v_{44}dx_4^2+2v_{12}dx_1dx_2+2v_{13}dx_1dx_3 \\ \qquad +2v_{14}dx_1dx_4+2v_{23}dx_2dx_3+2v_{24}dx_2dx_4+2v_{34}dx_3dx_4 \end{cases}$$

haben und u_{11}, u_{22} ... und v_{11}, v_{22} ... die zweiten partiellen Differentialquotienten der Functionen u und v sind, nach den Coordinaten des Puncts p genommen.

Multiplicirt man die Gleichungen (2.) respective mit b_1dt, b_2dt, b_3dt, b_4dt und addirt, so erhält man:

$$b_1dx_1+b_2dx_2+b_3dx_3+b_4dx_4 = Bdt.$$

Es ist aber nach Satz (I.)

$$B.R = (b_1 dx_1 + b_2 dx_2 \ldots)\{(Uv_1 - Vu_1)y_1 + (Uv_2 - Vu_2)y_2 + (Uv_3 - Vu_3)y_3 + (Uv_4 - Vu_4)y_4\}a.$$

Multiplicirt man daher diese Gleichung mit der vorhergehenden, so erhält man, mit Übergehung der gleichen Factoren auf beiden Seiten,

$$(8.)\quad R = \{(Uv_1 - Vu_1)y_1 + (Uv_2 - Vu_2)y_2 + (Uv_3 - Vu_3)y_3 + (Uv_4 - Vu_4)y_4\}a\,dt.$$

Diese Form von R zeigt, dafs $R = 0$ die Gleichung einer Ebene ist, welche durch die Schnittlinie der in dem Puncte p an die beiden Oberflächen $u = 0$, $v = 0$ gelegten Tangenten-Ebenen hindurchgeht. Denn man erhält alle möglichen Ebenen, welche durch die genannte Schnittlinie, d. i. die Tangente der Curve doppelter Krümmung, hindurchgehen, wenn man in der Gleichung $R = 0$ den Gröfsen U und V beliebige Werthe giebt. Unter diesen Ebenen befindet sich auch die Schmiegungs-Ebene der Curve doppelter Krümmung und diese entpricht eben den in (7.) angegebenen Werthen von U und V. Es bleibt daher noch übrig, diese Werthe von U und V durch die Coordinaten des Puncts p auszudrücken. Zu diesem Zwecke setze ich in dem Ausdrucke von $\frac{U}{dt^2}$, der sich auch so darstellen läfst:

$$\begin{aligned}\frac{U}{dt^2} = &\left(u_{11}\frac{dx_1}{dt} + u_{12}\frac{dx_2}{dt} + u_{13}\frac{dx_3}{dt} + u_{14}\frac{dx_4}{dt}\right)\frac{dx_1}{dt}\\ &+\left(u_{21}\frac{dx_1}{dt} + u_{22}\frac{dx_2}{dt} + u_{23}\frac{dx_3}{dt} + u_{24}\frac{dx_4}{dt}\right)\frac{dx_2}{dt}\\ &+\left(u_{31}\frac{dx_1}{dt} + u_{32}\frac{dx_2}{dt} + u_{33}\frac{dx_3}{dt} + u_{34}\frac{dx_4}{dt}\right)\frac{dx_3}{dt}\\ &+\left(u_{41}\frac{dx_1}{dt} + u_{42}\frac{dx_2}{dt} + u_{43}\frac{dx_3}{dt} + u_{44}\frac{dx_4}{dt}\right)\frac{dx_4}{dt},\end{aligned}$$

die Werthe von $\frac{dx_1}{dt}$, $\frac{dx_2}{dt}$, ... aus (2.). Hiedurch geht derselbe, wenn man durch G_1, G_2, G_3, G_4 die Determinanten bezeichnet, so dafs:

$$(9.)\quad G_1 = \begin{vmatrix} u, & u_2, & u_3, & u_4 \\ v_1, & v_2, & v_3, & v_4 \\ a_1, & a_2, & a_3, & a_4 \\ u_{11}, & u_{12}, & u_{13}, & u_{14} \end{vmatrix}, \quad G_2 = \begin{vmatrix} u_1, & u_2, & u_3, & u_4 \\ v_1, & v_2, & v_3, & v_4 \\ a_1, & a_2, & a_3, & a_4 \\ u_{21}, & u_{22}, & u_{23}, & u_{24} \end{vmatrix}$$

$$G_3 = \begin{vmatrix} u_1, & u_2, & u_3, & u_4 \\ v_1, & v_2, & v_3, & v_4 \\ a_1, & a_2, & a_3, & a_4 \\ u_{31}, & u_{32}, & u_{33}, & u_{34} \end{vmatrix}, \quad G_4 = \begin{vmatrix} u_1, & u_2, & u_3, & u_4 \\ v_1, & v_2, & v_3, & v_4 \\ a_1, & a_2, & a_3, & a_4 \\ u_{41}, & u_{42}, & u_{43}, & u_{44} \end{vmatrix}$$

ist, in

$$(10.)\qquad \frac{U}{dt^2} = G_1\frac{\partial B}{\partial b_1}+G_2\frac{\partial B}{\partial b_2}+G_3\frac{\partial B}{\partial b_3}+G_4\frac{\partial B}{\partial b_4}\quad\text{über.}$$

Dieser Ausdruck von $\frac{U}{dt^2}$ ist vom Grade $3n+2m-6$ in Rücksicht auf die Coordinaten des Puncts p. Ich werde demselben jetzt eine solche Form geben, dafs man sehen kann, wie er sich mit Hülfe der Gleichungen $u=0$ und $v=0$ auf den Grad $3n+2m-8$ reducirt. Dies wird erreicht werden durch Benutzung der folgenden Systeme von Gleichungen:

$$(11.)\qquad \begin{cases}(n-1)u_1 = u_{11}x_1+u_{12}x_2+u_{13}x_3+u_{14}x_4,\\(n-1)u_2 = u_{21}x_1+u_{22}x_2+u_{23}x_3+u_{24}x_4,\\(n-1)u_3 = u_{31}x_1+u_{32}x_2+u_{33}x_3+u_{34}x_4,\\(n-1)u_4 = u_{41}x_1+u_{42}x_2+u_{43}x_3+u_{44}x_4.\end{cases}$$

$$(12.)\qquad \begin{cases}\Delta x_1 = (n-1)\{U_{11}u_1+U_{12}u_2+U_{13}u_3+U_{14}u_4\},\\\Delta x_2 = (n-1)\{U_{21}u_1+U_{22}u_2+U_{23}u_3+U_{24}u_4\},\\\Delta x_3 = (n-1)\{U_{31}u_1+U_{32}u_2+U_{33}u_3+U_{34}u_4\},\\\Delta x_4 = (n-1)\{U_{41}u_1+U_{42}u_2+U_{43}u_3+U_{44}u_4\}.\end{cases}$$

Von diesen Gleichungen drückt das erste System die bekannte Eigenschaft der homogenen Functionen $u_1, u_2, \dots$ aus; das letzte ist die Auflösung des ersten nach den in ihm explicite vorkommenden Unbekannten, und Δ ist, wie bekannt, die Determinante

$$(13.)\qquad \Delta = \begin{vmatrix}u_{11}, & u_{12}, & u_{13}, & u_{14}\\u_{21}, & u_{22}, & u_{23}, & u_{24}\\u_{31}, & u_{32}, & u_{33}, & u_{34}\\u_{41}, & u_{42}, & u_{43}, & u_{44}\end{vmatrix}.$$

Ich führe ferner vier neue Gröfsen $\beta_1, \beta_2, \dots$ ein, welche durch die folgenden Gleichungen definirt werden:

$$(14.)\qquad \begin{cases}(n-1)v_1 = u_{11}\beta_1+u_{12}\beta_2+u_{13}\beta_3+u_{14}\beta_4,\\(n-1)v_2 = u_{21}\beta_1+u_{22}\beta_2+u_{23}\beta_3+u_{24}\beta_4,\\\dots\dots\dots\dots\end{cases}$$

und löse diese Gleichungen nach den Unbekannten $\beta_1, \beta_2, \dots$ auf. Dies giebt

$$(15.)\qquad \begin{cases}\Delta\beta_1 = (n-1)\{U_{11}v_1+U_{12}v_2+U_{13}v_3+U_{14}v_4\},\\\Delta\beta_2 = (n-1)\{U_{21}v_1+U_{22}v_2+U_{23}v_3+U_{24}v_4\},\\\dots\dots\dots\dots\end{cases}$$

Endlich bestimme ich vier Gröfsen $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ von der Art, dafs sie den Gleichungen

$$(16.)\quad \begin{cases} (n-1)a_1 = u_{11}\alpha_1 + u_{12}\alpha_2 + u_{13}\alpha_3 + u_{14}\alpha_4, \\ (n-1)a_2 = u_{21}\alpha_1 + u_{22}\alpha_2 + u_{23}\alpha_3 + u_{24}\alpha_4, \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

genügen, und löse diese Gleichungen nach den Unbekannten α_1, α_2 auf. Dies giebt:

$$(17.)\quad \begin{cases} \Delta\alpha_1 = (n-1)\{U_{11}a_1 + U_{12}a_2 + U_{13}a_3 + U_{14}a_4\}, \\ \Delta\alpha_2 = (n-1)\{U_{21}a_1 + U_{22}a_2 + U_{23}a_3 + U_{24}a_4\}, \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Die aufgestellten Gleichungen dienen nun zur Transformation der Determinanten G_1, G_2, ... Denn man wird finden, dafs die erste dieser Determinanten, wenn man darin für u_1, u_2, ... die Werthe aus (11.), für v_1, v_2, ... die Werthe aus (14.) und für a_1, a_2, ... die Werthe aus (16.) setzt, nach Satz (I.) in das Product

$$\frac{\Delta}{(n-1)^3}\cdot\begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \\ \beta_1, & \beta_2, & \beta_3, & \beta_4 \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, & \alpha_4 \\ 1, & 0, & 0, & 0 \end{vmatrix}$$

zerfällt, so dafs, wenn man durch C die Determinante bezeichnet, nemlich

$$(18.)\quad C = \begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \\ \beta_1, & \beta_2, & \beta_3, & \beta_4 \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, & \alpha_4 \\ c_1, & c_2, & c_3, & c_4 \end{vmatrix}:$$

$$\frac{\Delta}{(n-1)^3}\frac{\partial C}{\partial c_1} = G_1 \text{ ist.}$$

Auf diese Weise stellen sich die transformirten Determinanten wie folgt dar:

$$(19.)\quad \begin{cases} G_1 = \dfrac{\Delta}{(n-1)^3}\dfrac{\partial C}{\partial c_1}, & G_2 = \dfrac{\Delta}{(n-1)^3}\dfrac{\partial C}{\partial c_2}, \\ G_3 = \dfrac{\Delta}{(n-1)^3}\dfrac{\partial C}{\partial c_3}, & G_4 = \dfrac{\Delta}{(n-1)^3}\dfrac{\partial C}{\partial c_4}. \end{cases}$$

Setzt man diese Werthe von G_1, G_2, ... in (10.), so ergiebt sich

$$(20.)\quad \frac{U}{dt^2} = \frac{\Delta}{(n-1)^3}\left\{\frac{\partial B}{\partial b_1}\frac{\partial C}{\partial c_1} + \frac{\partial B}{\partial b_2}\frac{\partial C}{\partial c_2} + \frac{\partial B}{\partial b_3}\frac{\partial C}{\partial c_3} + \frac{\partial B}{\partial b_4}\frac{\partial C}{\partial c_4}\right\};$$

woraus mit Anwendung des Satzes (II.):

$$(21.)\quad \frac{U}{dt^2} = \frac{\Delta}{(n-1)^3}\begin{vmatrix} u_1x_1 + u_2x_2 + \cdots & u_1\beta_1 + u_2\beta_2 + \cdots & u_1\alpha_1 + u_2\alpha_2 + \cdots \\ v_1x_1 + v_2x_2 + \cdots & v_1\beta_1 + v_2\beta_2 + \cdots & v_1\alpha_1 + v_2\alpha_2 + \cdots \\ a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots & a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \cdots & a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots \end{vmatrix}$$

folgt. Setzt man nun, um abzukürzen,

$$(22.)\quad \begin{cases} M = U_{11}a_1^2 + U_{22}v_2^2 + \cdots \\ N = (U_{11}v_1 + U_{12}v_2 + \cdots)a_1 + \cdots \\ P = U_{11}v_1^2 + U_{22}v_2^2 + U_{33}v_3^2 + U_{44}v_4^2 + 2U_{12}v_1v_2 + 2U_{13}v_1v_3 \\ \qquad + 2U_{14}v_1v_4 + 2U_{23}v_2v_3 + 2U_{24}v_2v_4 + 2U_{34}v_3v_4, \end{cases}$$

so läfst sich die Gleichung (21.) wie folgt darstellen:

$$(23.)\quad \frac{U}{dt^2} = \frac{\Delta}{(n-1)^2}\begin{vmatrix} nu, & mv, & a \\ mv, & \frac{(n-1)}{\Delta}P, & \frac{(n-1)}{\Delta}N \\ a, & \frac{(n-1)}{\Delta}N, & \frac{(n-1)}{\Delta}M \end{vmatrix}.$$

Da aber $u=0$ und $v=0$ ist, so wird:

$$(24.)\quad \frac{U}{dt^2} = -\frac{a^2P}{(n-1)^2},$$

welches der gesuchte Ausdruck von $\frac{U}{\partial t^2}$ ist; vom Grade $3n+2m-8$ in Rücksicht auf die Coordinaten des Puncts p der Curve doppelter Krümmung.

Auf dieselbe Weise wird sich auch der Ausdruck $\frac{V}{dt^2}$ transformiren lassen, was

$$(25.)\quad \frac{V}{dt^2} = -\frac{a^2Q}{(m-1)^2}$$

giebt, wo Q eine homogene Function der Coordinaten des Puncts p vom Grade $3m+2n-8$ bedeutet, die man aus dem in (22.) angegebenen Ausdrucke von P erhält, wenn man die Functionen u und v mit einander vertauscht.

Setzt man endlich diese Werthe von U und V in den in (8.) gegebenen Ausdruck für R, *so nimmt die Gleichung der Schmiegungs-Ebene der Curve doppelter Krümmung, in welcher sich die Oberflächen* $u=0$ *und* $v=0$ *schneiden, folgende einfache Gestalt an:*

$$(26.)\quad \frac{Q}{(m-1)^2}(u_1y_1 + u_2y_2 + u_3y_3 + u_4y_4) \\ - \frac{P}{(n-1)^2}(v_1y_1 + v_2y_2 + v_3y_3 + v_4y_4) = 0.$$

Diese Gleichung der Schmiegungs-Ebene ist vom Grade $3(n+m-3)$ in Rücksicht auf die Coordinaten des Berührungspuncts p. Nimmt man in ihr die Coordinaten des Puncts q als gegeben an, läfst dagegen die Coordinaten des Puncts p beliebig variiren, so stellt die Gleichung (26.) eine Oberfläche

von der $3(n+m-3)$ten Ordnung dar, welche die gegebene Curve doppelter Krümmung in solchen Puncten schneidet, deren Schmiegungs-Ebenen durch den gegebenen Punct q hindurchgehen. Hieraus ergiebt sich folgender Lehrsatz:

An eine Curve doppelter Krümmung, welche durch den Schnitt einer Oberfläche $n$ter und einer Oberfläche $m$ter Ordnung entstanden ist, lassen sich von einem beliebigen Puncte aufserhalb der Curve $3nm(n+m-3)$ Schmiegungs-Ebenen legen, und die Berührungspuncte liegen auf einer Oberfläche von der $3(n+m-3)$ten Ordnung.

Demnach lassen sich von einem beliebigen Puncte q an eine Curve doppelter Krümmung, in welcher sich zwei Oberflächen zweiter Ordnung schneiden, zwölf Schmiegungs-Ebenen legen. Die Centralprojection einer solchen Curve doppelter Krümmung auf eine beliebige Ebene ist bekanntlich eine Curve vierter Ordnung. Ihre Wendepuncte sind die Projectionen der Berührungspuncte der zwölf Schmiegungs-Ebenen, welche sich durch das Centrum der Projection an die Curve doppelter Krümmung legen lassen. Eine Curve vierter Ordnung hat aber im Allgemeinen 24 Wendepuncte. Daraus folgt, dafs die Projection der Curve doppelter Krümmung nicht eine allgemeine Curve vierter Ordnung sein kann. Sie hat in der That zwei Doppelpuncte. Um diese zu finden, lege ich durch die Curve doppelter Krümmung eine Oberfläche zweiter Ordnung, welche zugleich durch das Centrum der Projection hindurchgeht. Von den beiden geraden Linien, welche sich auf dieser Oberfläche durch das Centrum der Projection legen lassen, schneidet jede die Curve doppelter Krümmung in zwei Puncten, und die Schnittpuncte dieser beiden geraden Linien mit der Projections-Ebene werden die gesuchten Doppelpuncte sein. Da nun, wie ***Plücker*** richtig bemerkt hat, immer sechs Wendepuncte einer ebenen Curve in einen Doppelpunct fallen, so verschwinden von den 24 Wendepuncten der projicirten Curve vierter Ordnung zwölf, und es bleiben nur die oben erwähnten 12 Wendepuncte übrig.

Königsberg im November 1849.

20.

Über die ganzen homogenen Functionen von der dritten und vierten Ordnung zwischen drei Variabeln.

(Von Herrn Dr. *Otto Hesse*, Professor an der Universität zu Königsberg.)

Im 36ten Bande dieses Journals S. 172 habe ich eine Eliminationsmethode auseinandergesetzt, um eine in Punctcoordinaten gegebene Gleichung einer Curve dritter Ordnung durch Liniencoordinaten auszudrücken. Diese Methode hat, wie ich sehe, *Cayley* im Märzhefte des Cambridger Mathematischen Journals vom Jahre 1846 bekannt gemacht und zugleich, nicht ohne Mühe und Kunst, das Resultat der Elimination in seine einfachsten Bestandtheile aufgelöset. Die Methode besteht in der Zurückführung des Problems auf die Elimination von 7 Unbekannten aus 7 linearen homogenen Gleichungen. Einer Ausdehnung auf die Curven vierter Ordnung scheint dieselbe nicht fähig zu sein. Ich werde daher im Folgenden ein anderes, nicht weniger symmetrisches Eliminationsverfahren entwickeln, welches sich mit gleicher Leichtigkeit auf Curven dritter und vierter Ordnung anwenden läfst, und überdies noch den Vortheil hat, dafs man bei Curven dritter Ordnung das Endresultat durch Elimination von nur vier Unbekannten aus vier linearen homogenen Gleichungen erhält. Dieses Eliminationsverfahren steht in dem erwähnten Falle zu dem *Cayley*schen in demselben Verhältnifs, wie das *Jacobi*sche Eliminationsverfahren für zwei Gleichungen mit einer Unbekannten zu dem *Sylvester*schen, indem auch hier von der zum Theil schon vollführten Elimination ausgegangen wird.

Ich schicke zwei allgemeine Sätze voran, von denen ich im Folgenden Gebrauch machen werde.

§. 1.

Wenn n homogene ganze Functionen von n Variabeln für ein System von Werthen der Variabeln verschwinden, so verschwinden für dieses System von Werthen nicht allein die Determinante der n Functionen, sondern auch ihre nach den Variabeln genommenen ersten partiellen Differentialquotienten.

Wenn $u_1, u_2, u_3, \dots u_n$ gegebene homogene ganze Functionen vom $p$ten Grade von den Variabeln $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$ bedeuten, so ist bekanntlich:

$$(1.)\quad \begin{cases} x_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\cdots x_n\frac{\partial u_1}{\partial x_n} = pu_1, \\ x_1\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\cdots x_n\frac{\partial u_2}{\partial x_n} = pu_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_1\frac{\partial u_n}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial u_n}{\partial x_2}+\cdots x_n\frac{\partial u_n}{\partial x_n} = pu_n. \end{cases}$$

Bezeichnet man die Determinante der n Functionen mit Δ, multiplicirt die Gleichungen (1.) der Reihe nach mit

$$\frac{\partial\Delta}{\partial\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)}=U_1,\quad \frac{\partial\Delta}{\partial\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)}=U_2,\ \ldots\quad \frac{\partial\Delta}{\partial\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_1}\right)}=U_n$$

und addirt, so erhält man:

$$(2.)\quad x_1\Delta = p\{u_1U_1+u_2U_2+\cdots u_nU_n\}.$$

Diese Gleichung beweiset, dafs die Functionaldeterminante Δ verschwindet, wenn die Functionen $u_1, u_2, \ldots u_n$ verschwinden.

Differentiirt man die Gleichung (2.) nach x_1, so erhält man:

$$x_1\frac{d\Delta}{dx_1}+\Delta = p\left\{\frac{\partial u_1}{\partial x_1}U_1+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}U_2+\cdots\frac{\partial u_n}{\partial x_1}U_n\right\}$$
$$+p\left\{u_1\frac{dU_1}{dx_1}+u_2\frac{dU_2}{dx_1}+\cdots u_n\frac{dU_n}{dx_1}\right\}.$$

Da aber

$$\Delta = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}U_1+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}U_2+\cdots\frac{\partial u_n}{\partial x_1}U_n$$

ist, so wird

$$(3.)\quad x_1\frac{d\Delta}{dx_1}-(p-1)\Delta = p\left\{u_1\frac{dU_1}{dx_1}+u_2\frac{dU_2}{dx_1}+\cdots u_n\frac{dU_n}{dx_1}\right\}.$$

Diese Gleichung beweiset, dafs mit $u_1, u_2, \ldots u_n$ und Δ auch $\frac{d\Delta}{dx_1}$ verschwindet etc.

Wenn $n-1$ homogene ganze Functionen $p$ten Grades zugleich mit einer homogenen ganzen Function $q$ten Grades von n Variabeln für ein System von Werthen dieser Variabeln verschwinden, so verschwindet auch die Determinante dieser Functionen, und die ersten partiellen Differentialquotienten der Determinante verhalten sich wie die ersten partiellen Differentialquotienten der Function $q$ten Grades.

Wenn $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$ homogene ganze Functionen $p$ten Grades und u_n eine homogene ganze Function $q$ten Grades der n Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ sind, so hat man:

$$(4.)\quad \begin{cases} x_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\cdots x_n\frac{\partial u_1}{\partial x_n} = pu_1, \\ x_1\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\cdots x_n\frac{\partial u_2}{\partial x_n} = pu_2, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ x_1\frac{\partial u_n}{\partial x_1}+u_2\frac{\partial u_n}{\partial x_2}+\cdots x_n\frac{\partial u_n}{\partial x_n} = qu_n. \end{cases}$$

Es sei, wie vorhin, $\varDelta$ die Determinante der n Functionen $u_1, u_2, \dots u_n$. Multiplicirt man nun die Gleichungen der Reihe nach mit

$$\frac{\partial\varDelta}{\partial\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)} = U_1,\quad \frac{\partial\varDelta}{\partial\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)} = U_2,\quad \dots\quad \frac{\partial\varDelta}{\partial\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_1}\right)} = U_n,$$

und addirt, so erhält man

$$(5.)\quad x_1\varDelta = p\{u_1U_1+u_2U_2+\cdots u_nU_n\}+(q-p)u_nU_n;$$

woraus sich zeigt, dafs $\varDelta$ verschwindet, wenn $u_1, u_2, \dots u_n$ verschwinden.

Differentiirt man diese Gleichungen nach den Variabeln, so wird:

$$(6.)\quad \begin{cases} x_1\frac{d\varDelta}{dx_1}-(p-1)\varDelta = p\left\{u_1\frac{dU_1}{dx_1}+u_2\frac{dU_2}{dx_1}+\cdots u_n\frac{dU_n}{dx_1}\right\} \\ \qquad\qquad +(q-p)\left\{u_n\frac{dU_n}{dx_1}+U_n\frac{\partial u_n}{\partial x_1}\right\}, \\ x_1\frac{d\varDelta}{dx_2} = p\left\{u_1\frac{dU_1}{dx_2}+u_2\frac{dU_2}{dx_2}+\cdots u_n\frac{dU_n}{dx_2}\right\} \\ \qquad\qquad +(q-p)\left\{u_n\frac{dU_n}{dx_2}+U_n\frac{\partial u_n}{\partial x_2}\right\}, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ x_1\frac{d\varDelta}{dx_n} = p\left\{u_1\frac{dU_1}{dx_n}+u_2\frac{dU_2}{dx_n}+\cdots u_n\frac{dU_n}{dx_n}\right\} \\ \qquad\qquad +(q-p)\left\{u_n\frac{dU_n}{dx_n}+U_n\frac{\partial u_n}{\partial x_n}\right\}. \end{cases}$$

Setzt man in diese Gleichungen für die Variabeln dasjenige System von Werthen, für welche die n Functionen $u_1, u_2, \dots u_n$ verschwinden, und bezeichnet der Kürze wegen den Ausdruck $\frac{p-q}{x}.U_n$ durch λ, so gehen dieselben in folgende über:

$$(7.)\quad \begin{cases} \frac{d\varDelta}{dx_1}+\lambda\frac{\partial u_n}{\partial x_1} = 0, \\ \frac{d\varDelta}{dx_2}+\lambda\frac{\partial u_n}{\partial x_2} = 0, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \frac{d\varDelta}{dx_n}+\lambda\frac{\partial u_n}{\partial x_n} = 0. \end{cases}$$

Es verhalten sich also die partiellen Differentialquotienten der Determinante wie die entsprechenden partiellen Differentialquotienten der Function vom $q$ten Grade.

§. 2.

Wenn man durch v eine homogene ganze Function 3ten Grades von den Variabeln x_1, x_2, x_3 und durch v_1, v_2, v_3 die partiellen Differentialquotienten dieser Function bezeichnet, so verlangt die Aufgabe *„die in Punctcoordinaten gegebene Gleichung $v=0$ einer Curve dritter Ordnung durch Liniencoordinaten auszudrücken,"* die Elimination der Variabeln x_1, x_2, x_3, t aus folgenden vier homogenen Gleichungen:

$$(8.)\quad \begin{cases} v_1+\alpha_1\frac{t^2}{2} = 0, \\ v_2+\alpha_2\frac{t^2}{2} = 0, \\ v_3+\alpha_3\frac{t^2}{2} = 0, \\ \alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\alpha_3 x_3 = 0. \end{cases}$$

Man hat also drei homogene ganze Functionen $v_1+\alpha_1\frac{t^2}{2}$, $v_2+\alpha_2\frac{t^2}{2}$, $v_3+\alpha_3\frac{t^2}{2}$ der Variabeln x_1, x_2, x_3, t vom zweiten Grade, und eine $\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\alpha_3 x_3$ ersten Grades, welche für ein System Werthe der Variabeln verschwinden. Bezeichnet man daher die Determinante dieser Functionen mit θ, so ist nach dem in (§. 1.) bewiesenen zweiten Satze:

$$\frac{\partial\theta}{\partial x_1}+\lambda\alpha_1 = 0,\quad \frac{\partial\theta}{\partial x_2}+\lambda\alpha_2 = 0,\quad \frac{\partial\theta}{\partial x_3}+\lambda\alpha_3 = 0.$$

Um die Determinante jener 4 Functionen zu bilden, bezeichne ich die zweiten partiellen Differentialquotienten der Function v durch v_{11}, v_{12}, ... und bilde die Determinante Δ aus folgenden Componenten:

$$\begin{matrix} v_{11}, & v_{12}, & v_{13}, & \alpha_1, \\ v_{21}, & v_{22}, & v_{23}, & \alpha_2, \\ v_{31}, & v_{32}, & v_{33}, & \alpha_3, \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, & 0. \end{matrix}$$

Diese letztere Determinante ist vom zweiten Grade und homogen, sowohl in Rücksicht auf die Variabeln, als in Rücksicht auf die Gröfsen α_1, α_2, α_3, und man erhält:

$$\theta = \Delta t.$$

Setzt man diesen Werth von θ in die angegebenen drei Gleichungen, setzt man ferner $\frac{\lambda}{t}=\mu$ und fügt die letzte Gleichung (8.) hinzu, so hat man aus dem System von Gleichungen (8.) folgendes System von Gleichungen abgeleitet:

$$(9.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \Delta}{\partial x_1} + \mu\alpha_1 = 0, \\ \dfrac{\partial \Delta}{\partial x_2} + \mu\alpha_2 = 0, \\ \dfrac{\partial \Delta}{\partial x_3} + \mu\alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0. \end{cases}$$

Diese Gleichungen sind aber lineäre homogene Gleichungen in Rücksicht auf die Variabeln x_1, x_2, x_3. Das Resultat der Elimination dieser Variabeln wird die gesuchte homogene Gleichung vom sechsten Grade in Rücksicht auf die Liniencoordinaten α_1, α_2, α_3 sein.

§. 3.

Wenn v eine gegebene homogene Function vierten Grades von den Variabeln x_1, x_2, x_3 ist und v_1, v_2, v_3 die partiellen Differentialquotienten dieser Function bedeuten, so verlangt die Aufgabe *„die in Punctcoordinaten gegebene Gleichung $v = 0$ einer Curve vierter Ordnung durch Liniencoordinaten auszudrücken"*, die Elimination der Variabeln x_1, x_2, x_3, t aus folgenden vier Gleichungen:

$$(10.)\quad \begin{cases} v_1 + \alpha_1 \dfrac{t^3}{3} = 0, \\ v_2 + \alpha_2 \dfrac{t^3}{3} = 0, \\ v_3 + \alpha_3 \dfrac{t^3}{3} = 0, \end{cases}$$

$$a = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0.$$

Um diese Elimination auf die aus lineären Gleichungen zurückzuführen, bemerke ich, dafs man die drei homogene Functionen $v_1 + \alpha_1 \frac{t^3}{3}$, $v_2 + \alpha_2 \frac{t^3}{3}$, $v_3 + \alpha_3 \frac{t^3}{3}$ der Variabeln x_1, x_2, x_3, t dritten Grades hat, und eine, nemlich a, ersten Grades, welche für ein System von Werthen dieser Variabeln verschwinden. Bezeichnet man daher die Determinante dieser Functionen durch θ, so hat man nach dem in (§. 1.) bewiesenen zweiten Satze:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_1} + \lambda\alpha_1 = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x_2} + \lambda\alpha_2 = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x_3} + \lambda\alpha_3 = 0.$$

Die Determinante Δ der Gröfsen

$$\begin{matrix} v_{11}, & v_{12}, & v_{13}, & \alpha_1, \\ v_{21}, & v_{22}, & v_{23}, & \alpha_2, \\ v_{31}, & v_{32}, & v_{33}, & \alpha_3, \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, & 0 \end{matrix}$$

unterscheidet sich von der Determinante θ nur durch den Factor t^2, so dafs

$$\theta = \varDelta t^2$$

ist. Setzt man daher diesen Werth von θ in die drei vorhergehenden Gleichungen, so gehen dieselben, wenn $\frac{\lambda}{t^2} = \mu$ ist, in

$$(11.)\quad \begin{cases} \frac{\partial \varDelta}{\partial x_1} + \mu\alpha_1 = 0, \\ \frac{\partial \varDelta}{\partial x_2} + \mu\alpha_2 = 0, \\ \frac{\partial \varDelta}{\partial x_3} + \mu\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

über. Mit diesen Gleichungen bestehen auch noch folgende, aus $a = 0$ abgeleitete Gleichungen:

$$(12.)\quad \begin{cases} ax_1^2 = 0, \quad ax_2^2 = 0, \quad ax_3^2 = 0, \\ ax_2x_3 = 0, \quad ax_3x_1 = 0, \quad ax_1x_2 = 0. \end{cases}$$

Entwickelt man nun die Gleichungen (10. 11. und 12.), so wird man finden, dafs diese 12 zugleich bestehenden Gleichungen lineär, und in Rücksicht auf die 12 Gröfsen x_1^3, x_2^3, x_3^3, $x_1^2x_2$, $x_1^2x_3$, $x_2^2x_1$, $x_2^2x_3$, $x_3^2x_1$, $x_3^2x_2$, $x_1x_2x_3$, t^3, μ homogen sind. Das Resultat der Elimination aus diesen lineären Gleichungen wird also die gesuchte Gleichung in den Liniencoordinaten α_1, α_2, α_3 sein; welche, wie leicht zu sehen, homogen und vom 12ten Grade ist.

§. 4.

Die Aufgabe *„die Bedingungsgleichung zu finden, welche erfüllt werden mufs, wenn eine Curve vierter Ordnung einen Doppelpunct haben soll"*, führt auf die Elimination dreier Variabeln aus drei homogenen Gleichungen dritten Grades. Auch diese Elimination läfst sich auf die Elimination aus lineären Gleichungen wie folgt zurückführen.

Wenn

$$(13.)\quad v_1 = 0, \quad v_2 = 0, \quad v_3 = 0$$

drei homogene Gleichungen dritten Grades von den Variabeln x_1, x_2, x_3 sind, so hat man drei homogene Functionen v_1, v_2, v_3 dritten Grades, die für ein System von Werthen der Variabeln verschwinden. Es verschwinden daher, nach dem ersten Satze in (§. 1.), nicht allein die Determinante w, gebildet aus den Gröfsen

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1},\quad \frac{\partial v_1}{\partial x_2},\quad \frac{\partial v_1}{\partial x_3},$$
$$\frac{\partial v_2}{\partial x_1},\quad \frac{\partial v_2}{\partial x_2},\quad \frac{\partial v_2}{\partial x_3},$$
$$\frac{\partial v_3}{\partial x_1},\quad \frac{\partial v_3}{\partial x_2},\quad \frac{\partial v_3}{\partial x_3},$$

sondern auch die partiellen Differentialquotienten dieser Determinante. Aus den obigen drei Gleichungen ergeben sich also folgende homogene Gleichungen fünften Grades:

$$(14.)\quad \frac{\partial w}{\partial x_1} = 0,\quad \frac{\partial w}{\partial x_2} = 0,\quad \frac{\partial w}{\partial x_3} = 0.$$

Wenn man zu diesen drei Gleichungen noch die 18 Gleichungen fünften Grades hinzufügt, welche aus den drei Gleichungen (13.) durch Multiplication mit den Producten x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_2x_3, x_3x_1, x_1x_2 entstehen, so hat man 21 homogene Gleichungen fünften Grades. Entwickelt man diese und betrachtet die 21 verschiedenen Producte der Variabeln von der fünften Dimension, aus welchen die verschiedenen Glieder dieser Gleichungen bestehen, als die Unbekannten, so hat man 21 lineäre homogene Gleichungen. Das Resultat der Elimination dieser Unbekannten wird zugleich das Resultat der Elimination der Variabeln aus den Gleichungen (13.) sein: eine homogene Gleichung vom 27ten Grade in Rücksicht auf die Coëfficienten in den Gleichungen (13.).

Anmerkung. Wenn die Curve nur von der dritten Ordnung ist, in welchem Falle die Gleichungen (13. und 14.) von der zweiten Ordnung sind, genügen diese Gleichungen, um aus ihnen die Producte x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_2x_3, x_3x_1, x_1x_2 als aus lineären Gleichungen zu eliminiren; woraus denn eine homogene Gleichung vom 12ten Grade in Rücksicht auf die Coëfficienten in den Gleichungen (13.) sich ergiebt.

§. 5.

Die Gleichung der Curve 14ter Ordnung zu finden, welche eine gegebene Curve $v=0$ vierter Ordnung in den Berührungspuncten der Doppeltangenten schneidet, ist eine Aufgabe, deren Lösung ich in der Abhandlung „Über Curven dritter Ordnung etc." (dieses Journal Bd. 36. S. 103) dadurch angebahnt habe, dafs ich die Gleichung einer solchen Curve vom 16ten Grade, nämlich die Gleichung

$$(15.)\quad 3Q_2Q_4 - Q_3Q_3 = 0,$$

aufstellte, welche noch mit Hülfe der Gleichung der Curve $v=0$ um zwei Einheiten zu erniedrigen blieb.

Ich behalte die dort gebrauchte Bezeichnung hier bei, nämlich $n=4$, $a_1=0$, $a_2=0$, $a_3=1$, $x_3=1$, und bezeichne der Kürze wegen die partiellen Differentialquotienten von w, gleich wie die von v, durch Indices. Dann ergeben sich aus den Formeln (XX.) für die Gröfsen Q folgende Werthe:

$$9Q_2 = w,$$
$$9Q_3 = \{w_1v_2 - w_2v_1\},$$
$$9Q_4 = \{w_{11}v_2^2 - 2w_{12}v_1v_2 + w_{22}v_1^2\} - \tfrac{2}{3}\{w_1V_{13} + w_2V_{23} + w_3V_{33}\} + 2wV_{33}.$$

Mit Hülfe der Gleichung $v=0$ und mit Berücksichtigung der bekannten Eigenschaft der homogenen Functionen kann man dem Ausdrucke $(9Q_3)^2$ folgende Gestalt geben:

$$\begin{aligned}(9Q_3)^2 = & -4w^2V_{33} + \tfrac{4}{3}\{w_1V_{13} + w_2V_{23} + w_3V_{33}\} \\ & - \tfrac{1}{9}\{w_1^2V_{11} + w_2^2V_{22} + w_3^2V_{33} + 2w_2w_3V_{23} + 2w_3w_1V_{31} + 2w_1w_2V_{12}\}.\end{aligned}$$

Eben so wird:

$$\begin{aligned}\{w_{11}v_2^2 - 2w_{12}v_1v_2 + w_{22}v_1^2\} = & \tfrac{10}{9}\{-3wV_{33} + (w_1V_{13} + w_2V_{23} + w_3V_{33})\} \\ & - \tfrac{1}{9}\{w_{11}V_{11} + w_{22}V_{22} + w_{33}V_{33} + 2w_{23}V_{23} + 2w_{31}V_{31} + 2w_{12}V_{12}\}.\end{aligned}$$

Mithin ist

$$\begin{aligned}9Q_4 = & -\tfrac{4}{3}wV_{33} + \tfrac{4}{9}(w_1V_{13} + w_2V_{23} + w_3V_{33}) \\ & - \tfrac{1}{9}\{w_{11}V_{11} + w_{22}V_{22} + w_{33}V_{33} + 2w_{23}V_{23} + 2w_{31}V_{31} + 2w_{12}V_{12}\}.\end{aligned}$$

Setzt man diese Werthe der Gröfsen Q in die Gleichung (15.), so erhält man, indem sich die Glieder von der 16ten und 15ten Ordnung aufheben, die gesuchte Gleichung vom 14ten Grade; nemlich:

$$(16.)\quad \left\{\begin{array}{l} \{w_1^2V_{11} + w_2^2V_{22} + w_3^2V_{33} + 2w_2w_3V_{23} + 2w_3w_1V_{31} + 2w_1w_2V_{12}\} \\ -3w\{w_{11}V_{11} + w_{22}V_{22} + w_{33}V_{33} + 2w_{23}V_{23} + 2w_{31}V_{31} + 2w_{12}V_{12}\} \end{array}\right\} = 0.$$

Dieses ist also die Gleichung der Curve, welche die gegebene Curve $v=0$ vierter Ordnung in den 56 Berührungspuncten der Doppeltangenten schneidet. In ihr bedeuten die Gröfsen w die partiellen Differentialquotienten der Determinante, welche aus den partiellen Differentialquotienten

$$\begin{array}{ccc} v_{11}, & v_{12}, & v_{13}, \\ v_{21}, & v_{22}, & v_{23}, \\ v_{31}, & v_{32}, & v_{33} \end{array}$$

der Function v gebildet ist, und die Gröfsen V haben folgende Werthe:

$$\begin{array}{ll} V_{11} = v_{22}v_{33} - v_{23}^2, & V_{23} = v_{12}v_{13} - v_{11}v_{23}, \\ V_{22} = v_{33}v_{11} - v_{31}^2, & V_{31} = v_{23}v_{21} - v_{22}v_{31}, \\ V_{33} = v_{11}v_{22} - v_{12}^2, & V_{12} = v_{31}v_{32} - v_{33}v_{12}. \end{array}$$

Königsberg im Januar 1850.

21.
Probleme der Variationsrechnung.

(Von Herrn Professor *Schellbach* zu Berlin.)

Eine lange und vielseitige Erfahrung hat mich zu der Überzeugung gebracht, dafs das Wesen der Variationsrechnung noch nicht ganz richtig erfafst ist. Die talentvollsten meiner jüngern Freunde, welche wirklich die Methoden der Variationsrechnung so weit in Besitz hatten, um Aufgaben aus dieser Sphäre lösen zu können, gestanden stets, die Gründe des Verfahrens nicht mit voller Klarheit einzusehen. Es ist eine Thatsache, dafs erfindungsreiche Köpfe, die sich lange Zeit in einer und derselben Gedankensphäre bewegten, Wahrheiten und oft ganze wissenschaftliche Gebiete entdecken, ohne den Weg dazu Andern zeigen oder ihn mit vollem Bewufstsein selber gehen zu können. Nehme ich hinzu, dafs in gedruckten und ungedruckten Schriften die Variationsrechnung als das abstracteste und sublimste Gebiet der ganzen Mathematik geschildert wird, gleichwohl aber auf einem längst bekannten geraden Wege zu allen ihren Gipfeln sich gelangen läfst, so ist dies eine Aufforderung für mich, diesen Weg, der übrigens weder von den *Bernoulli's* noch von *Euler* betreten worden ist, wie man vielleicht glauben möchte, besonders jüngern Mathematikern, für welche diese Blätter hauptsächlich bestimmt sind, anzudeuten.

§. 1.

Es mögen $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ eine Anzahl constanter Gröfsen und $L, M, N, \ldots$ eben so viele Functionen der n unabhängig veränderlichen Gröfsen $x, y, z, \ldots$ sein. Stellt man die Summe

$$U = V + \lambda L + \mu M + \nu N + \cdots$$

auf, in welcher V ebenfalls eine Function der Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ bezeichnet, so findet man bekanntlich aus den n Gleichungen

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = 0, \ldots$$

die Werthe von $x, y, z, \ldots$, welche den Ausdruck U zu einem *Maximum* oder *Minimum* machen. Wären aber diese Veränderlichen der Bedingung unterworfen, dafs sie die $n-m$ Gleichungen $L=0$, $M=0$, $N=0, \ldots$ befriedigen müssen, so würden die Werthe von $x, y, z, \ldots$ aus den obigen

Gleichungen noch immer U, oder, was dasselbe ist, V zu einem Maximum oder Minimum machen. Die $n-m$ Constanten λ, μ, ν, ..., welche in den Werthen von x, y, z, ... vorkommen, wären aber nun nicht mehr gegeben, sondern müfsten aus den $n-m$ Gleichungen $L=0$, $M=0$, $N=0$, ... berechnet werden. Wenn demnach eine Function V der n Veränderlichen x, y, z, ... zu einem *Maximum* oder *Minimum* gemacht werden soll, während die Veränderlichen die $n-m$ Gleichungen $L=0$, $M=0$, $N=0$, ... befriedigen sollen, so findet man aus diesen und den n Gleichungen:

$$\frac{\partial V}{\partial x}+\lambda\frac{\partial L}{\partial x}+\mu\frac{\partial M}{\partial x}+\nu\frac{\partial N}{\partial x}+\cdots=0,$$
$$\frac{\partial V}{\partial y}+\lambda\frac{\partial L}{\partial y}+\mu\frac{\partial M}{\partial y}+\nu\frac{\partial N}{\partial y}+\cdots=0,$$
$$\frac{\partial V}{\partial z}+\lambda\frac{\partial L}{\partial z}+\mu\frac{\partial M}{\partial z}+\nu\frac{\partial N}{\partial z}+\cdots=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

die Werthe von λ, μ, ν, ..., und dann auch die von x, y, z, ..., welche der Function V die verlangte Eigenschaft geben.

Ist $f(x,y,z,u)=0$ eine Gleichung, aus welcher die Werthe von x, y, z gefunden werden sollen, die u zu einem Maximum oder Minimum machen, so stelle man sich u aus diesen Gleichungen entwickelt vor, so dafs $u=\varphi(x,y,z)$ oder $\varphi(x,y,z)-u=0$ ist. Hiernach hätte man zur Bestimmung von x, y, z die drei Gleichungen $\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0$. Aus der ersten Gleichung folgt:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\partial x+\frac{\partial f}{\partial y}\partial y+\frac{\partial f}{\partial z}\partial z+\frac{\partial f}{\partial u}\partial u=0,$$

und aus der zweiten:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\partial x+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\partial y+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\partial z-\partial u=0.$$

Man hat daher

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\frac{\partial f}{\partial x}:\frac{\partial f}{\partial u},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\partial f}{\partial y}:\frac{\partial f}{\partial u},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial z}=-\frac{\partial f}{\partial z}:\frac{\partial f}{\partial u},$$

folglich zur Bestimmung von x, y, z, u die vier Gleichungen:

$$f=0,\quad \frac{\partial f}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial z}=0.$$

Hat man nun aufser der Gleichung

$$f(x,y,z,t,u)=0,$$

aus welcher die Werthe von x, y, z, t gefunden werden sollen, welche u

zu einem Maximum oder Minimum machen, noch die Gleichungen

$$\varphi(x, y, z, t, u) = 0, \quad \psi(x, y, z, t, u) = 0,$$

so bilde man die Gleichung

$$f + \lambda\varphi + \mu\psi = 0,$$

in welcher λ und μ Constanten sind, und die linke Seite wieder eine Function von x, y, z, t, u ist, aus welcher der gröfste oder kleinste Werth von u bestimmt werden soll. Nach Dem, was wir so eben sahen, hat man daher zur Bestimmung von x, y, z, t, u, λ, μ folgende 7 Gleichungen:

$$f = 0, \quad \varphi = 0, \quad \psi = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mu\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mu\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \mu\frac{\partial \psi}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mu\frac{\partial \psi}{\partial t} = 0.$$

Auf eine ähnliche Weise kann man verfahren, wenn Functionen von mehr Veränderlichen und eine beliebige Zahl von Bedingungsgleichungen gegeben sind.

Nur diese Sätze, deren strengeren Beweis man in jedem guten Lehrbuche der Differentialrechnung findet, und die hier nur der Vollständigkeit wegen hergesetzt wurden, sind nöthig, um alle Probleme der Variationsrechnung lösen zu können; wie ich dies jetzt an einer Reihe von Beispielen nachweisen werde. Wenn ich dabei etwas ausführlicher und umständlicher verfahre, als man es an diesem Orte zu lesen gewohnt ist, so geschieht es eben deswegen, weil ich nicht einer grofsen Entdeckung in allgemeinen, flüchtig hingeworfenen Umrissen die Priorität zu sichern habe, sondern jüngeren Mathematikern nützlich zu sein wünsche.

§. 2.

Aufgabe. In den Puncten A, A_1, A_2, ... A' (Fig. 1), deren Abscissen durch x_0, x_1, x_2, ... x_n bezeichnet werden mögen, sind die Ordinaten $AB = y_0$, $A_1B_1 = y_1$, ... $A'B' = y_n$ errichtet, von denen die Länge der beiden äufsersten y_0 und y_n gegeben ist, und die Länge der übrigen so bestimmt werden soll, dafs der Inhalt des Polygons $ABYA'B'$ ein Minimum wird, während die Summe der Seiten in $BB_1B_2 \ldots B'$ eine gegebene Länge L hat.

Auflösung. Der Inhalt der n Trapeze ist

$$\tfrac{1}{2}(x_1-x_0)(y_0+y_1)+\tfrac{1}{2}(x_2-x_1)(y_1+y_2)+\tfrac{1}{2}(x_3-x_2)(y_2+y_3)+\cdots$$
$$\cdots+\tfrac{1}{2}(x_n-x_{n-1})(y_{n-1}+y_n) = V,$$

während $L = \Delta s_0+\Delta s_1+\Delta s_2+\cdots \Delta s_{n-1}$ ist, wo $\Delta s_0=\sqrt{((x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2)}$, $\Delta s_1 = \sqrt{((x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2)}$, $\Delta s_2 = \sqrt{((x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2)}$, ... $\Delta s_{n-1} = \sqrt{((x_n-x_{n-1})^2+(y_n-y_{n-1})^2)}$ bedeutet. Differentiirt man also den Ausdruck:

$$U = V+\lambda L,$$

nach den $n-1$ Gröfsen $y_1, y_2, y_3, \ldots y_{n-1}$, und setzt die Differentialquotienten gleich Null, so erhält man, wenn man die Gleichung $L-\Delta s-\Delta s_1-\Delta s_2\ldots$ $\cdots-\Delta s_{n-1}=0$ mit hinzunimmt, im Ganzen n Gleichungen, aus denen die n Unbekannten $y_1, y_2, \ldots y_n$ und λ berechnet werden müssen.

Die Differentiation giebt die Gleichungen:

$$(1.)\quad\begin{cases} x_2-x_0-2\lambda\left(\frac{\Delta y_1}{\Delta s_1}-\frac{\Delta y_0}{\Delta s_0}\right)=0,\\ x_3-x_1-2\lambda\left(\frac{\Delta y_2}{\Delta s_2}-\frac{\Delta y_1}{\Delta s_1}\right)=0,\\ x_4-x_2-2\lambda\left(\frac{\Delta y_3}{\Delta s_3}-\frac{\Delta y_2}{\Delta s_2}\right)=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_{m+2}-x_m-2\lambda\left(\frac{\Delta y_{m+1}}{\Delta s_{m+1}}-\frac{\Delta y_m}{\Delta s_m}\right)=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_n-x_{n-2}-2\lambda\left(\frac{\Delta y_{n-1}}{\Delta s_{n-1}}-\frac{\Delta y_{n-2}}{\Delta s_{n-2}}\right)=0, \end{cases}$$

oder

$$(1.)\quad\begin{cases} 2\Delta x_0+\Delta^2 x_0-2\lambda\Delta\left(\frac{\Delta y_0}{\Delta s_0}\right)=0,\\ 2\Delta x_1+\Delta^2 x_1-2\lambda\Delta\left(\frac{\Delta y_1}{\Delta s_1}\right)=0,\\ 2\Delta x_2+\Delta^2 x_2-2\lambda\Delta\left(\frac{\Delta y_2}{\Delta s_2}\right)=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ 2\Delta x_m+\Delta^2 x_m-2\lambda\Delta\left(\frac{\Delta y_m}{\Delta s_m}\right)=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ 2\Delta x_{n-2}+\Delta^2 x_{n-2}-2\lambda\Delta\left(\frac{\Delta y_{n-2}}{\Delta s_{n-2}}\right)=0. \end{cases}$$

Es ist nicht unser Zweck, diese Gleichungen in dieser endlichen Form zu behandeln, sondern ihre Aufstellung liefert nur die Gleichungen, welche integrirt werden müssen, wenn die Gestalt der Curve verlangt wird, die ein Faden von der Länge L annehmen mufs, der durch zwei feste Puncte y_0 und y_n so gelegt werden soll, dafs der Flächenraum zwischen ihm, den Ordinaten der beiden Puncte und dem entsprechenden Stück der Abscissenaxe ein Minimum wird.

Addirt man die $m+1$ ersten der obigen Gleichungen, so erhält man

$$(2.)\qquad x_{m+2}+x_{m+1}-x_1-x_0-2\lambda\left(\frac{\varDelta y_{m+1}}{\varDelta s_{m+1}}-\frac{\varDelta y}{\varDelta s}\right)=0,$$

oder, wenn man sich jetzt unendlich viele Puncte zwischen x_0 und x_n eingeschaltet vorstellt, wodurch sich x_1 nicht mehr von x_0 und x_{m+2} nicht mehr von x_{m+1} unterscheidet und das Zeichen $\varDelta$ sich in ∂ verwandelt:

$$(3.)\qquad x_{m+1}-x_0=\lambda\left(\frac{\partial y_{m+1}}{\partial s_{m+1}}-\frac{\partial y_0}{\partial s_0}\right).$$

Ganz dasselbe hätte sich ergeben, wenn man blofs die $m+1$te dieser Gleichungen

$$(4.)\qquad 2\varDelta x_m+\varDelta^2 x_m-2\lambda\varDelta\left(\frac{\varDelta y_m}{\varDelta s_m}\right)=0$$

herausgenommen, und für diesen speciellen Fall behandelt hätte, wobei noch für x_m, y_m, s_m kurz x, y, s geschrieben werden konnte. Man hätte so die Gleichung

$$(5.)\qquad 2\partial x+\partial^2 x-2\lambda\partial\cdot\frac{\partial y}{\partial s}=0$$

zu integriren bekommen, aus welcher sich $2x+\partial x-2\lambda\frac{\partial y}{\partial s}=$ const. oder

$$(6.)\qquad x=\lambda\frac{\partial y}{\partial s}+\text{const.}$$

ergiebt, oder, wenn man die Constante bestimmt:

$$(7.)\qquad x-x_0=\lambda\left(\frac{\partial y}{\partial s}-\frac{\partial y_0}{\partial s_0}\right);$$

was offenbar nichts anderes als die Gleichung (3.) ist, da eben der Zeiger $m+1$ beliebig ist, oder diese Gleichung (3.) innerhalb des ganzen Intervalls von x_0 bis x_n gilt, was in (7.) dadurch ausgedrückt worden ist, dafs man ganz allgemein x, y statt x_m, y_m geschrieben hat.

Bezeichnet man in (6.) die Constante durch a, so ergiebt sich durch weitere Integration:

$$(8.)\qquad (x-a)^2+(y-b)^2=\lambda^2;$$

woraus man den *Kreis* als die gesuchte Gestalt des Fadens erkennt.

Beim Übergange zum Unendlichkleinen verwandelt sich die Gleichung

$$L = \Delta s_0 + \Delta s_1 + \Delta s_2 + \cdots + \Delta s_{n-1}$$

in

$$L = \int_0^L \partial s = \int_{y_0}^{y_n} \frac{\partial s}{\partial y} \partial y = \pm \lambda \int_{y_0}^{y_n} \frac{\partial y}{\sqrt{(\lambda^2 - (y-b)^2)}},$$

woraus man

$$(9.) \quad (x_0 - a)(y_n - b) - (x_n - a)(y_0 - b) = \pm \lambda^2 \sin \frac{L}{\lambda}$$

findet. Diese Gleichung, in Verbindung mit den beiden aus (8.) abgeleiteten Gleichungen

$$(10.) \quad (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 = \lambda^2,$$

$$(11.) \quad (x_n - a)^2 + (y_n - b)^2 = \lambda^2,$$

ist zur Bestimmung der drei Constanten a, b, λ der Coordinaten des Mittelpuncts und des Radius des Kreises hinreichend.

Der bloſse Anblick der Figur lehrt, daſs hier sowohl ein Minimum als ein Maximum der von dem Faden begränzten Fläche gesucht werden kann, und daſs für beide der Radius λ gleiche aber entgegengesetzte Werthe bekommt. Zugleich sieht man auch ohne weitere Untersuchung der letzten drei Gleichungen, daſs die Aufgabe Unmögliches verlangt, wenn L eine gewisse Gröſse überschreitet oder nicht erreicht.

§. 3.

Bisher sind die Abscissen x_1, x_2, x_3, ... x_{n-1} als *gegeben* betrachtet worden. Man kann dieselben aber auch als *veränderlich* ansehen, und die Ordinaten ihrer Gröſse nach *gegeben*, wodurch man zur Bestimmung von x_1, x_2, x_3, ... x_{n-1} offenbar $(n-1)$ ähnliche Gleichungen wie die (1.) zur Berechnung von y_1, y_2, y_3, ... y_{n-1} aufgestellten erhält. Endlich lassen sich sowohl die Abscissen, als die Ordinaten, als *unbestimmt* ansehen, so daſs $(2n-1)$ Unbekannte aus den Gleichungen (1.) und $n-1$ ähnlichen Gleichungen zu berechnen sind, welche man aus der Gruppe (1.) erhält, wenn man nur x und y mit einander vertauscht. Auch bei dem Übergange zum Unendlichkleinen behält diese Vorstellungsart ihre volle Anwendbarkeit; denn man kann sich sowohl die Abscissen als die Ordinaten der Curve selbst wieder als Functionen einer dritten veränderlichen Gröſse vorstellen, und also sowohl nach x als nach y differentiiren. Man erhält auf diese Weise die beiden Gleichungen

$$(1.)\quad \partial x - \lambda\partial\cdot\frac{\partial y}{\partial s} = 0 \quad\text{und}\quad \partial y - \lambda\partial\cdot\frac{\partial x}{\partial s} = 0,$$

deren Integration

$$(2.)\quad x-a = \lambda\frac{\partial y}{\partial s},\quad y-b = \lambda\frac{\partial x}{\partial s}$$

giebt, woraus sich unmittelbar durch Addition der Quadrate der beiden Gleichungen

$$(3.)\quad (x-a)^2+(y-b)^2 = \lambda^2$$

ergiebt.

§. 4.

Endlich kann man auch verlangen, dafs aus den n gegebenen Linien $y_0y_1 = l$, $y_1y_2 = l_1$, $y_2y_3 = l_2$, ... $y_{n-1}y_n = l_{n-1}$ ein Polygon $y_0y_1y_2\dots y_n$ gebildet werde, dessen feste Endpuncte y_0 und y_n sind, und welches mit den Ordinaten und dem zwischen ihnen liegenden Theile der Abscissenaxe einen möglichst kleinen Flächenraum einschliefst.

Der Ausdruck für V in (§. 2.) bleibt bei diesen Voraussetzungen ungeändert; aber an die Stelle der einen Gleichung $L = \varDelta s_0 + \varDelta s_1 + \varDelta s_2 + \dots$ $\dots \varDelta s_{n-1}$ treten folgende n Gleichungn:

$$(1.)\quad \begin{cases} \varDelta s_0 = \sqrt{((x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2)} = l, \\ \varDelta s_1 = \sqrt{((x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2)} = l_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varDelta s_{n-1} = \sqrt{((x_n-x_{n-1})^2+(y_n-y_{n-1})^2)} = l_{n-1}. \end{cases}$$

Der Ausdruck für U verwandelt sich in

$$U = V + \lambda_0\varDelta s_0 + \lambda_1\varDelta s_1 + \lambda_2\varDelta s_2 + \dots \lambda_{n-1}\varDelta s_{n-1}.$$

Differentiirt man U nach $x_1, x_2, \dots x_{n-1}, y_1, y_2, \dots y_{n-1}$, so erhält man $2(n-1)$ Gleichungen, welche mit den Gleichungen (1.) genügen, um die $3n-2$ Unbekannten $x_1, x_2, x_3, \dots x_{n-1}, y_1, y_2, y_3, \dots y_{n-1}, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_{n-1}$ berechnen zu können.

Man erhält auf diese Weise, wenn blofs die $m+1$ten dieser zwei Gruppen von Differenzengleichungen dargestellt werden:

$$x_{m+2} - x_m - 2\left(\lambda_{m+1}\frac{\varDelta y_{m+1}}{\varDelta s_{m+1}} - \lambda_m\frac{\varDelta y_m}{\varDelta s_m}\right) = 0, \text{ und}$$

$$y_{m+2} - y_m - 2\left(\lambda_{m+1}\frac{\varDelta x_{m+1}}{\varDelta s_{m+1}} - \lambda_m\frac{\varDelta x_m}{\varDelta s_m}\right) = 0, \text{ oder}$$

$$2\varDelta x_m + \varDelta^2 x_m - 2\varDelta\left(\lambda_m\frac{\varDelta y_m}{\varDelta s_m}\right) = 0;\quad 2\varDelta y_m + \varDelta^2 y_m - 2\varDelta\left(\lambda_m\frac{\varDelta x_m}{\varDelta s_m}\right) = 0.$$

Bei dem Übergange zum Unendlichkleinen ergeben sich hieraus die beiden Gleichungen

$$(2.)\quad \partial x - \partial\left(\lambda \frac{\partial y}{\partial s}\right) = 0 \quad \text{und} \quad \partial y - \partial\left(\lambda \frac{\partial x}{\partial s}\right) = 0,$$

deren Integrale wieder die oben gefundenen

$$(3.)\quad x - a = \lambda \frac{\partial y}{\partial s}, \quad y - b = \lambda \frac{\partial x}{\partial s}$$

sind, und also auch zu dem gleichen ferneren Resultate führen.

§. 5.

Um die Differentialgleichungen zu finden, deren Integration zur Lösung unserer Aufgabe erforderlich ist, kann man auch, statt von den endlichen Ausdrücken für V und L, gleich von den ihnen entsprechenden Integralen ausgehen. Man erhält für V und L die Ausdrücke

$$V = y_0 \Delta x_0 + y_1 \Delta x_1 + y_2 \Delta x_2 + \dots + y_{n-1} \Delta x_{n-1}$$
$$+ \tfrac{1}{2}(\Delta x_0 \Delta y_0 + \Delta x_1 \Delta y_1 + \Delta x_2 \Delta y_2 + \dots + \Delta x_{n-1} \Delta y_{n-1}) \text{ und}$$
$$L = \sqrt{(\Delta x_0^2 + \Delta y_0^2)} + \sqrt{(\Delta x_1^2 + \Delta y_1^2)} + \sqrt{(\Delta x_2^2 + \Delta y_2^2)} + \dots + \sqrt{(\Delta x_{n-1}^2 + \Delta y_{n-1}^2)};$$

also wird, wenn man die Differenzen unendlich klein annimmt, $V = \int y\, \partial x$ und $L = \int (\partial x^2 + \partial y^2)$, daher

$$U = \int y\, \partial x + \lambda \int \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}.$$

Man kann nun in U sowohl die ∂x constant und die ∂y veränderlich annehmen, als umgekehrt, die ∂y als constant und die ∂x als veränderlich, so dafs also x und y Functionen einer dritten Veränderlichen sind. In diesem Sinne kann man daher U zugleich nach x und auch nach y differentiiren.

Diese letztere Vorstellungsweise ist die, welche zu Formeln führt, die sich durch ihre Symmetrie vor denen durch die andere Ansicht gefundenen auszeichnen. Da es einige Unbequemlichkeit hat, bei der gewöhnlichen Behandlungsweise der Probleme der Variationsrechnung gleich zwei unabhängig Veränderliche mit in die Betrachtung zu ziehen, so werden diese symmetrischen Formeln gewöhnlich nicht aufgestellt. Es läfst sich mit Integral-Ausdrücken nur dann noch völlig sicher operiren, wenn man in ihnen die einzelnen Elemente wieder herauserkennt, und der Rechner thut wohl, lieber die einzelnen Glieder einer solchen Summe hinzuschreiben, also

$$y_0(x_1 - x_0) + y_1(x_2 - x_1) + y_2(x_3 - x_2) + \dots + y_{n-1}(x_n - x_{n-1})$$

statt $\int y\,\partial x$ zu setzen. Man sieht dann recht gut, was es heifst, den Ausdruck U nach $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ und $y_1, y_2, \ldots y_{n-1}$ zu differentiiren. Führt man an U die Operation wirklich aus, so erhält man die Gleichungen

$$y_0 - y_1 + \lambda\left(\frac{\partial x_0}{\partial s_0} - \frac{\partial x_1}{\partial s_1}\right) = 0 \quad \text{oder} \quad \partial y_0 + \lambda\partial\cdot\frac{\partial x_0}{\partial s_0} = 0,$$

$$y_1 - y_2 + \lambda\left(\frac{\partial x_1}{\partial s_1} - \frac{\partial x_2}{\partial s_2}\right) = 0 \quad \text{oder} \quad \partial y_1 + \lambda\partial\cdot\frac{\partial x_1}{\partial s_1} = 0,$$

und allgemein

$$\partial y_m + \lambda\partial\cdot\frac{\partial x_m}{\partial s_m} = 0;$$

wofür dann kürzer $\partial y + \lambda\partial\cdot\frac{\partial x}{\partial s} = 0$ geschrieben werden kann, da eben durch x und y, ganz so wie durch x_m und y_m, die Coordinaten irgend eines Puncts der Curve zwischen y_0 und y_n bezeichnet werden sollen. Eben so gelangt man dann zu der zweiten Gleichung $\partial x + \lambda\partial\cdot\frac{\partial y}{\partial s} = 0$. Wenn einmal der Sinn dieser Operationen klar aufgefafst ist, so genügt es offenbar, U nur nach x_1 und y_1 zu differentiiren, um sogleich die gesuchten Differentialgleichungen zu finden.

§. 6.

Es werde jetzt angenommen, dafs die Endpuncte des Fadens, von der Länge L, sich stets auf zwei Curven befinden müssen, deren Gleichungen $\varphi(\xi, \eta) = 0$ und $\varphi'(\xi', \eta') = 0$ sind, und dafs er durch $n-1$ Ordinaten $y_1, y_2, \ldots y_{n-1}$ hindurchgehen soll, deren Abscissen nach irgend einem Gesetz zwischen die Puncte x_0 und x_n vertheilt sind; wobei der erwähnte Flächenraum wieder *möglichst klein* verlangt wird.

Hier sind aufser den $n-1$ Ordinaten auch noch die Coordinaten der Grenzpuncte x_0, y_0 und x_n, y_n zu bestimmen, welche den beiden Bedingungsgleichungen $\varphi(x_0, y_0) = 0$ und $\varphi'(x_n, y_n) = 0$ unterworfen sind. Man hat daher für U den Ausdruck

$$U = \int(y + \tfrac{1}{2}\partial y)\,\partial x + \lambda\int\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)} + \mu\varphi + \mu_1\varphi',$$

der nach $y_0, y_1, y_2, \ldots y_n$ und nach x_0, x_n differentiirt werden müfste, um zu $n+3$ Gleichungen zu gelangen, aus denen in Verbindung mit den drei Gleichungen $\int\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)} = L$, $\varphi(x_0, y_0) = 0$, $\varphi'(x_n, y_n) = 0$ die $n+6$ Unbekannten x_0, x_n, λ, μ, μ_1, $y_0, y_1, \ldots y_n$ gefunden werden müssen. Wenn aber der Faden über $n-1$ Ordinaten geleitet werden soll, so kann

man auch noch die Abscissen dieser Ordinaten als veränderlich ansehen, wodurch jetzt die $2n+5$ Gröfsen $x_0, x_1, \ldots x_n, y_0, y_1, \ldots y_n, \lambda, \mu, \mu_1$ zu bes imen sind; was mit Hülfe der erwähnten drei Gleichungen und der $2n+2$ aus U abzuleitenden Differentialgleichungen geschehen kann.

Durch Differentiiren nach x_1 und y_1 erhält man sogleich für die Form der beiden oft erwähnten Gleichungen:

$$(1.)\quad \partial y + \lambda\partial\cdot\frac{\partial x}{\partial s} = 0 \quad \text{und} \quad \partial x + \lambda\partial\cdot\frac{\partial y}{\partial s} = 0,$$

welche für den Fall der Stetigkeit die $2(n-1)$ Gleichungen repräsentiren, die für die Coordinaten der Puncte gelten, so auf dem Faden, aber nicht auf den Curven $\varphi=0$ und $\varphi_1=0$ liegen. Für die Bestimmung dieser zwei Puncte mufs U noch nach x_0, y_0, x_n, y_n differentiirt werden, wodurch sich, wenn man $\partial y_0, \partial x_0, \partial x_{n-1}$ vernachlässigt und $\frac{\partial x_n}{\partial s_n}, \frac{\partial y_n}{\partial s_n}$ statt $\frac{\partial x_{n-1}}{\partial s_{n-1}}, \frac{\partial y_{n-1}}{\partial s_{n-1}}$ schreibt, folgende Gleichungen ergeben:

$$(2.)\quad \begin{cases} y_0 + \lambda\frac{\partial x_0}{\partial s_0} - \mu\frac{\partial \varphi}{\partial x_0} = 0; & \lambda\frac{\partial y_0}{\partial s_0} - \mu\frac{\partial \varphi}{\partial y_0} = 0; \\ y_n + \lambda\frac{\partial x_n}{\partial s_n} + \mu_1\frac{\partial \varphi'}{\partial x_n} = 0; & \lambda\frac{\partial y_n}{\partial s_n} + \mu_1\frac{\partial \varphi'}{\partial y_n} = 0. \end{cases}$$

Nicht blofs die Rechnung, sondern schon die ganze Betrachtungsweise dieser Art von Aufgaben lehrt, dafs auch in diesem Falle die gesuchte Form des Fadens ein *Kreis* ist.

Da $\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\partial\xi + \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\partial\eta = 0$ und $\frac{\partial\varphi'}{\partial\xi'}\partial\xi' + \frac{\partial\varphi'}{\partial\eta'}\partial\eta' = 0$ ist und statt x_0, y_0, x_n, y_n auch $\xi_1, \eta_1, \xi', \eta'$ geschrieben werden kann, so erhält man aus den Gleichungen (2.):

$$\eta\partial\xi + \lambda\left(\frac{\partial x_0}{\partial s_0}\partial\xi + \frac{\partial y_0}{\partial s_0}\partial\eta\right) = 0; \quad \eta'\partial\xi' + \lambda\left(\frac{\partial x_n}{\partial s_n}\partial\xi' + \frac{\partial y_n}{\partial s_n}\partial\eta'\right) = 0,$$

also

$$(3.)\quad \frac{\eta}{\frac{\partial x_0}{\partial s_0} + \frac{\partial y_0}{\partial s_0}\frac{\partial\eta}{\partial\xi}} = \frac{\eta'}{\frac{\partial x_n}{\partial s_n} + \frac{\partial y_n}{\partial s_n}\frac{\partial\eta'}{\partial\xi'}};$$

woraus leicht zu sehen, dafs, wenn in (Fig. 2) *BC* eine Tangente an den Kreis *BB'* und *BD* eine Tangente an die Curve *EB*, oder $\varphi=0$ ist, und von *A* ein Loth *AC* auf die Tangente *BC* gefällt wird, der Theil dieses Lothes *AD* dem entsprechenden Theile *A'D'* am zweiten Endpuncte *B'* gleich ist.

Die 9 Constanten x_0, y_0, x_n, y_n, λ, μ, μ_1, a, b müssen aus den Gleichungen (9. 10. u. 11.) in (§. 2.), aus den vier Gleichungen (2.) in diesem Paragraphen und aus den beiden Gleichungen der Grenzcurve $\varphi(x_0, y_0) = 0$, $\varphi'(x_n, y_n) = 0$ bestimmt werden.

§. 7

Soll zwischen den Schenkeln des Winkels $ABC = \alpha$ (Fig. 3) der Faden $AB = L$ so ausgespannt werden, dafs der Inhalt des Sectors ABC ein *Maximum* wird, so wird man sich am bequemsten der *Polarcoordinaten* bedienen. Die Endpuncte A und B des Fadens mögen in den Entfernungen $AC = r_0$ und $BC = r_n$ befestigt gedacht werden. Bildet dann der Radiusvector $CD = r$ mit AC den Winkel v, so erhält man für U den Ausdruck

$$U = \tfrac{1}{2}\int r^2 \partial v + \lambda \int \sqrt{(\partial r^2 + r^2 \partial v^2)},$$

der also blofs nach r_1 und v_1 differentiirt zu werden braucht, um sogleich die Form der gesuchten Differentialgleichungen zu geben. Hätte man nämlich zwischen r_0 und r_n die Vectoren r_1, r_2, r_3, ... r_{n-1} eingeschaltet, die den Winkeln v_1, v_2, v_3, ... v_{n-1} entsprechen, so hätte man für U die Reihe

$$\begin{aligned} U = \tfrac{1}{2}\{r_0 r_1 \sin v_1 + r_1 r_2 \sin(v_2 - v_1) + r_2 r_3 \sin(v_3 - v_2) + \cdots + r_{n-1} r_n \sin(v_n - v_{n-1})\} \\ + \lambda\{\sqrt{((r_1 - r_0)^2 + 4 r_0 r_1 \sin^2 \tfrac{1}{2} v_1)} + \sqrt{((r_2 - r_1)^2 + 4 r_1 r_2 \sin^2 \tfrac{1}{2}(v_2 - v_1))} \\ + \sqrt{((r_3 - r_2)^2 + 4 r_2 r_3 \sin^2 \tfrac{1}{2}(v_3 - v_2))} + \cdots \\ + \sqrt{((r_n - r_{n-1})^2 + 4 r_n r_{n-1} \sin^2 \tfrac{1}{2}(v_n - v_{n-1}))}\} \end{aligned}$$

erhalten, die, nach r_1 und v_1 differentiirt, die Gleichungen

$$\tfrac{1}{2}(r_0 \sin v_1 + r_2 \sin(v_2 - v_1)) + \lambda\left\{\frac{r_1 - r_0}{\Delta s_0} - \frac{r_2 - r_1}{\Delta s_1} + \frac{2 r_0 \sin^2 \frac{1}{2} v_1}{\Delta s_0} + \frac{2 r_2 \sin^2 \frac{1}{2}(v_2 - v_1)}{\Delta s_1}\right\} = 0,$$

$$\tfrac{1}{2}(r_0 r_1 \cos v_1 - r_1 r_2 \cos(v_2 - v_1)) + \lambda\left\{\frac{r_0 r_1 \sin v_1}{\Delta s_0} - \frac{r_1 r_2 \sin(v_2 - v_1)}{\Delta s_1}\right\} = 0$$

giebt. Diese Gleichungen lassen sich auch wie folgt schreiben, wenn man sogleich r und v statt r_0 und v_0 setzt:

$$(1.) \quad r \sin \Delta v + \frac{4 \lambda r \sin^2 \frac{1}{2}(\Delta v)}{\Delta s} + \tfrac{1}{2}\Delta\left(r \sin \Delta v + \frac{4 \lambda r \sin^2 \frac{1}{2}(\Delta v)}{\Delta s}\right) - \lambda \Delta \cdot \frac{\Delta r}{\Delta s} = 0,$$

$$(2.) \quad \tfrac{1}{2}\Delta(r r_1 \cos \Delta v) + \lambda \Delta\left(\frac{r r_1 \sin \Delta v}{\Delta s}\right) = 0,$$

Zum Unendlichkleinen übergehend, verwandeln sich diese Gleichungen in

$$(3.) \quad r \partial v + \frac{\lambda r \partial v^2}{\partial s} - \lambda \partial \cdot \frac{\partial r}{\partial s} = 0 \quad \text{und}$$

$$(4.) \quad \tfrac{1}{2}\partial . r^2 + \lambda \partial \cdot \frac{r^2 \partial v}{\partial s} = 0;$$

welche man auch sogleich aus der zuerst für U aufgestellten Gleichung

$$U = \tfrac{1}{2}(r_0^2\partial v_0 + r_1^2\partial v_1 + r_2^2\partial v_2 + \cdots + r_{n-1}^2\partial v_{n-1})$$
$$+\lambda\{\sqrt{(\partial r_0^2 + r_0^2\partial v_0^2)} + \sqrt{(\partial r_1^2 + r_1^2\partial v_1^2)} + \sqrt{(\partial r_2^2 + r_2^2\partial v_2^2)} + \cdots + \sqrt{(\partial r_{n-1}^2 + r_{n-1}^2\partial v_{n-1}^2)}\}$$

durch Differentiiren nach r_1 und v_1 erhalten würde, wenn man nach der Ausführung dieser Differentiation r und v statt r_1 und v_1 setzte und beim Differentiiren ∂r_0, ∂v_0, so wie ∂r_1, ∂v_1 in $r_1 - r_0$, $v_1 - v_0$, $r_2 - r_1$, $v_2 - v_1$ auflösete.

Zur Auflösung der Aufgabe dient schon eine der Gleichungen (3.) und (4.), aber es ist, wie schon bemerkt, für die Symmetrie der Rechnung besser, sie beide aufzustellen. Die Integration von (4.) giebt, wenn man durch a^2 die Constante bezeichnet,

$$(5.)\quad r^2 + 2\lambda r^2\frac{\partial v}{\partial s} = a^2.$$

Setzt man den Werth von $\frac{\partial v}{\partial s}$ aus diesen Gleichungen in (3.), so erhält man die Gleichung

$$4\lambda^2\frac{\partial r}{\partial s}\partial\cdot\frac{\partial r}{\partial s} = \frac{a^4\partial r}{r^3} - r\partial r,$$

in deren Integral

$$(6.)\quad 4\lambda^2\frac{\partial r^2}{\partial s^2} = 2b^2 - \frac{a^4}{r^2} - r^2$$

$2b^2$ die Constante der Integration ist. Setzt man den Werth von ∂s aus dieser Gleichung in (5.), so findet sich

$$(7.)\quad \partial v = \pm\frac{(a^2 - r^2)\partial r}{r\sqrt{(2b^2r^2 - a^4 - r^4)}}.$$

Das Integral dieser Gleichung läfst sich, wenn c die neue Integrations-Constante ist, auf die Form

$$(8.)\quad r^2 - 2r\sqrt{(\tfrac{1}{2}(a^2+b^2))}\cos(v-c) + \tfrac{1}{2}(a^2+b^2) = \tfrac{1}{2}(b^2-a^2)$$

bringen und zeigt, dafs der Faden die Form eines *Kreises* annehmen mufs, dessen Radius $\sqrt{(\tfrac{1}{2}(b^2-a^2))}$ ist. Man erhält ferner

$$(9.)\quad L = \int_{r_0}^{r_n}\partial r\sqrt{\left(1 + \frac{r^2\partial v^2}{\partial r^2}\right)}$$
$$= \sqrt{(\tfrac{1}{2}(b^2-a^2))}\left\{\arccos\frac{r_n^2 - b^2}{\sqrt{(b^4-a^4)}} - \arccos\frac{r_0^2 - b^2}{\sqrt{(b^4-a^4)}}\right\}.$$

Setzt man in (8.) erst $r = r_0$ und dann $r = r_n$, so ergeben sich zwei Gleichungen, aus welchen, in Verbindung mit der letzten, die drei Constanten a, b, c bestimmt werden müssen, durch welche sich dann der Radius und die Coordinaten des Mittelpuncts des Kreises finden.

§. 8.

Aufgabe. Durch die Puncte B und B', deren rechtwinklige Coordinaten $OA = x_0$, $AB = y_0$ und $OA' = x_n$, $A'B' = y_n$ sind, ein Polygon von n Seiten BYB' so zu legen, dafs es bei einer Drehung um die Abscissenaxe OA die *kleinste* Oberfläche beschreibt.

Auflösung. Bezeichnet man wieder die Coordinaten der Puncte B_1, B_2, ... B_{n-1} durch x_1, x_2, ... x_{n-1} und y_1, y_2, ... y_{n-1} und die Seiten BB_1, B_1B_2, ... $B_{n-1}B'$ durch $\varDelta s_0$, $\varDelta s_1$, $\varDelta s_2$, ... $\varDelta s_{n-1}$, so ist die Function, welche zu einem Minimum gemacht werden soll:

$$U = \pi\{(y_0+y_1)\varDelta s_0+(y_1+y_2)\varDelta s_1+(y_2+y_3)\varDelta s_2+ \cdots +(y_{n-1}+y_n)\varDelta s_{n-1}\}$$
$$= 2\pi\Sigma y\varDelta s+\pi\Sigma\varDelta y\varDelta s.$$

Beim Übergang zum Unendlichkleinen verwandelt sich U in

$$(1.)\qquad U = 2\pi\int_{y_0}^{y_n} y\partial s.$$

Man kann sich nun, wenn die Aufgabe mit endlichen Gröfsen gelöset werden soll, offenbar vorstellen, dafs entweder die Puncte A_1, A_2, ... A_{n-1} eine feste Lage haben und nur die zugehörigen Ordinaten zu bestimmen sind, oder umgekehrt, dafs diese gegeben sind und jene gesucht werden sollen, oder auch, dafs sowohl Abscissen als Ordinaten, den Bedingungen der Aufgabe gemäfs, berechnet werden müssen. Demnach kann man also das Integral $\int_{y_0}^{y_n} y\partial s$ entweder nach x_1 differentiiren und die y als constant ansehen, oder nach y_1 und die x als constant betrachten, oder endlich nach x_1 und y_1 zugleich differentiiren, wodurch man dann zwei Differentialgleichungen erhält. Bei der gewöhnlichen Behandlungsweise der Probleme der Variationsrechnung kommt man häufig in Versuchung, ein Integral so behandeln zu wollen, als wäre ∂s constant, aber offenbar ist dies bei der Aufstellung der Differentialgleichungen für diese Sphären von Aufgaben nicht gestattet; denn wenn ∂s constant wäre, so hiefse das, im Falle endlicher Gröfsen, der Aufgabe die Bedingungsgleichungen

$$\sqrt{((x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2)} = l_0, \qquad \sqrt{((x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2)} = l_1,$$
$$\sqrt{((x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2)} = l_2, \quad \ldots \quad \sqrt{((x_n-x_{n-1})^2+(y_n-y_{n-1})^2)} = l_{n-1}$$

hinzufügen, wo l_0, l_1, l_2, ... l_{n-1} Constanten sind. Dadurch bekäme aber, nach dem was wir (§. 4.) sahen, U die Gestalt

$$(2.)\qquad U = \int_{y_0}^{y_n} y\partial s + \int_{y_0}^{y_n} \lambda\partial s,$$

in welchem Ausdrucke natürlich abermals ∂s nicht als constant betrachtet werden dürfte, selbst wenn die Constanten l alle einander gleich wären. Sind dagegen die Differentialgleichungen erst aufgestellt, so kann bei ihrer Integration auch ∂s als constant angesehen werden.

Differentiirt man jetzt, zu der eigentlichen Aufgabe zurückkehrend, (1.) nach x_1 und y_1, so erhält man

$$(3.)\qquad y_0\frac{\partial x_0}{\partial s_0}-y_1\frac{\partial x_1}{\partial s_1}=0 \quad\text{oder}\quad \partial.y\frac{\partial x}{\partial s}=0,$$

$$(4.)\qquad \partial s_1+y_0\frac{\partial y_0}{\partial s_0}-y_1\frac{\partial y_1}{\partial s_1}=0 \quad\text{oder}\quad \partial s-\partial.y\frac{\partial y}{\partial s}=0.$$

Jede dieser Gleichungen genügt, um sogleich zu sehen, dafs die Curve, welche bei ihrer Drehung um die Axe der x die *kleinste Oberfläche* erzeugt, eine *Kettenlinie* ist; denn das Integral der ersten der beiden Gleichungen giebt

$$(5.)\qquad y\frac{\partial x}{\partial s}=a,\quad\text{also}\quad \partial x=\pm\frac{a\partial y}{\sqrt{(y^2-a^2)}},$$

von welcher Gleichung das Integral zu der Gleichung der Kettenlinie

$$(6.)\qquad \frac{y}{a}=\tfrac{1}{2}\left(\frac{b}{a}e^{\frac{x}{a}}+\frac{a}{b}e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

führt. Setzt man hier für x und y ihre beiden Grenzwerthe x_0 und y_0, und x_n, y_n, so erhält man zwei Gleichungen zur Bestimmung der beiden Constanten a und b.

Man sieht leicht, dafs auch in dem Falle, wenn die Linie BYB' eine *gegebene Länge* hat, die gesuchte Curve eine *Kettenlinie* ist, deren Gleichung sich aus (6.) ergiebt, wenn blofs $y+\lambda$ statt y geschrieben wird.

§. 9.

Aufgabe. Die Curve BB' (Fig. 2), von der gegebenen Länge L, deren Endpuncte stets auf zwei Curven EB und $E'B'$ bleiben müssen, soll bei ihrer Drehung um AA' eine Oberfläche bilden, welche mit den beiden Kreisflächen, deren Radien AB und $A'B'$ sind, einen *möglichst grofsen* oder auch *möglichst kleinen* Raum einschliefst.

Auflösung. Sind die Gleichungen der beiden Grenzcurven wieder $\varphi(\xi,\eta)=0$ und $\varphi'(\xi',\eta')=0$, so wird, ganz ähnlich wie in (§. 6.), wenn man den Factor π von dem Integrale $\int y^2\partial x$ wegläfst:

$$U=\int y^2\partial x+\lambda\int\sqrt{(\partial x^2+\partial y^2)}+\mu\varphi(\xi,\eta)+\mu'\varphi'(\xi',\eta');$$

wenn man die Coordinaten der Puncte B und B' durch ξ, η und ξ', η' bezeichnet; wofür früher x_0, y_0 und x_n, y_n geschrieben war.

Die Differentiale von U nach x_1 und y_1 geben

$$(1.)\quad y^2-y_1^2+\lambda\Big(\frac{\partial x_0}{\partial s_0}-\frac{\partial x_1}{\partial s_1}\Big)=0 \quad \text{oder} \quad \partial.y^2+\lambda\partial\cdot\frac{\partial x}{\partial s}=0 \text{ und}$$

$$(2.)\quad 2y_1\partial x+\lambda\Big(\frac{\partial y_0}{\partial s_0}-\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\Big)=0 \quad \text{oder} \quad 2y\partial x-\lambda\partial\cdot\frac{\partial y}{\partial s}=0.$$

Von diesen Gleichungen folgt stets die eine aus der andern durch eine sehr einfache Operation, daher bedarf man zur Lösung der Aufgabe nur einer von beiden. Im gegenwärtigen Falle zieht man z. B. aus (1.):

$$2y\partial y\partial x+\lambda\partial x\partial\cdot\frac{\partial x}{\partial s} = 0,$$

und da

$$\frac{\partial x^2}{\partial s^2}+\frac{\partial y^2}{\partial s^2} = 1,$$

also

$$\partial x\partial\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\partial y\partial\cdot\frac{\partial y}{\partial s} = 0$$

ist, so folgt aus dieser und der vorletzten Gleichung auf der Stelle (2.). Das Integral von (1.) ist

$$(3.)\quad y^2+\lambda\frac{\partial x}{\partial s} = a^2,$$

woraus

$$(4.)\quad x = \pm\int\frac{(a^2-y^2)\partial y}{\sqrt{(\lambda^2-(a^2-y^2)^2)}} \quad \text{und} \quad s = \pm\lambda\int\frac{\partial y}{\sqrt{(\lambda^2-(y^2-a^2)^2)}}$$

folgt. Die Linie BYB' mufs also die Gestalt einer *elastischen Feder* annehmen.

Es sind nun noch die Coordinaten ξ, y und ξ', y' der Endpuncte zu bestimmen. Differentiirt man U nach diesen Gröfsen, so erhält man die zu dieser Bestimmung erforderlichen vier Gleichungen; wobei man sich erinnern mufs, dafs ξ, η, ξ', η', an die Stelle von x_0, y_0, x_n, y_n getreten sind, also ∂x_0 aus $x_1-\xi$, ∂x_{n-1} aus $\xi'-x_{n-1}$, ∂y_0 aus $y_1-\eta$ und ∂y_{n-1} aus $\eta'-y_{n-1}$ besteht. Es wird also

$$(5.)\quad \eta^2+\lambda\Big(\frac{\partial x}{\partial s}\Big)_0-\mu\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}=0;\quad \lambda\Big(\frac{\partial y}{\partial s}\Big)_0-\mu\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}=0;\quad \eta'^2+\lambda\Big(\frac{\partial x}{\partial s}\Big)_n+\mu'\frac{\partial\varphi'}{\partial\xi'}=0;$$
$$\lambda\Big(\frac{\partial y}{\partial s}\Big)_n+\mu'\frac{\partial\varphi'}{\partial\eta'}=0.$$

Durch Elimination von λ, μ, μ' folgt aus diesen Gleichungen, ähnlich wie

in (§. 3.):

$$(6.)\qquad \frac{\eta^2}{\frac{\partial x_0}{\partial s_0}+\frac{\partial y_0}{\partial s_0}\frac{\partial \eta}{\partial \xi}} = \frac{\eta'^2}{\frac{\partial x_n}{\partial s_n}+\frac{\partial y_n}{\partial s_n}\frac{\partial \eta'}{\partial \xi'}};$$

was ebenfalls eine geometrische Bedingung ausspricht, welcher die Lage der Endpuncte unterworfen ist. Die Constanten werden auf eine ähnliche Weise bestimmt, wie in (§. 6.) angegeben wurde.

§. 10.

Wir wollen jetzt diese Art von Aufgaben aus einem etwas allgemeineren Gesichtspuncte betrachten.

Wäre die Function V, welche zu einem *Maximum* oder *Minimum* gemacht werden soll, von der Form

$$f(x_0, x_1-x_0)+f(x_1, x_2-x_1)+f(x_2, x_3-x_2)+\cdots$$
$$\cdots+f(x_{n-2}, x_{n-1}-x_{n-2})+f(x_{n-1}, x_n-x_{n-1})\ \text{oder}$$
$$f(x_0, \Delta x_0)+f(x_1, \Delta x_1)+f(x_2, \Delta x_2)+\cdots+f(x_{n-2}, \Delta x_{n-2})+f(x_{n-1}, \Delta x_{n-1}),$$

oder kürzer geschrieben:

$$f(0)+f(1)+f(2)+\cdots+f(n-1),$$

wo also die $n-1$ Gröfsen $x_1, x_2, x_3, \ldots x_{n-1}$ bestimmt werden müssen, so würde man, nach Dem was bisher über dieses Problem gesagt worden, die $n-1$ dazu erforderlichen Gleichungen finden, wenn man die Differentialquotienten dieses Summen-Ausdrucks, nach diesen Unbekannten genommen, einzeln gleich Null setzte. Man würde also erhalten:

$$\frac{\partial f(0)}{\partial \Delta x_0}+\frac{\partial f(1)}{\partial x_1}-\frac{\partial f(1)}{\partial \Delta x_1}=0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial f(1)}{\partial x_1}-\Delta\cdot\frac{\partial f(0)}{\partial \Delta x_0}=0,$$

$$\frac{\partial f(1)}{\partial \Delta x_1}+\frac{\partial f(2)}{\partial x_2}-\frac{\partial f(2)}{\partial \Delta x_2}=0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial f(2)}{\partial x_2}-\Delta\cdot\frac{\partial f(1)}{\partial \Delta x_1}=0,$$

und allgemein

$$\frac{\partial f(m+1)}{\partial x_{m+1}}-\Delta\cdot\frac{\partial f(m)}{\partial \Delta x_m}=0.$$

Diese Gleichung repräsentirte also irgend eine dieser $n-1$ Gleichungen.

Beim Übergang zum Unendlichkleinen, wo $\frac{\partial f(m+1)}{\partial x_{m+1}}$ nicht von $\frac{\partial f(m)}{\partial x_m}$ verschieden ist und wo Δx_m sich in ∂x_m verwandelt, könnte man diese Gleichung auf eine vollkommen verständliche Weise ganz allgemein durch

$$\frac{\partial f}{\partial x}-\partial\cdot\frac{\partial f}{\partial.\partial x}=0$$

bezeichnen.

Wären aufser der Gruppe $x_1, x_2, x_3, \ldots x_{n-1}$ noch andere Gruppen von Unbekannten zu bestimmen, erschiene also etwa V unter der Form

$$V = \Sigma f(x, \partial x, y, \partial y, z, \partial z),$$

so hätte man aufser (1.) offenbar noch zwei andere solcher Gleichungen:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \partial \cdot \frac{\partial f}{\partial . \partial y} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial z} - \partial \cdot \frac{\partial f}{\partial . \partial z} = 0.$$

Die Integrale dieser drei Gleichungen würden dann das Problem lösen.

Ich will jetzt annehmen, V wäre von der Form

$$f(x_0, x_1 - x_0, x_2 - 2x_1 + x_0) + f(x_1, x_2 - x_1, x_3 - 2x_2 + x_1)$$
$$+ f(x_2, x_3 - x_2, x_4 - 2x_3 + x_2) + \cdots + f(x_{n-2}, x_{n-1} - x_{n-2}, x_n - 2x_{n-1} + x_{n-2}).$$

oder

$$f(x_0, \Delta x_0, \Delta^2 x_0) + f(x_1, \Delta x_1, \Delta^2 x_1) + f(x_2, \Delta x_2, \Delta^2 x_2) + \cdots$$
$$\cdots + f(x_{n-2}, \Delta x_{n-2}, \Delta^2 x_{n-2});$$

was wieder kurz durch $f(0) + f(1) + f(2) + \cdots + f(n-2)$ bezeichnet werden soll.

Die Unbekannte x_1 kommt nur im ersten und zweiten Gliede, aber x_2 kommt in den drei ersten Gliedern vor, aus welchen V besteht. Da nun jede der folgenden Unbekannten $x_3, x_4, \ldots$, bis zu x_{n-2}, stets in drei Gliedern der Summe erscheint, so braucht man nur nach x_2 zu differentiiren, um sogleich die allgemeine Form der Differentialgleichung zu finden, deren Integral das Problem löset. Es findet sich

$$\frac{\partial f(0)}{\partial . \Delta^2 x_0} + \frac{\partial f(0)}{\partial . \Delta x_1} - 2\frac{\partial f(1)}{\partial . \Delta^2 x_1} + \frac{\partial f(2)}{\partial x_2} - \frac{\partial f(2)}{\partial . \Delta x_2} + \frac{\partial f(2)}{\partial . \Delta^2 x_2} = 0 \quad \text{oder}$$

$$\frac{\partial f(2)}{\partial x_2} - \Delta \frac{\partial f(1)}{\partial . \Delta x_1} + \Delta^2 \frac{\partial f(0)}{\partial . \Delta^2 x_0} = 0.$$

Diese Gleichung verwandelt sich beim Übergang zum Unendlichkleinen in

$$(3.) \quad \frac{\partial f}{\partial x} - \partial \cdot \frac{\partial f}{\partial . \partial x} + \partial^2 \cdot \frac{\partial f}{\partial . \partial^2 x} = 0.$$

Ganz ähnliche Gleichungen würde man für $y, z, \ldots$ erhalten, wenn V von der Form

$$V = \Sigma f(x, \partial x, \partial^2 x, y, \partial y, \partial^2 y, z, \partial z, \partial^2 z, \ldots)$$

wäre. Man sieht ohne Mühe, wie diese Formeln weiter fortzusetzen sind. Hätte V z. B. die Gestalt

$$V = \Sigma f(x, \Delta x, \Delta^2 x, \Delta^3 x),$$

so würde x_1 in zwei Gliedern der Summe vorkommen, x_2 in dreien, x_3 und

alle folgenden, mit Ausnahme der drei letzten, in vier Gliedern. Man müfste daher nach x_3 differentiiren, um die zur Integration erforderliche Differentialgleichung zu erhalten. Schreibt man die vier ersten Glieder der Summe wirklich hin und führt die Operation des Differentiirens aus, so erhält man

$$\frac{\partial f(3)}{\partial x_3} - \Delta\frac{\partial f(2)}{\partial.\Delta x_2} + \Delta^2\frac{\partial f(1)}{\partial.\Delta^2 x_1} - \Delta^3\frac{\partial f(0)}{\partial.\Delta^3 x_0} = 0;$$

welche Gleichung beim Übergang zum Stetigen

$$(4.)\qquad \frac{\partial f}{\partial x} - \partial\cdot\frac{\partial f}{\partial.\partial x} + \partial^2\cdot\frac{\partial f}{\partial.\partial^2 x} - \partial^3\cdot\frac{\partial f}{\partial.\partial^3 x} = 0$$

giebt.

Was zu thun ist, wenn die Function f noch andere Unbekannte enthält und wie diese Formeln fortschreiten, wenn in ihr noch höhere Differentiale vorkommen, ist aus dem bisher Vorgetragenen völlig ersichtlich.

Enthält die Function f, welche unter dem Integralzeichen vorkommt, aufser den Gröfsen x, y noch die Differentiale erster Ordnung ∂x, ∂y dieser Gröfsen, so ist f in Bezug auf diese Differentiale stets eine homogene Function derselben ersten Grades, so dafs also, wenn man ∂x und ∂y kurz durch x' und y' bezeichnet, dem bekannten Satze von den homogenen Functionen gemäfs, stets

$$f = x'\frac{\partial f}{\partial x'} + y'\frac{\partial f}{\partial y'}$$

ist. Differentiirt man diese Gleichung vollständig nach x, y, x', y', so ergiebt sich

$$\frac{\partial f}{\partial x}x' + \frac{\partial f}{\partial y}y' + \frac{\partial f}{\partial x'}x'' + \frac{\partial f}{\partial y'}y'' = x'\partial\cdot\frac{\partial f}{\partial x'} + x''\frac{\partial f}{\partial x'} + y'\partial\cdot\frac{\partial f}{\partial y'} + y''\cdot\frac{\partial f}{\partial y'},$$

oder

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \partial\cdot\frac{\partial f}{\partial x'}\right)x' + \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \partial\cdot\frac{\partial f}{\partial y'}\right)y' = 0.$$

Dieser Satz gilt offenbar für beliebig viele Unbekannte.

Wäre z. B. f eine Function von x, y, z, x', y', z' und in Bezug auf die drei letzten Differentiale homogen vom ersten Grade, so erhielte man ganz auf dieselbe Weise die identische Gleichung

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \partial\cdot\frac{\partial f}{\partial x'}\right)x' + \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \partial\cdot\frac{\partial f}{\partial y'}\right)y' + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \partial\cdot\frac{\partial f}{\partial z'}\right)z' = 0.$$

Die Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \partial\cdot\frac{\partial f}{\partial x'} = 0 \quad\text{und}\quad \frac{\partial f}{\partial y} - \partial\cdot\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$

ziehen daher die dritte Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial z} - \partial \cdot \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

von selbst nach sich, so dafs, wenn z. B. f auch drei Gruppen von veränderlichen, oder in unserem Sinne, unbekannten Gröfsen enthält, doch nur die Differentialgleichungen für zwei derselben aufgestellt zu werden brauchen und die dritte von selbst aus diesen beiden fliefst.

Diese Bemerkung ist für das Folgende nicht ohne Wichtigkeit.

§. 11.

Bei der Lösung der folgenden Aufgaben werden wir uns nun stets dieser *allgemeinen* Formeln bedienen. Da für den Fall *endlicher* Gröfsen Aufgaben dieser Art fast nie gelöset werden können und der Ausdruck für U gewöhnlich eine wesentliche Vereinfachung erfährt, wenn man in ihm nur unendlich kleine Differenzen einführt, so werden wir künftig immer sogleich die Differentiale statt der Differenzen setzen.

Aufgabe. Zwischen den festen Puncten A und A' (Fig. 4) eine Curve zu zeichnen, deren Krümmungshalbmesser AB und $A'B'$ mit ihr und ihrer Evolute BCB' den *kleinsten* Flächenraum einschliefst.

Auflösung. Dieser Flächenraum wird, wenn ϱ der Krümmungshalbmesser und ∂s das Bogen-Element ist, durch das Integral $\frac{1}{2}\int \varrho \, \partial s$ ausgedrückt. Nimmt man für ϱ den Ausdruck $\frac{\partial s^3}{\partial x \partial^2 y - \partial y \partial^2 x}$ und bezeichnet den Nenner dieses Bruches durch z, so wird, wenn man den Factor $\frac{1}{2}$ wegläfst,

$$U = \int \frac{\partial s^4}{z}.$$

Wenn U, wie in diesem Falle, weder x noch y, sondern nur ihre Differentiale enthält, so fällt in der Formel (3. §. 10.) das erste Glied weg und der Rest führt unmittelbar zu dem Integrale

$$(1.) \quad \frac{\partial f}{\partial . \partial x} - \partial \cdot \frac{\partial f}{\partial . \partial^2 x} = a.$$

Im gegenwärtigen Fälle, wo wir x und y als veränderlich ansehen wollen, erhalten wir noch eine zweite solche Gleichung, in welcher y an die Stelle von x tritt. Werden diese Gleichungen für unsere Aufgabe benutzt, so ergiebt sich

$$(2.) \quad \frac{4\partial s^2 \partial x}{z} - \frac{\partial s^4 \partial^2 y}{z^2} - \partial \cdot \frac{\partial s^4 \partial y}{z^2} = a = \frac{4\partial s^2 \partial x}{z} - \frac{2\partial s^4 \partial^2 y}{z^2} - \partial y \, \partial \cdot \frac{\partial s^4}{z^2},$$

$$(3.) \quad \frac{4\partial s^2 \partial y}{z} + \frac{\partial s^4 \partial^2 x}{z^2} + \partial \cdot \frac{\partial s^4 \partial x}{z^2} = b = \frac{4\partial s^2 \partial y}{z} + \frac{2\partial s^4 \partial^2 x}{z^2} + \partial x \, \partial \cdot \frac{\partial s^4}{z^2}.$$

Nachdem diese Gleichungen entwickelt worden sind, darf man ∂s constant annehmen, so dafs also $\partial x\,\partial^2 x + \partial y\,\partial^2 y = 0$ ist und sich hierdurch z oder $\partial x\,\partial^2 y - \partial y\,\partial^2 x$ in $\frac{\partial s^2 \partial^2 y}{\partial x}$ oder $-\frac{\partial s^2 \partial^2 x}{\partial y}$ verwandelt und die Gleichungen (2.) und (3.) in

$$(4.)\qquad \frac{2\partial s^2 \partial x}{z} - \partial s^4 \partial y\,\partial\cdot\frac{1}{z^2} = a \quad \text{und}$$

$$(5.)\qquad \frac{2\partial s^2 \partial y}{z} + \partial s^4 \partial x\,\partial\cdot\frac{1}{z^2} = b$$

übergehen. Aus diesen beiden Gleichungen ergiebt sich sogleich

$$(6.)\qquad 2\partial s^2 = b\,\partial^2 x - a\,\partial^2 y,$$

wovon die beiden Integrale

$$(7.)\qquad 2s + 2\alpha = \frac{b\,\partial x}{\partial s} - \frac{a\,\partial y}{\partial s},$$

$$(8.)\qquad s^2 + 2\alpha s + \beta = bx - ay$$

zur Gleichung der *Cykloïde* führen. Zur Bestimmung der vier Constanten müssen, aufser den Coordinaten der beiden festen Puncte A und A', noch die Tangenten in diesen Puncten oder die Länge der Krümmungshalbmesser oder zwei andere Bestimmungsstücke der Curve gegeben sein. Man wird übrigens nicht ohne Nutzen diese Behandlungsweise der Aufgabe mit den ziemlich umständlichen Rechnungen in dem *Euler*schen Werke über die isoperimetrischen Probleme, oder bei anderen Schriftstellern über denselben Gegenstand, vergleichen.

§. 12.

Wenn die Curve gefunden werden soll, welche durch ihre Umdrehung um die Axe der x eine Oberfläche erzeugt, *die bei der Bewegung in einer Flüssigkeit den kleinsten Widerstand* erfährt, so mufs das Integral $\int \frac{y\,\partial y^3}{\partial s^2}$ zu einem Minimum gemacht werden. Da in diesem Ausdrucke nur ∂x vorkommt, so erhält man nach (1.) in (§. 10.) sogleich das Integral

$$\frac{\partial f}{\partial.\partial x} = a,$$

also hier

$$\frac{y\,\partial y^3\,\partial x}{(\partial x^2 + \partial y^2)^2} = a,$$

oder, für $\frac{\partial y}{\partial x} = p$,

$$(1.)\qquad y = \frac{a(1+p^2)^2}{p^3}.$$

Es ist aber $\partial x = \frac{\partial y}{p}$ oder

$$(2.) \quad x = \int \frac{\partial y}{p} = a\left(\log p + \frac{1}{p^2} + \frac{3}{4p^4}\right) + b.$$

Das Resultat der Elimination von p aus diesen beiden Gleichungen würde die Gleichung der gesuchten Curve sein. Sollte der *Inhalt* des erzeugten *Körpers* oder seine *Oberfläche* eine gegebene Gröfse haben, so müfste man auf bekannte Weise die Ausdrücke

$$\int \frac{y\,\partial y^2}{\partial s^2} + \lambda \int y^2 \partial x \quad \text{oder} \quad \int \frac{y\,\partial y^3}{\partial s^2} + \lambda \int y\,\partial x$$

behandeln.

§. 13.

Aufgabe. Von der Curve EB aus (Fig. 2) soll ein Punct, durch die *Schwere* getrieben, so *schnell als möglich* auf dem Wege BB', dessen Länge L ist, nach der Curve BB' gelangen: es ist die Bahn BB' und die Lage der Puncte B und B' auf den beiden Curven zu bestimmen.

Auflösung. Wirkt die Schwere im Sinne der y nach unten, mit der Intensität g, und übt der bewegte Punct auf seine Bahn den Druck p aus, so sind bekanntlich die Bewegungsgleichungen

$$(1.) \quad \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = p\frac{\partial y}{\partial s}; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -p\frac{\partial x}{\partial s} - g.$$

Ist v die Geschwindigkeit des Puncts zur Zeit t, also $\frac{\partial s}{\partial t} = v$, so erhält man als Integral dieser beiden Gleichungen:

$$(2.) \quad v^2 = c - 2gy.$$

Die Gleichungen der beiden Grenzcurven mögen $\varphi(\xi, \eta) = 0$ und $\varphi'(\xi', \eta') = 0$ sein und der Punct bewege sich schon, ehe er auf die Bahn BB' gelangt, mit einer Geschwindigkeit ϱ, die eine Function der Coordinaten seiner Lage ist, so ist, wenn ξ und η die Coordinaten von B sind, nach (1.)

$$\varrho^2 = c - 2g\eta,$$

also

$$(3.) \quad v^2 = \varrho^2 + 2g(\eta - y).$$

Es sei ϱ eine Function der Coordinaten ξ und η des Puncts in der Curve BE, in welchem sich der bewegte Punct befindet, so dafs also etwa $\varrho^2 = 2gf(\xi, \eta)$ oder, wenn man $f(\xi, \eta)$ durch h bezeichnet, $\varrho^2 = 2gh$ ist.

Dadurch verwandelt sich (3.) in

$$v^2 = 2g(h+\eta-y)$$

oder, wenn man $h+\eta-y=u$ setzt, in

$$v^2 = 2gu;$$

da $v=\frac{\partial s}{\partial t}$, so ist $t=\int\frac{\partial s}{v}=\frac{1}{\sqrt{(2g)}}\int\frac{\partial s}{\sqrt{u}}$. Da nun die Zeit, in welcher der Punct von B nach B' kommt, ein *Minimum* werden soll, so ist, wenn man den Factor $\frac{1}{\sqrt{(2g)}}$ in λ mit begriffen sich vorstellt,

$$U=\int\frac{\partial s}{\sqrt{u}}+\lambda\int\partial s+\mu\varphi+\mu'\varphi'.$$

Hieraus erhält man nach (1. §. 10.), da x in u nicht vorkommt:

$$(4.)\quad \frac{\partial x}{\partial s\sqrt{u}}+\lambda\frac{\partial x}{\partial s}=a.$$

Durch Differentiiren nach y ergiebt sich aus derselben Formel:

$$(5.)\quad \frac{\partial s}{2u^{\frac{3}{2}}}-\partial\left(\frac{\partial y}{\partial s\sqrt{u}}+\lambda\frac{\partial y}{\partial s}\right)=0.$$

Von diesen Gleichungen ist (4.) zur Bestimmung der Bahn hinreichend. Man erhält aus dieser Gleichung (4.), da $u=h+\eta-y$, also $\partial u=-\partial y$ ist,

$$(6.)\quad x=a\int\frac{\sqrt{u}\,\partial u}{\sqrt{(1+2\lambda\sqrt{u}+(\lambda^2-a^2)u)}};$$

ein Ausdruck, der sich endlich integriren läfst.

Für $\lambda=0$ ergiebt sich offenbar die Gleichung einer *Cykloïde*. Bekanntlich ist die Cykloïde wegen dieser Eigenschaft *Brachistochrone* genannt worden.

Wären die Puncte B und B' durch die Coordinaten ξ, η und ξ', η' gegeben und man bezeichnete das Integral in (6.) durch $F(y)$, so dafs, wenn b die Constante der Integration ist, diese Gleichung durch $x=F(y)+b$ dargestellt werden könnte, so hätte man die beiden Gleichungen

$$(7.)\quad \xi=F(y)+b \text{ und } \xi'=F(y')+b, \text{ also } \xi'-\xi=F(y')-F(y).$$

Aus dieser letzten Gleichung und aus

$$(8.)\quad L=\int\partial s=\frac{1}{a}\int\partial x\left(\lambda+\frac{1}{\sqrt{u}}\right)=\int\frac{(1+\lambda\sqrt{u})\partial u}{\sqrt{(1+2\lambda\sqrt{u}+(\lambda^2-a^2)u)}}$$

müssen die Constanten a und λ bestimmt werden.

Sind aber die Puncte B und B' auf den beiden Curven EB und $E'B'$ beweglich, so müssen ξ, η und ξ', η' erst gefunden werden. Die dazu

erforderliche Gleichung erhält man, nach Dem was bisher entwickelt worden ist, wenn man die Differentialquotienten von U nach diesen vier Gröfsen gleich Null setzt. Dabei ist zu bedenken, dafs, wenn man das Integral $\int \partial s\left(\frac{1}{\sqrt{u}}+\lambda\right)$ in seine Theile

$$\partial s_0\left(\frac{1}{\sqrt{u_0}}+\lambda\right)+\partial s_1\left(\frac{1}{\sqrt{u_1}}+\lambda\right)+\partial s_2\left(\frac{1}{\sqrt{u_2}}+\lambda\right)+\cdots+\partial s_{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{u_{n-1}}}+\lambda\right)$$

zerlegt, die Gröfse ξ nur in dem Elemente $\partial s_0=\sqrt{((x_1-\xi)^2+(y_1-\eta)^2)}$, aber in allen den Elementen $u_0, u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$ vorkommt; denn diese Gröfsen enthalten noch ξ, da $u=h+\eta-y$ und h eine Function von ξ und η ist. Eben so verhält es sich mit der Gröfse η. Aber ξ' kommt nur in dem Elemente $\partial s_{n-1}=\sqrt{((\xi'-x_{n-1})^2+(\eta'-y_{n-1})^2)}$ vor, und eben so verhält es sich mit η', welches aufserdem nur noch in dem Elemente $u_{n-1}=h+\eta-\eta'$ erscheint. Mit Rücksicht hierauf erhält man

$$\mu\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}-\left(\frac{1}{\sqrt{u_0}}+\lambda\right)\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)_0-\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial\xi}\int_B^{B'}\frac{\partial s}{u^{\frac{3}{2}}}=0.$$

Nach (5.) ist aber, mit Rücksicht auf (4.),

$$\frac{1}{2}\int\frac{\partial s}{u^{\frac{3}{2}}}=\left(\frac{1}{\sqrt{u}}+\lambda\right)\frac{\partial y}{\partial s}+c=a\frac{\partial y}{\partial x}+c.$$

Wenn man also das Integral zwischen den Grenzen B und B' nimmt, was durch $\int_B^{B'}$ angedeutet werden soll, so erhält man

$$\frac{1}{2}\int_B^{B'}\frac{\partial s}{u^{\frac{3}{2}}}=a\left\{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)'-\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_0\right\};$$

also verwandelt sich die obige Gleichung in

$$(9.)\quad \mu\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}=a+a\frac{\partial u}{\partial\xi}\left\{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)'-\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_0\right\}.$$

Durch Differentiiren nach η erhält man ferner aus U:

$$\mu\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}-\left(\frac{1}{\sqrt{u_0}}+\lambda\right)\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)_0-\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial\eta}\int\frac{\partial s}{u^{\frac{3}{2}}}=0,$$

oder

$$(10.)\quad \mu\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}=a\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_0+a\frac{\partial u}{\partial\eta}\left\{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)'-\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_0\right\}.$$

Da $\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\partial\xi+\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\partial\eta=0$ und $\frac{\partial u}{\partial\xi}\partial\xi+\frac{\partial u}{\partial\eta}\partial\eta=\partial u$ ist, so erhält man aus (9.) und (10.)

$$(11.)\quad \partial\xi+\partial\eta\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_0+\partial\varphi\left\{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)'-\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_0\right\}=0.$$

Durch Differentiiren nach ξ' und η' ergiebt sich aus U, auf eine jetzt völlig verständliche Weise,

$$(12.)\quad \mu'\frac{\partial\varphi'}{\partial\xi'}+\Big(\frac{1}{\sqrt{u_{n-1}}}+\lambda\Big)\Big(\frac{\partial x}{\partial s}\Big)' = 0 \quad\text{oder}\quad \lambda'\frac{\partial\varphi'}{\partial\xi'}+a = 0,$$

$$(13.)\quad \mu'\frac{\partial\varphi'}{\partial\eta'}+\Big(\frac{1}{\sqrt{u_{n-1}}}+\lambda\Big)\Big(\frac{\partial y}{\partial s}\Big)'+\frac{\partial s}{2u^{\frac{3}{2}}} = 0 \quad\text{oder}\quad \lambda'\frac{\partial\varphi'}{\partial\eta'}+a\Big(\frac{\partial y}{\partial x}\Big)' = 0;$$

indem nämlich $\frac{\partial s}{2u^{\frac{3}{2}}}$, als unendlich klein gegen die übrigen Glieder, vernachlässigt werden kann. Eben so wie man (11.) aus (9. und 10.) erhalten hat, findet sich aus (12. und 13.):

$$(14.)\quad \partial\xi'+\partial\eta'\Big(\frac{\partial y}{\partial x}\Big)' = 0.$$

Ist nun zunächst h constant, und enthält nicht ξ und η, so ist Das, was in (11.) ∂u genannt worden ist, nichts anderes als $\partial\eta$; daher verwandelt sich in diesem Falle (11.) in

$$(15.)\quad \partial\xi+\partial\eta\Big(\frac{\partial y}{\partial x}\Big)' = 0;$$

was in Verbindung mit (14.) zu der Gleichung

$$(16.)\quad \frac{\partial\xi}{\partial\eta} = \frac{\partial\xi'}{\partial\eta'}$$

führt. Also sind die Tangenten B und B' an die Curven BE und $B'E'$ einander parallel, und die Bahn, welche der fallende Punct durchläuft, steht, vermöge (14.), in B' auf der Curve $B'E'$ senkrecht.

Aus (4.) ist

$$\Big(\frac{\partial x}{\partial s}\Big)_0 = \frac{a}{\frac{1}{\sqrt{h}}+\lambda}.$$

Hat der fallende Punct bei seinem Ausgange von B keine Geschwindigkeit, so ist $h=0$, also $\Big(\frac{\partial x}{\partial s}\Big)_0=0$; das heifst, das erste Element der Bahn ist von B nach A gerichtet oder *senkrecht*.

Ist aber h nicht constant, sondern ist der Punct von einer gewissen constanten Höhe $\varkappa$ aus bis zum Puncte B gefallen, so wird

$$\varrho^2 = 2g(\varkappa-\eta),$$

also ist $h=\varkappa-\eta$ und $u=\varkappa-\eta+\eta-y=\varkappa-y$ und $\partial u=0$; daher verwandelt sich in diesem Falle (11.) in

$$(17.)\quad \partial\xi+\partial\eta\Big(\frac{\partial y}{\partial x}\Big)_0 = 0;$$

was in Verbindung mit (14.) lehrt, dafs die Bahn BB' auf ***beiden Grenzcurven senkrecht*** steht.

Diese Rechnungen würden nicht viel schwieriger werden, wenn man annähme, dafs der Punct bereits in der Curve BE herabgefallen und dann auf BE übergegangen wäre, wobei der Verlust an Geschwindigkeit bei diesem Übergange mit in Rechnung gebracht werden müfste.

Es ist noch besonders hervorzuheben, dafs bei der gewöhnlichen Behandlungsweise der Probleme der Variationsrechnung die Gleichung (5.) nicht entwickelt wird und diese Gleichung zur Bestimmung der Bahn des fallenden Punctes nicht immer erforderlich ist, sich aufserdem auch aus (4.) ableiten läfst; aber bei der Bestimmung der Grenzpuncte sind beide Gleichungen fast immer nöthig; wie es auch die folgende Aufgabe zeigen wird.

§. 14.

Aufgabe. Die ***Brachistochrone im widerstehenden Mittel*** zu finden.

Diese Aufgabe gehört bekanntlich zu den schwierigsten der Variationsrechnung, und ihre Behandlung nach der Methode dieser Rechnung erfordert eine so bedeutende Kraft der Abstraction und eine so klare Einsicht in das Wesen der Functionen, dafs selbst ***Lagrange*** bei der ***ersten*** Behandlung des Problems in einen Fehler verfiel und nur wenige Mathematiker die Nothwendigkeit der eingeschlagenen Operationen durchschauen mögen, um sie mit Sicherheit in ähnlichen Fällen zu benutzen. Wer den Werth der hier verfolgten Methode zur Lösung der Probleme der Variationsrechnung richtig würdigen will, braucht sich nur in das Labyrinth der ***Lagrange***'schen Speculationen zu vertiefen und dann die einfachen Wege damit zu vergleichen, die zu demselben Ziele führen.

Unter denselben Bedingungen wie in (§. 13.) soll wieder der Körper von B (Fig. 2) ***so schnell als möglich*** nach B' gelangen; aber wir wollen uns jetzt vorstellen, er nehme während seines Laufes ***verschiedene gegebene*** Geschwindigkeiten v_1, v_2, v_3, ... v_n an, welche in den Puncten B_1, B_2, B_3, ... B', deren Lage erst gefunden werden mufs, Statt finden sollen. Wenn der Punct im leeren Raume fällt, so hangen bekanntlich die Geschwindigkeiten, die er in den verschiedenen Orten seiner Bahn annimmt, nur von der Entfernung dieser Puncte von der horizontalen Linie ab, in welcher seine Geschwindigkeit Null war, oder sein würde, wenn er zu ihr gelangte. Schreibt man daher einem so bewegten Puncte die Geschwindigkeiten in den einzelnen Orten seiner

Bahn vor, so ist dadurch diese Bahn schon selbst bestimmt. Soll z. B. die Geschwindigkeit in demselben Verhältnifs wie die Länge des durchlaufenen Weges wachsen, so mufs sich der Punct in einer *Cykloide* bewegen. Anders verhält es sich, wenn die Bewegung des Puncts durch neu hinzutretende Elemente, wie z. B. durch den *Widerstand eines Mediums*, verändert wird. Diesen letztern Fall wollen wir untersuchen, und z. B. annehmen, der Widerstand sei irgend eine *Function der Geschwindigkeit* des fallenden Puncts.

Da die Geschwindigkeiten v_1, v_2, ... v_n gegeben sind, und der Punct diese Geschwindigkeiten zu den Zeiten t_1, t_2, t_3, ... t_n annimmt, so hat man, wenn die Zeit vom Anfang der Bewegung von B aus gezählt wird, die Gleichungen

$$\partial t_0 = t_1 = \frac{\partial s_0}{v_1}, \quad \partial t_1 = t_2 - t_1 = \frac{\partial s_1}{v_2}, \quad \partial t_2 = t_3 - t_2 = \frac{\partial s_2}{v_3}, \quad \dots$$

$$\partial t_{n-1} = t_n - t_{n-1} = \frac{\partial s_{n-1}}{v_n},$$

woraus

$$(1.)\quad t_n = \frac{\partial s_0}{v_1} + \frac{\partial s_1}{v_2} + \frac{\partial s_2}{v_3} + \dots + \frac{\partial s_{n-1}}{v_n} = \int \frac{\partial s}{v}$$

folgt. Setzt man lieber $v_1^2 = 2gu_1$, $v_2^2 = 2gu_2$, ... $v_n^2 = 2gu_n$, wo u_1, u_2, ... u_n die zu den entsprechenden Geschwindigkeiten gehörigen *Fallhöhen* bedeuten, so mufs das Integral (1.) ein *Minimum* werden.

Die Bewegungsgleichungen sind nun, wenn p den Druck auf die Bahn und gw den Widerstand des Mediums bedeuten, wo w irgend eine Function der Geschwindigkeit ist:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = p\frac{\partial y}{\partial s} - gw\frac{\partial x}{\partial s}; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -p\frac{\partial x}{\partial s} - gw\frac{\partial y}{\partial s} - g.$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen den Druck p, so erhält man

$$\tfrac{1}{2}\partial\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2 = -g\,\partial y - gw\,\partial s,$$

oder, wenn man $\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2 = v^2 = 2gu$ setzt,

$$(2.)\quad \partial u + \partial y + w\,\partial s = 0.$$

Diese Gleichung repräsentirt die n Gleichungen

$$u_1 - u_0 + y_1 - \eta + w_1\partial s_0 = 0, \quad \partial u_1 + \partial y_1 + w_2\partial s_1 = 0,$$
$$\partial u_2 + \partial y_2 + w_3\partial s_2 = 0, \quad \dots \quad \partial u_{n-1} + \partial y_{n-1} + w_n\partial s_{n-1} = 0,$$

wo u_0 die Fallhöhe bedeutet, welche der im Ausgangspuncte B Statt findenden

Geschwindigkeit entspricht, und die Widerstände $w_1, w_2, w_3, \dots w_n$ Functionen der ihnen entsprechenden Fallhöhen $u_1, u_2, u_3, \dots u_n$ sind.

Multiplicirt man diese n Gleichungen mit den n Constanten $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_{n-1}$ und stellt die Summe dieser Producte kurz durch $\int \lambda(\partial u + \partial y + w\partial s)$ vor, so erhält man für U den Ausdruck

$$U = \int \frac{\partial s}{\sqrt{u}} + \int \lambda(\partial u + \partial y + w\partial s) + \mu\varphi + \mu'\varphi'.$$

In diesem Ausdrucke sind also nun die Gröfsen u und w als gänzlich unabhängig von x und y zu betrachten. Man erhält daher durch Differentiiren nach x und nach y, unter Benutzung der Formel (1.) in (§. 10.), da hier nur die Differentiale von x und y vorkommen, sofort:

$$(3.)\quad \left(\lambda w + \frac{1}{\sqrt{u}}\right)\frac{\partial x}{\partial s} = a,$$

$$(4.)\quad \left(\lambda w + \frac{1}{\sqrt{u}}\right)\frac{\partial y}{\partial s} + \lambda = b.$$

Eliminirt man λ aus diesen beiden Gleichungen, so findet sich mit Hülfe von (2.):

$$(5.)\quad \begin{cases} x = a\int \dfrac{\partial u}{\sqrt{\left(\left(bw + \frac{1}{\sqrt{u}}\right)^2 - a^2(1-w^2)\right)}} \quad \text{und} \\[2ex] y = \int \dfrac{w\left(bw + \frac{1}{\sqrt{u}}\right)\partial u}{(1-w^2)\sqrt{\left(\left(bw + \frac{1}{\sqrt{u}}\right)^2 - a^2(1-w^2)\right)}} - \int \dfrac{\partial u}{1-w^2}. \end{cases}$$

Da nun w als Function von u gegeben ist, so erhält man aus diesen beiden Gleichungen die Coordinaten der gesuchten Curve, wenn man dem u alle möglichen Werthe beilegt.

Um ξ, η, ξ', η' zu finden, mufs U noch nach diesen Werthen differentiirt werden. Nach (1.) kommen die Coordinaten in dem Nenner des Integrals $\int \frac{\partial s}{\sqrt{u}}$ gar nicht vor; nur das erste und letzte Element des Zählers ∂s_0 und ∂s_{n-1} enthält sie. Eben so wenig finden sie sich in w. Nur im ersten und letzten Theile des Integrals $\int \lambda(\partial u + \partial y + w\partial s)$ in $\lambda_0(u_1 - u_0 + y_1 - \eta + w_0\partial s)$ und in $\lambda_{n-1}(u_n - u_{n-1} + \eta' - y_{n-1} + w_{n-1}\partial s_{n-1})$ erscheinen sie wieder, nämlich in u_0, η, ∂s_0 und in η', ∂s_{n-1}. Man erhält daher

$$(6.)\quad \mu\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} - \frac{\partial x_0}{\sqrt{u_1}\,\partial s_0} - \lambda_0 w_1\frac{\partial x_0}{\partial s_0} - \lambda_0\frac{\partial u_0}{\partial\xi} = 0 \quad \text{oder} \quad \mu\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} = a + \lambda_0\frac{\partial u_0}{\partial\xi}$$

und

$$(7.)\quad \mu\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} - \frac{\partial y_0}{\sqrt{u_1}\,\partial s_0} - \lambda_0 w_1\frac{\partial y_0}{\partial s_0} - \lambda_0\frac{\partial u_0}{\partial\eta} - \lambda_0 = 0 \quad \text{oder} \quad \mu\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = b + \lambda_0\frac{\partial u_0}{\partial\eta}.$$

Da $\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\partial\xi+\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\partial\eta=0$ und $\frac{\partial u_0}{\partial\xi}\partial\xi+\frac{\partial u_0}{\partial\eta}\partial\eta=\partial u_0$ ist, so ergiebt sich aus diesen beiden Gleichungen:

$$(8.)\quad a\partial\xi+b\partial\eta+\lambda_0\partial u_0=0.$$

Ferner ergiebt sich

$$(9.)\quad \mu'\frac{\partial\varphi'}{\partial\xi'}+\frac{\partial x_{n-1}}{\sqrt{u_n}\,\partial s_{n-1}}+\lambda_{n-1}\frac{\partial x_{n-1}}{\partial s_{n-1}}=0 \quad\text{oder}\quad \mu'\frac{\partial\varphi'}{\partial\xi'}+a=0$$

und

$$(10.)\quad \mu'\frac{\partial\varphi'}{\partial\eta'}+\frac{\partial y_{n-1}}{\sqrt{u_n}\,\partial s_{n-1}}+\lambda_{n-1}\frac{\partial y_{n-1}}{\partial s_{n-1}}+\lambda_{n-1}=0 \quad\text{oder}\quad \mu'\frac{\partial\varphi'}{\partial\eta'}+b=0,$$

woraus sich eben wie (8.)

$$(11.)\quad a\partial\xi'+b\partial\eta'=0$$

findet.

Hat nun der fallende Punct auf der Curve *BE* keine Anfangsgeschwindigkeit, so ist $u_0=0$; daher führen in diesem Falle die beiden Gleichungen (8.) und (11.) zu der Gleichung

$$(12.)\quad \frac{\partial\eta}{\partial\xi}=\frac{\partial\eta'}{\partial\xi'}.$$

Hat dagegen der Punct, wenn er von der Curve *BE* ausgeht, dieselbe Geschwindigkeit, die er erhalten haben würde, wenn er von einer beliebigen constanten Höhe h bis zu dem Puncte B gefallen wäre, so ist $u_0=h-\eta$, also $\partial u_0=-\partial\eta$, und (8.) verwandelt sich dadurch in

$$a\partial\xi+(b-\lambda_0)\partial\eta=0.$$

Nach (3.) und (4.) ist aber $b-\lambda_0=a\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_0$; daher wird in diesem Falle:

$$(13.)\quad \partial\xi+\partial\eta\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_0=0.$$

Die Gleichungen (12. und 13.) sind aber ganz dieselben wie (16. und 17.) in (§. 13.), daher gelten auch für die *Brachistochrone im widerstehenden Mittel* dieselben Grenzbedingungen, wie für die *Brachistochrone in der Leere.*

Wer sich die Mühe geben will, bei *Lagrange,* in dessen „Vorlesungen über die Functionen-Rechnung" oder bei irgend einem andern Schriftsteller über denselben Gegenstand, die Behandlung dieser Aufgabe nachzulesen, wird es gerechtfertigt finden, wenn ich schon hier bemerke, daſs sich durch das gegenwärtige Verfahren der gröſste Theil der umfassenden Gedanken, welche *Lagrange* in seine Formeln gebracht hat, durch eine sehr kleine Zahl ganz einfacher Vorstellungen ersetzen läſst.

§. 15.

Es läfst sich auf eine ähnliche Weise die Aufgabe lösen: zu sagen, welche Bahn der Punct unter denselben Bedingungen wie in (§. 14.) zu durchlaufen hat, wenn er von der Curve BE in einer gegebenen Zeit auf dem *möglichst kürzesten* oder *längsten Wege* nach der Curve $B'E'$ gelangen soll. Hätte man in (§. 14.) noch die Bedingung hinzugefügt, dafs der Canal, in welchem der Punct sich bewegt, eine bestimmte Länge haben soll, so wäre zu U noch das Integral $\nu\int\partial s$ hinzugekommen und man hätte den Ausdruck

$$U = \int\frac{\partial s}{\sqrt{u}} + \int\lambda(\partial u + \partial y + w\,\partial s) + \nu\int\partial s + \mu\varphi + \mu'\varphi'$$

oder

$$U = \int\left(\lambda w + \frac{1}{\sqrt{u}} + \nu\right)\partial s + \int\lambda(\partial u + \partial y) + \mu\varphi + \mu'\varphi'$$

zu behandeln gehabt, der für die Entwicklung der nöthigen Gleichungen ebenfalls keine gröfsere Schwierigkeit hat, als die Aufgaben in (§. 14.).

Aber ganz dieselbe Rechnung würde zu gleicher Zeit die oben gestellte Aufgabe lösen; denn ihren Forderungen gemäfs erschiene in U der Theil $\int\partial s + \nu\int\frac{\partial s}{\sqrt{u}}$, statt dafs hier $\int\frac{\partial s}{\sqrt{u}} + \nu\int\partial s$ vorkommt; was sich offenbar blofs durch die für die Constanten gewählten Buchstaben von einander unterscheidet. Es ist nicht unwichtig, diesen *Dualismus* bei den Aufgaben über Maxima und Minima im Auge zu behalten, weil man dadurch öfters zu der allgemeinsten Auffassung des Problems geführt wird.

§. 16.

Aufgabe. Unter denselben Bedingungen wie in (§. 14.) soll die Gestalt des Canals (Fig. 2) BB' von gegebener Länge L so bestimmt werden, dafs der bewegte Punct in der bestimmten Zeit T mit der *möglichst gröfsten* oder *kleinsten Endgeschwindigkeit* in B' anlangt.

Obgleich hier die verschiedenen Fallhöhen u_0, u_1, u_2, ... sämmtlich als unbekannt angenommen werden müssen, so lassen sich doch, nach der Schlufsbemerkung (§. 10.) die beiden allein erforderlichen Differentialgleichungen finden, wenn man den Ausdruck für U in (§. 15.), der für die vorliegende Aufgabe ebenfalls ganz unverändert benutzt werden mufs, nur nach x und y differentiirt. Die Gleichungen, welche so entstehen, sind denen in (§. 14.) ganz ähnlich und die weitere Rechnung, welche hier übergangen werden kann, unterscheidet sich nur durch die Bestimmung der Constanten.

§. 17.

Aufgabe. Auf einer *krummen Fläche*, deren Gleichung $u=0$ zwischen rechtwinkligen Coordinaten ξ, η, ζ gegeben ist, sind zwei Puncte P und P' durch die Coordinaten x_0, y_0, z_0 und x_n, y_n, z_n bestimmt, zwischen welchen ein *Faden von der Länge L so ausgespannt werden soll*, dafs das *Stück* dieser Fläche, welches von dem Faden, der Ebene der $\xi\zeta$ und zwei durch P und P' mit der Ebene der $\eta\zeta$ parallelen Ebenen begrenzt wird, *möglichst grofs oder klein* sei.

Auflösung. Der Cosinus des Winkels, welchen die Normale der krummen Fläche im Puncte ξ, η, ζ mit der Axe ζ bildet, ist $\frac{\partial u}{\partial \zeta}:R$, wenn man $\sqrt{\left(\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right)^2\right)}$ durch R bezeichnet. Der Inhalt des Flächen-Elements, dessen Projection auf die Ebene der $\xi\eta$ durch $\partial\xi\partial\eta$ dargestellt wird, ist daher $\frac{\partial\xi\partial\eta R}{\frac{\partial u}{\partial\zeta}}$. Der Bruch $\frac{R}{\frac{\partial u}{\partial\zeta}}$ ist eine Function von ξ, η, ζ, oder nur von ξ und η, wenn man aus der Gleichung $u=0$ den Werth von ζ durch ξ und η ausdrückt. Diese Function wollen wir durch $f(\xi,\eta)$ bezeichnen, so dafs also das Flächen-Element

$$\partial\xi\partial\eta f(\xi,\eta)$$

ist. Theilt man nun den Faden in n Theile und bezeichnet die Coordinaten der Theilpuncte durch $x_1y_1z_1$, $x_2y_2z_2$, $x_3y_3z_3$, ... $x_{n-1}y_{n-1}z_{n-1}$, so können die Abscissen y_1, y_2, y_3, ... y_{n-1} als *gegebene* Gröfsen betrachtet werden, und nur die $n-1$ Abscissen x_1, x_2, x_3, ... x_{n-1}, von denen die Ordinaten z_1, z_2, z_3, ... z_{n-1}, vermöge der Gleichung $u=0$, Functionen sind, erscheinen als die zu suchenden unbekannten Gröfsen. Der Inhalt des oben bezeichneten Flächenstücks ist also

$$(x_1-x_0)\int_0^{y_0} f(x,\eta)\partial\eta+(x_2-x_1)\int_0^{y_1} f(x_1,\eta)\partial\eta+(x_3-x_2)\int_0^{y_2} f(x_2,\eta)\partial\eta+\cdots$$
$$\cdots+(x_n-x_{n-1})\int_0^{y_{n-1}} f(x_{n-1},\eta)\partial\eta;$$

was ich kurz durch

$$\int_{x_0}^{x_n}\partial x\int_0^{y} f(x,\eta)\partial\eta$$

bezeichnen will. Aufserdem hat man nun noch die Gleichung

$$\sqrt{((x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2)}+\sqrt{((x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2)}$$
$$+\sqrt{((x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2+(z_3-z_2)^2)}+\cdots$$
$$\cdots+\sqrt{((x_n-x_{n-1})^2+(y_n-y_{n-1})^2+(z_n-z_{n-1})^2)}=L,$$

oder kurz

$$\int\sqrt{(\partial x^2+\partial y^2+\partial z^2)} = L.$$

Man erhält daher für U den Ausdruck

$$U = \int_{x_0}^{x_1}\partial x\int_0^y f(x,\eta)\partial\eta + \lambda\int\sqrt{(\partial x^2+\partial y^2+\partial z^2)},$$

der nur nach x_1 differentiirt zu werden braucht, um sogleich die zur Lösung des Problems erforderliche Differentialgleichung zu geben. Man erhält auf diese Weise, wenn man das Bogen-Element ∂s nennt:

$$\int_0^{y_0} f(x_0,\eta)\partial\eta - \int_0^{y_1} f(x_1,\eta)\partial\eta + \partial x_1\int_0^{y_1}\frac{\partial f(x_1,\eta)}{\partial x_1}\partial\eta$$
$$+\lambda\left\{\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{z_1-z_0}{\partial s_1}\frac{\partial z_1}{\partial x_1}-\frac{\partial x_1}{\partial s_1}-\frac{z_2-z_1}{\partial s_1}\frac{\partial z_1}{\partial x_1}\right\} = 0.$$

Es ist aber $\frac{\partial f(x_1,\eta)}{\partial x_1}\partial x_1$ nicht von $f(x_1,\eta)-f(x_0,\eta)$ verschieden; daher sind die drei ersten Integrale dieser Gleichung nichts anderes als $\int_0^{y_0} f(x_0,\eta)\partial\eta$ $-\int_0^{y_1} f(x_0,\eta)\partial\eta = -f(x_0,y)\partial y$, und sie führt daher, wenn man die Zeiger wegläfst, zu der allgemeinen Differentialgleichung der gesuchten Curve:

$$f(x,y)\partial y + \lambda\left\{\partial\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial x}\partial\cdot\frac{\partial z}{\partial s}\right\} = 0.$$

Es ist aber $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial x}:\frac{\partial u}{\partial z}$ und $f(x,\eta) = \sqrt{\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right)}:\frac{\partial u}{\partial z}$ $= R:\frac{\partial u}{\partial z}$: daher verwandelt sich die letzte Gleichung in

$$(1.)\qquad R\partial y = \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}\partial\cdot\frac{\partial z}{\partial s}-\frac{\partial u}{\partial z}\partial\cdot\frac{\partial x}{\partial s}\right).$$

Bezeichnet man die Differentialquotienten, nach s genommen, durch Accente, also $\frac{\partial x}{\partial s}$ durch x', etc., so erhält man aus den Gleichungen

$$u = 0 \quad\text{und}\quad x'^2+y'^2+z'^2 = 1:$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}x'+\frac{\partial u}{\partial y}y'+\frac{\partial u}{\partial z}z' = 0 \quad\text{und}\quad x'x''+y'y''+z'z'' = 0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt durch bekannte Operationen:

$$(2.)\qquad \frac{\frac{\partial u}{\partial z}y''-\frac{\partial u}{\partial y}z''}{x'} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}z''-\frac{\partial u}{\partial z}x''}{y'} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}x''-\frac{\partial u}{\partial x}y''}{z'}$$
$$= \frac{\partial u}{\partial x}(y'z''-z'y'')+\frac{\partial u}{\partial y}(z'x''-x'z'')+\frac{\partial u}{\partial z}(x'y''-y'x'') = \frac{R}{\lambda}.$$

Die Gleichungen der Schmiegungs-Ebene und Berührungs-Ebene im Puncte xyz sind aber, wenn ξ, η, ζ die laufenden Coordinaten bedeuten:

$$(\xi-x)\frac{\partial u}{\partial x}+(\eta-y)\frac{\partial u}{\partial y}+(\zeta-z)\frac{\partial u}{\partial z}=0 \quad \text{und}$$

$$(\xi-x)(y'z''-z'y'')+(\eta-y)(z'x''-x'z'')+(\zeta-z)(x'y''-y'x'')=0.$$

Der Cosinus des Winkels, den beide Ebenen mit einander bilden, ist daher

$$\cos\theta=\frac{\frac{\partial u}{\partial x}(y'z''-z'y'')+\frac{\partial u}{\partial y}(z'x''-x'z'')+\frac{\partial u}{\partial z}(x'y''-y'x'')}{\sqrt{\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right)}\sqrt{(x''^2+y''^2+z''^2)}}.$$

Der Krümmungshalbmesser ϱ des Fadens im Puncte xyz ist aber

$$\varrho=\frac{1}{\sqrt{(x''^2+y''^2+z''^2)}},$$

daher ist nach (2.)

$$(3.)\qquad \varrho=\lambda\cos\theta.$$

Es mögen nun in (Fig. 5) AB und BC zwei Elemente einer auf einer Oberfläche gezeichneten Curve vorstellen, die beide in der Ebene des Papiers liegen, für welche also dieses die Schmiegungs-Ebene der Curve im Puncte B bedeutet. Stellt man sich die Oberfläche als ein Polyëder vor, über dessen sehr kleine Seitenflächen die Curve hingeht, und verlängert die Flächen-Elemente, also die Berührungs-Ebenen, auf denen die Elemente der Curve liegen, so entsteht durch ihren gegenseitigen Durchschnitt eine *abwickelbare* Oberfläche. In der Figur stelle BE die Durchschnittskante zwei solcher in B zusammenstofsender Flächen-Elemente vor, so dafs also BE nicht in der Ebene des Papiers liegt. Das Flächen-Element ABE schneidet die Schmiegungs-Ebene, oder das Papier in AB, also auch in BD, der Verlängerung von AB. Stellt man sich nun das Flächen-Element CBE um BE gedreht vor, bis es in die Ebene EBD oder ABE fällt, so kommt das Curven-Element BC in die Lage BF. Nennt man θ den Winkel welchen die Schmiegungs-Ebene mit der Berührungs-Ebene bildet, so ist in dem sphärischen Dreieck CDE, dessen Kugelmittelpunct B ist, der Winkel $D=\theta$ und, da CDF als ein bei F rechtwinkliges geradliniges Dreieck betrachtet werden kann, so ist

$$\cos\theta=\frac{DF}{DC}.$$

Ist ϱ der Krümmungshalbmesser der auf der Oberfläche gezeichneten Curve im Puncte B, und r der Krümmungshalbmesser der abgewickelten Curve in

demselben Puncte, so ist bekanntlich

$$\varrho.DC = BC \quad \text{und} \quad r.DF = BF = BC,$$

daher

$$\varrho = r\cos\theta.$$

Diesen bekannten Satz, dessen Beweis hier nur der Vollständigkeit wegen angedeutet worden ist, hat *Minding* in einem der früheren Bände dieses Journals auf ähnliche Art bewiesen. Vergleicht man nun (4.) mit (3.), so ergiebt sich, dafs der Faden *dann* ein gröfstes oder kleinstes Stück der Oberfläche begrenzt, wenn er, auf die stetige Folge der Berührungsflächen abgewickelt, die Gestalt eines *Kreises* annimmt: denn der Krümmungshalbmesser r der abgewickelten ebenen Curve nimmt in diesem Falle den constanten Werth λ an. *Delaunay* hat diesen Satz im 8ten Bande des *Liouville*schen Journals auf eine weniger anschauliche Weise ausgesprochen und ihn durch ziemlich verwickelte Rechnungen bewiesen. Auch schon früher ist der Satz in diesem Journale von einem andern Mathematiker bewiesen worden; die von mir geführte Rechnung unterscheidet sich von der dortigen hauptsächlich nur durch gröfsere Symmetrie.

§. 18.

Aufgabe. Unter denselben Bedingungen, wie in der vorigen Aufgabe, soll jetzt der Faden eine solche Gestalt annehmen, dafs der *Körperraum*, welcher zwischen dem oben beschriebenen Flächenstück und seiner senkrechten Projection auf die Ebene der $\xi\eta$ enthalten ist, ein *Maximum* oder *Minimum* wird.

Auflösung. Stellt jetzt $f(\xi,\eta)$ die Ordinate ζ der Oberfläche dar, so bedeutet das Doppel-Integral $\int_{x_0}^{x_n}\partial x\int_0^y f(x,\eta)\partial\eta$ das *Volumen*, welches ein *Maximum* oder *Minimum* werden soll. Man erhält also, ohne neue Rechnung, wenn z statt $f(x,\eta)$ geschrieben wird, aus (1.) im vorigen Paragraphen die Gleichung

$$z\frac{\partial u}{\partial z}\partial y = \lambda\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\partial\cdot\frac{\partial z}{\partial s} - \frac{\partial u}{\partial z}\partial\cdot\frac{\partial x}{\partial s}\Big),$$

welche zur Lösung des Problems hinreicht. Wenn z. B. die Fläche $u = 0$ ein *Umdrehungs-Ellipsoïd* ist, so läfst sich alles Erforderliche durch Quadraturen bestimmen. Eine Ausführung dieser Rechnungen bietet indessen kein

besonderes Interesse dar. Wenn die Endpuncte des Fadens auf *Curven* liegen sollten, die auf der gegebenen Oberfläche verzeichnet sind, würde diese Bedingung ebenfalls leicht mit in Rechnung gebracht werden können.

§. 19.

Aufgabe. Die *Brachistochrone auf einer krummen Fläche* zu berechnen.

Auflösung. Die Gleichung der Fläche sei $u(x, y, z) = 0$ oder kurz $u = 0$. Auf ihr seien zwei Curven gezeichnet, welche durch die Gleichungen $\varphi(\xi, \eta, \zeta) = 0$ und $\varphi'(\xi', \eta', \zeta') = 0$ in Verbindung mit der Gleichung $u = 0$ bestimmt werden. Der Widerstand der Fläche gegen die freie Bewegung des Puncts sei q und bilde mit den Coordinatenaxen die Winkel ε, ε', ε'', so dafs

$$\frac{\partial x}{\partial s}\cos\varepsilon + \frac{\partial y}{\partial s}\cos\varepsilon' + \frac{\partial z}{\partial s}\cos\varepsilon'' = 0$$

ist, indem dieser Widerstand normal auf der Fläche und der Bahn steht. Die Componenten der Kraft, die auf den bewegten Punct einwirkt, nach den Coordinaten-Axen, mögen ganz allgemein X, Y, Z sein. Dann hat man die Bewegungsgleichungen

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = X + q\cos\varepsilon, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = Y + q\cos\varepsilon', \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = Z + q\cos\varepsilon''.$$

Man erhält hieraus auf die bekannte Weise, wenn v die Geschwindigkeit des Puncts bezeichnet:

$$v^2 = C + 2\int(X\partial x + Y\partial y + Z\partial z).$$

Es sei nun der Ausdruck unter dem Integralzeichen ein vollständiges Differential einer Function w von x, y, z, so dafs $X = \frac{\partial w}{\partial x}$, $Y = \frac{\partial w}{\partial y}$, $Z = \frac{\partial w}{\partial z}$, also wenn v_0 und w_0 die Anfangswerthe von v und w sind,

$$(1.) \quad v^2 = v_0^2 - 2w_0 + 2w,$$

also auch $X = v\frac{\partial v}{\partial x}$, $Y = v\frac{\partial v}{\partial y}$ und $Z = v\frac{\partial v}{\partial z}$ ist.

Sind die Coordinaten des Anfangs- und Endpuncts der *Brachistochrone* ξ, η, ζ und $\xi'\ \eta', \zeta'$ und unterscheidet man ferner zwischen beiden noch $n-1$ Puncte auf ihr, deren Coordinaten $x_1 y_1 z_1$, $x_2 y_2 z_2$, ... $x_{n-1} y_{n-1} z_{n-1}$ sein mögen, so finden noch folgende Gleichungen Statt:

$$\left.\begin{matrix}\varphi(\xi, \eta, \zeta) = 0 \\ u(\xi, \eta, \zeta) = 0\end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix}\varphi'(\xi', \eta', \zeta') = 0 \\ u(\xi', \eta', \zeta') = 0\end{matrix}\right\} u(x_1, y_1, z_1) = 0;\ u(x_2, y_2, z_2) = 0; \ \ldots\ u(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}) = 0.$$

Hiernach erhält man

$$U=\int\frac{\partial s}{v}+\lambda\varphi(\xi,\eta,\zeta)+\lambda'\varphi'(\xi',\eta',\zeta')+\mu u(\xi,\eta,\zeta)+\mu' u(\xi',\eta',\zeta')$$
$$+\nu_1 u(x_1,y_1,z_1)+\nu_2 u(x_2,y_2,z_2)+\cdots+\nu_{n-1}u(x_{n-1},y_{n-1},z_{n-1}).$$

Differentiirt man U nach x_1, y_1, z_1, so ergiebt sich für $u(x_1,y_1,z_1)=u(1)$:

$$\nu_1\frac{\partial u(1)}{\partial x_1}-\frac{\partial s}{v^2}\frac{\partial v}{\partial x_1}-\partial\cdot\frac{\partial x}{v\partial s}=0;\quad \nu_1\frac{\partial u(1)}{\partial y_1}-\frac{\partial s}{v^2}\frac{\partial v}{\partial y_1}-\partial\cdot\frac{\partial y}{v\partial s}=0;$$
$$\nu_1\frac{\partial u(1)}{\partial z_1}-\frac{\partial s}{v^2}\frac{\partial v}{\partial z_1}-\partial\cdot\frac{\partial z}{v\partial s}=0.$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen ν_1 und läfst die Zeiger weg, so erhält man die zur Lösung des Problems nöthigen Differentialgleichungen in der Gestalt

$$(2.)\qquad \frac{\frac{\partial s}{v^2}\frac{\partial v}{\partial x}+\partial\cdot\frac{\partial x}{v\partial s}}{\frac{\partial u}{\partial x}}=\frac{\frac{\partial s}{v^2}\frac{\partial v}{\partial y}+\partial\cdot\frac{\partial y}{v\partial s}}{\frac{\partial u}{\partial y}}=\frac{\frac{\partial s}{v^2}\frac{\partial v}{\partial z}+\partial\cdot\frac{\partial z}{v\partial s}}{\frac{\partial u}{\partial z}}.$$

Diese Gleichungen lassen sich auch wie folgt schreiben:

$$(3.)\qquad \frac{\partial\left(\frac{\partial x}{v\partial s}\right)^2-\partial x\frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{1}{v^2}}{\frac{\partial u}{\partial x}}=\frac{\partial\left(\frac{\partial y}{v\partial s}\right)^2-\partial y\frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{1}{v^2}}{\frac{\partial u}{\partial y}}=\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{v\partial s}\right)^2-\partial z\frac{\partial}{\partial z}\cdot\frac{1}{v^2}}{\frac{\partial u}{\partial z}}.$$

Ist die Fläche ein *Cylinder*, dessen Axe die Axe der z ist, so ist $\frac{\partial u}{\partial z}=0$, also

$$(4.)\qquad \partial\left(\frac{\partial z}{v\partial s}\right)^2-\partial z\frac{\partial}{\partial z}\cdot\frac{1}{v^2}=0.$$

Wenn nun noch v zu einer blofsen Function von der Ordinate z wird, also x und y nicht mehr enthält, so folgt aus (4.)

$$\frac{\partial z^2}{v^2\partial s^2}-\frac{1}{v^2}=a$$

oder

$$(5.)\qquad s=\int\frac{\partial z}{\sqrt{(1+av^2)}}.$$

Wirkt z. B. blofs die Schwere im Sinne der z auf den bewegten Punct, so ist $v^2=v_0^2-2gz$ und die Gleichung (4.) stellt dann bekanntlich, wenn die Curve in einer Ebene liegt, eine *Cykloïde* dar. Man sieht aber leicht, dafs jede Gleichung, wie (5.), welche blofs zwischen dem Bogen s und der Ordinate z einer ebenen Curve Statt findet, ungeändert bleibt, wenn man die Curve auf irgend eine cylindrische Fläche so aufwickelt, dafs die Ordinaten z

der Axe des Cylinders parallel bleiben. Wenn man also die Brachistochrone auf irgend einer cylindrischen Fläche, bei welcher die Schwere in der Richtung der Axe gewirkt hat, auf eine Ebene *abwickelt*, so nimmt sie die Gestalt einer *Cykloïde* an.

Ist die krumme Fläche eine *Umdrehungsfläche*, deren Axe mit der Axe der z zusammenfällt, so dafs sie, wenn r irgend eine Function von z bedeutet, die Gestalt

$$x^2+y^2 = r^2$$

annimmt, so wird $\frac{\partial u}{\partial x}=2x$, $\frac{\partial u}{\partial y}=2y$ und man erhält aus den beiden ersten Brüchen in (2.), wenn noch v eine blofse Function von z, also $\frac{\partial v}{\partial x}=0$ und $\frac{\partial v}{\partial y}=0$ ist.

$$(7.) \quad x\partial\cdot\frac{\partial y}{v\partial s}-y\partial\cdot\frac{\partial x}{v\partial s} = 0,$$

wovon das Integral

$$(8.) \quad \frac{x\partial y}{v\partial s}-y\frac{\partial x}{v\partial s} = b$$

ist. Aus (6.) erhält man aber

$$x\partial x+y\partial y = r\frac{\partial r}{\partial z}\partial z = rr'\partial z,$$

und aus (8.)

$$x\partial y-y\partial x = bv\partial s.$$

Addirt man die Quadrate der letzten beiden Gleichungen, so ergiebt sich

$$(x^2+y^2)(\partial x^2+\partial y^2) = r^2(\partial x^2+\partial y^2) = r^2r'^2\partial z^2+b^2v^2\partial s^2,$$

also

$$\partial x^2+\partial y^2+\partial z^2 = \partial s^2 = (1+r'^2)\partial z^2+\frac{b^2v^2\partial s^2}{r^2},$$

folglich

$$(9.) \quad s = \int r\,\partial z\sqrt{\left(\frac{1+r'^2}{r^2-b^2v^2}\right)}.$$

Es ist ferner

$$\partial.\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \frac{x\partial y-y\partial x}{x^2+y^2} = \frac{x\partial y-y\partial x}{r^2} = \frac{bv\partial s}{r^2}.$$

also, vermöge (8.),

$$(10.) \quad \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = b\int\frac{v\partial z}{r}\sqrt{\left(\frac{1+r'^2}{r^2-b^2v^2}\right)}.$$

Da nun r, r', v Functionen der einzigen Veränderlichen z sind, so ist das Problem auf *Quadraturen* gebracht. Für andere Fälle hat die Lösung der Aufgabe gröfsere Schwierigkeiten.

Um die Grenzgleichungen zu finden, mufs U nach ξ, η, ζ und ξ', η', ζ' differentiirt werden. Die Gröfsen v_0 und w_0 werden im Allgemeinen Functionen von ξ, η, ζ sein, und zwar wird w_0 die gleiche Function dieser Gröfsen sein wie w von x, y, z. Die Anfangsgeschwindigkeit v_0 kann auch constant, oder Null sein. Im allgemeinsten Falle erhält man daher, ähnlich wie in (§. 13.):

$$\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+\mu\frac{\partial u}{\partial\xi}-\left(\frac{\partial x}{v\partial s}\right)_0-\left(v_0\frac{\partial v_0}{\partial\xi}-\frac{\partial w_0}{\partial\xi}\right)\int\frac{\partial s}{v^3}=0,$$

$$\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}+\mu\frac{\partial u}{\partial\eta}-\left(\frac{\partial y}{v\partial s}\right)_0-\left(v_0\frac{\partial v_0}{\partial\eta}-\frac{\partial w_0}{\partial\eta}\right)\int\frac{\partial s}{v^3}=0,$$

$$\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}+\mu\frac{\partial u}{\partial\zeta}-\left(\frac{\partial z}{v\partial s}\right)_0-\left(v_0\frac{\partial v}{\partial\zeta}-\frac{\partial w_0}{\partial\zeta}\right)\int\frac{\partial s}{v^3}=0.$$

Multiplicirt man diese drei Gleichungen mit $\partial\xi$, $\partial\eta$, $\partial\zeta$ und addirt die drei Producte, so findet sich

$$(11.)\quad \partial\xi\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)_0+\partial\eta\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)_0+\partial\zeta\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)_0+v_0(v_0\partial v_0-\partial w_0)\int\frac{\partial s}{v^3}=0.$$

Da v kein ξ', η', ζ' enthält, so ist die zweite Grenzbedingung offenbar

$$(12.)\quad \partial\xi'\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)'+\partial\eta'\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)'+\partial\zeta'\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)'=0.$$

In diesen Formeln bedeuten $\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)_0$ und $\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)'$ die Werthe, welche $\frac{\partial x}{\partial s}$ an der ersten und zweiten Grenzcurve annimmt. Aus (12.) sieht man, dafs die Brachistochrone, selbst wenn beliebige Kräfte auf den bewegten Punct einwirken, auf der zweiten Grenzcurve ***senkrecht*** steht. Ihre Lage gegen die erste Grenzcurve hangt aber, nach (1.), von dem mit dem Integralzeichen verbundenen Ausdrucke ab.

Wären gar keine beschleunigenden Kräfte da, sondern der Punct würde nur durch einen Stofs in Bewegung gesetzt, so ist seine Bahn offenbar eine kürzeste Linie auf der krummen Fläche. Die Gleichung für diese kürzeste Linie ist dann aus (2.), da v constant ist:

$$(13.)\quad \frac{\partial\cdot\frac{\partial x}{\partial s}}{\frac{\partial u}{\partial x}}=\frac{\partial\cdot\frac{\partial y}{\partial s}}{\frac{\partial u}{\partial y}}=\frac{\partial\cdot\frac{\partial z}{\partial s}}{\frac{\partial u}{\partial z}};$$

und da jetzt in (11.) der Integral-Ausdruck verschwindet, so steht die kürzeste Linie auf beiden Grenzcurven ***senkrecht***. Es ist kaum nöthig, zu bemerken, dafs man die Gleichungen für die kürzeste Linie unmittelbar erhält, wenn $\int\partial s$ statt $\int\frac{\partial s}{v}$ in den Ausdruck für U gesetzt wird.

§. 20.

Aufgabe. In den Puncten A und B (Fig. 8) sind die Enden eines Fadens von der Länge l befestigt und in den Puncten A' und B' befinden sich die Endpuncte eines Fadens von der Länge λ. Die vier Puncte A, B, A', B' liegen nicht in einer und derselben Ebene. Von der Lage AB geht eine gerade Linie in die Lage $A'B'$ so über, dafs sie die Fäden l und λ in gleicher Zeit mit gleichförmiger Geschwindigkeit durchläuft und dadurch eine *abwickelbare* Fläche beschreibt. Man soll die Form der beiden Fäden so bestimmen, dafs diese Fläche ein *Maximum* oder *Minimum* wird.

Auflösung. Die laufenden Coordinaten des Fadens l mögen durch x, y, z, und die der Puncte A und B durch x_0, y_0, z_0 und x', y', z' bezeichnet werden. Eben so mögen ξ, η, ζ die laufenden Coordinaten des Fadens λ und ξ_0, η_0, ζ_0 und ξ', η', ζ' die seiner Endpuncte A', B' sein. Die Elemente der Fäden l und λ sollen entsprechend durch ∂s und $\partial\sigma$ bezeichnet werden. Die Entfernung zwischen den Puncten $\xi\eta\zeta$ und xyz sei r, so dafs

$$r^2 = (x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2 \quad \text{und}$$

$$r\partial r = (x-\xi)\partial x+(y-\eta)\partial y+(z-\zeta)\partial z$$
$$-(x-\xi)\partial\xi-(y-\eta)\partial\eta-(z-\zeta)\partial\zeta$$

ist. Da nun r als Function der Bogen s und σ betrachtet werden kann, und diese entsprechende Functionen von x, y, z und ξ, η, ζ sind, so ist

$$\frac{\partial r}{\partial s} = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s},$$

$$\frac{\partial r}{\partial s} = \frac{\partial r}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial \sigma}+\frac{\partial r}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial \sigma}+\frac{\partial r}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial \sigma}.$$

Die Cosinus der Winkel, welche diese Gerade mit den Axen bildet, sind $\frac{x-\xi}{r}=\frac{\partial r}{\partial x}$, $\frac{y-\eta}{r}=\frac{\partial r}{\partial y}$, $\frac{z-\zeta}{r}=\frac{\partial r}{\partial z}$ und die Cosinus der Winkel, welche das Element ∂s mit den Axen macht, sind $\frac{\partial x}{\partial s}$, $\frac{\partial y}{\partial s}$, $\frac{\partial z}{\partial s}$, daher ist

$$\frac{(x-\xi)\partial x+(y-\eta)\partial y+(z-\zeta)\partial z}{r\partial s} = \frac{\partial r}{\partial s}$$

der Cosinus des Winkels, den r mit ∂s bildet. Der Inhalt des Dreiecks aber, von welchem r und ∂s zwei Seiten sind, wird gefunden, wenn man $\frac{1}{2}r\partial s$ mit dem Sinus des von r und ∂s gebildeten Winkels multiplicirt; daher ist der Inhalt dieses Elementar-Dreiecks

$$\tfrac{1}{2}r\partial s\sqrt{\left(1-\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2\right)},$$

Eben so ist der Inhalt des Elementar-Dreiecks, von welchem r und $\partial\sigma$ zwei Seiten sind,

$$\tfrac{1}{2} r\,\partial\sigma \sqrt{\left(1-\left(\frac{\partial r}{\partial\sigma}\right)^2\right)};$$

also ist der Inhalt des windschiefen Elementar-Vierecks zwischen den vier Puncten (xyz), $(\xi\eta\zeta)$, $(x+\partial x, y+\partial y, z+\partial z)$, $(\xi+\partial\xi, \eta+\partial\eta, \zeta+\partial\zeta)$ gleich

$$\tfrac{1}{2} r\left\{\partial s\sqrt{\left(1-\frac{\partial r^2}{\partial s^2}\right)}+\partial\sigma\sqrt{\left(1-\frac{\partial r^2}{\partial\sigma^2}\right)}\right\}.$$

Da nun die Fäden zwischen A, B und A', B' gegebene Längen l und λ haben, so ist der Ausdruck für U, wenn m und μ zwei Constanten sind,

$$U=\int\left\{r\,\partial s\sqrt{\left(1-\frac{\partial r^2}{\partial s^2}\right)}+m\,\partial s\right\}+\int\left\{r\,\partial\sigma\sqrt{\left(1-\frac{\partial r^2}{\partial\sigma^2}\right)}+\mu\,\partial\sigma\right\}$$

oder

$$U=\int\{\sqrt{[r^2\partial s^2-((x-\xi)\partial x+(y-\eta)\partial y+(z-\zeta)\partial z)^2]}+m\,\partial s\}$$
$$+\int\{\sqrt{[r^2\partial\sigma^2-((x-\xi)\partial\xi+(y-\eta)\partial\eta+(z-\zeta)\partial\zeta)^2]}+\mu\,\partial\sigma\},$$

wo

$$\partial s^2=\partial x^2+\partial y^2+\partial z^2 \quad\text{und}\quad \partial\sigma^2=\partial\xi^2+\partial\eta^2+\partial\zeta^2$$

ist. Bezeichnet man der Kürze wegen $(x-\xi)\partial x+(y-\eta)\partial y+(z-\zeta)\partial z$ durch t und $(x-\xi)\partial\xi+(y-\eta)\partial\eta+(z-\zeta)\partial\xi$ durch τ und setzt $r^2\partial s^2-t^2=v^2$ und $r^2\partial\sigma^2-\tau^2=\varphi^2$, so erhält man durch Addition der Gleichungen

$$\frac{\partial U}{\partial x}-\partial\cdot\frac{\partial U}{\partial.\partial x}=0 \quad\text{und}\quad \frac{\partial U}{\partial\xi}-\partial\cdot\frac{\delta U}{\partial.\partial\xi}=0,$$

da $\frac{\partial U}{\partial x}-\partial\cdot\frac{\partial U}{\partial\xi}=0$ ist, ein Integral von der Form

$$\left(\frac{r^2}{v}+\frac{m}{\partial s}\right)\partial x+\left(\frac{r^2}{\varphi}+\frac{\mu}{\partial\sigma}\right)\partial\xi-(x-\xi)\left(\frac{t}{v}+\frac{\tau}{\varphi}\right)=a,$$

und auf gleiche Weise die beiden andern Integrale

$$\left(\frac{r^2}{v}+\frac{m}{\partial s}\right)\partial y+\left(\frac{r^2}{\varphi}+\frac{\mu}{\partial\sigma}\right)\partial\eta-(y-\eta)\left(\frac{t}{v}+\frac{\tau}{\varphi}\right)=b,$$

$$\left(\frac{r^2}{v}+\frac{m}{\partial s}\right)\partial z+\left(\frac{r^2}{\varphi}+\frac{\mu}{\partial\sigma}\right)\partial\zeta-(z-\zeta)\left(\frac{t}{v}+\frac{\tau}{\varphi}\right)=c.$$

Die übrigen drei Integrale, welche die Lösung der Aufgabe noch erfordert, lassen sich in diesem allgemeinen Falle nicht finden. Wenn der Ausdruck für U von einer Veränderlichen nur die Differentiale und nicht sie selbst enthält, so findet man nach den bekannten Gleichungen in (§. 10.) sogleich ein Integral zur Lösung des Problems; daher ist es zweckmäfsig, U durch Ein-

führung neuer Veränderlichen so umzuformen, dafs von einigen derselben nur noch die Differentiale vorkommen. Ist z. B. der Faden λ in der Axe der z zu einer geraden Linie ausgespannt, so wird $\xi=0$, $\eta=0$, $\partial\sigma=\partial\xi$, und U verwandelt sich, wenn man $x=p\cos\theta$, $y=p\sin\theta$ und $z-\zeta=q$ setzt, wodurch $r^2=p^2+q^2$; $x\partial x+y\partial y=p\partial p$ und $\partial s^2=\partial p^2+p^2\partial\theta^2+\partial z^2$ wird, in

$$U=\int\{\sqrt{((p^2+q^2)\partial s^2-(p\partial p+q\partial z)^2)}+m\sqrt{(\partial p^2+p^2\partial\theta^2+\partial z^2)}+(p+\mu)(\partial z-\partial q)\}.$$

Da hier von θ und z nur die Differentiale vorkommen, so erhält man, wenn die erste Wurzelgröfse durch ∂v bezeichnet wird, sogleich die beiden Integrale

$$(1.)\quad (p^2+q^2)p^2\frac{\partial\theta}{\partial v}+mp^2\frac{\partial\theta}{\partial s}=a \quad\text{und}$$

$$(2.)\quad \frac{(p^2+q^2)\partial z-(p\partial p+q\partial z)q}{\partial v}+m\frac{\partial z}{\partial s}+p=b,$$

wo in der letzten Gleichung die Constante b aus $c-\mu$ besteht. Entwickelt man nun noch $\frac{\partial U}{\partial q}-\partial\cdot\frac{\partial U}{\partial.\partial q}=0$, so erhält man

$$(3.)\quad \frac{q\partial s^2-(p\partial p+q\partial z)\partial z}{\partial v}+\partial p=0.$$

Wird aus dieser Gleichung ∂v^2 entwickelt, so gelangt man leicht zu der Gleichung

$$(4.)\quad p\partial p+q\partial z=q\partial s,$$

welche sogleich zu $\partial v=-p\partial s$ führt, woraus sich dann

$$(5.)\quad \frac{p\partial p+q\partial z}{\partial v}=-\frac{q}{p}$$

ergiebt. Hierdurch erhält man aus (1.) und (2.)

$$(6.)\quad \frac{\partial\theta}{\partial s}=-\frac{a}{p(p^2+q^2-mp)} \quad\text{und}\quad (7.)\quad \frac{\partial z}{\partial s}=\frac{p^2+q^2-bp}{p^2+q^2-mp},$$

und da $\frac{\partial p^2}{\partial s^2}=1-\frac{\partial z^2}{\partial s^2}-p^2\frac{\partial\theta^2}{\partial s^2}$ ist, so wird

$$(8.)\quad \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)^2=\frac{2(b-m)p(p^2+q^2)-(b^2-m^2)p^2-a^2}{(p^2+q^2-mp)^2}.$$

Aus dem Quadrate der Gleichung (4.) erhält man

$$(p^2-q^2)\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)^2+2pq\frac{\partial p}{\partial s}\frac{\partial z}{\partial s}=p^2q^2\left(\frac{\partial\theta}{\partial s}\right)^2.$$

Setzt man in diese Gleichung die Werthe von $\frac{\partial p}{\partial s}$, $\frac{\partial z}{\partial s}$, $\frac{\partial\theta}{\partial s}$, so ergiebt sich eine Gleichung zwischen p und q, aus welcher q als Function von p

bestimmt und in (5., 7. und 8.) eingesetzt werden mufs, wodurch dann das Problem auf Quadraturen gebracht ist.

Ist q constant, so liefern schon die Gleichungen (6., 7. und 8.) die zur weitern Rechnung nöthigen Ausdrücke. Für $q=z$ ist $\zeta=0$, und alle Gleichungen lassen sich dann vollständig integriren; was sich auch von selbst versteht, da die Fläche jetzt eine Kugelfläche ist und der Faden l die Gestalt eines Kreisbogens annehmen mufs, wenn man die Kugelfläche auf eine Ebene abwickelt.

§. 21.

Aufgabe. Auf die gleichförmig schwere Linie BB' (Fig. 2) wirkt die *Schwere* im Sinne der Ordinaten YX. Die Linie hat die constante Länge l und ist auf den Curven EB und $E'B'$, deren Gleichungen $\varphi(\xi,\eta)=0$ und $\varphi'(\xi',\eta')=0$ sind, frei beweglich. Welche Gestalt mufs die Linie annehmen, *wenn ihr Schwerpunct möglichst tief* liegen soll?

Auflösung. Die Ordinate des Schwerpuncts ist $g=\frac{\int^{l} y\partial s}{l}$, und ferner ist $l=\int\sqrt{(\partial x^2+\partial y^2)}$; daher ist, wenn μ und μ' Constanten sind,

$$U=\frac{\int y\partial s}{\int\partial s}+\lambda\int\partial s+\mu\varphi+\mu'\varphi'.$$

Nun ist $\frac{\partial U}{\partial x_1}=\frac{y\frac{\partial x}{\partial s}-y_1\frac{\partial x_1}{\partial s_1}}{\int\partial s}-\frac{\int y\partial s}{(\int\partial s)^2}\Big(\frac{\partial x}{\partial s}-\frac{\partial x_1}{\partial s_1}\Big)+\lambda\Big(\frac{\partial x}{\partial s}-\frac{\partial x_1}{\partial s_1}\Big)=0$ oder

$$(1.)\quad \partial.y\frac{\partial x}{\partial s}-(g-\lambda l)\partial\cdot\frac{\partial x}{\partial s}=0.$$

Ganz eben so erhält man, wenn man $\frac{\partial U}{\partial x_2}$, $\frac{\partial U}{\partial x_3}$, u. s. w. bestimmt:

$$\partial.y_1\frac{\partial x_1}{\partial s_1}-(g-\lambda l)\partial\cdot\frac{\partial x_1}{\partial s_1}=0,$$
$$\partial.y_2\frac{\partial x_2}{\partial s_2}-(g-\lambda l)\partial\cdot\frac{\partial x_2}{\partial s_2}=0,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

Zieht man die erste dieser Gleichungen von der zweiten ab, so erhält man

$$\partial^2.y\frac{\partial x}{\partial s}-(g-\lambda l)\partial^2\cdot\frac{\partial x}{\partial s}=0;$$

so dafs also $g-\lambda l$ in (1.) als eine Constante betrachtet werden kann, die wir der Kürze wegen durch a bezeichnen wollen. Das Integral von (1.) ist daher

$$(2.)\quad (y-a)\frac{\partial x}{\partial s}=b.$$

Aus dieser Gleichung allein schon ergiebt sich die Natur der gesuchten Curve; indessen ist die Entwicklung von $\frac{\partial U}{\partial y_1}$ noch zu den Grenzbestimmungen nützlich. Man erhält nämlich

$$\frac{\partial s}{\int \partial s} - \frac{\partial . y\frac{\partial y}{\partial s}}{\int \partial s} + \frac{\int y \partial s}{(\int \partial s)^2}\partial \cdot \frac{\partial y}{\partial s} - \lambda \partial \cdot \frac{\partial y}{\partial s} = 0 \quad \text{oder}$$

$$\partial s - \partial \cdot y\frac{\partial y}{\partial s} + (g - \lambda l)\partial \cdot \frac{\partial y}{\partial s} = 0,$$

wovon das Integral

$$(3.) \quad (y-a)\frac{\partial y}{\partial s} = s + c$$

ist. Die Summe der Quadrate der beiden letzten Gleichungen ist $(y-a)^2 = b^2 + (s+c)^2$, oder, da $y = \eta$ ist, für $x = 0$,

$$(4.) \quad y = \eta + \sqrt{(b^2 + (s+c)^2)} - \sqrt{(b^2 + c^2)}.$$

Hierdurch erhält man aus (2.)

$$(5.) \quad \partial x = \frac{b \partial s}{\sqrt{(b^2 + (s+c)^2)}}, \quad \text{also} \quad x = \xi + b \log \frac{s + c + \sqrt{(b^2 + (s+c)^2)}}{c + \sqrt{(b^2 + c^2)}}.$$

Die Curve mufs also eine *Kettenlinie* bilden. Zur Bestimmung der Lage der Endpuncte der Curve erhält man noch durch Differentiiren nach ξ, η, ξ', η' aus U, wenn man die Integrale in ihre Elemente zerlegt:

$$\frac{-\left(y\frac{\partial x}{\partial s}\right)_0}{l} + \left(\frac{g}{l} - \lambda\right)\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)_0 + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = 0 \text{ oder vermöge (2.), } \mu l \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = b, \text{ und}$$

$$\frac{-\left(\eta\frac{\partial y}{\partial s}\right)_0}{l} + \left(\frac{g}{l} - \lambda\right)\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)_0 + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0 \text{ oder vermöge (3.), } \mu l \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = c.$$

Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen mit $\partial \xi$, die zweite mit $\partial \eta$ und addirt die beiden Producte, so erhält man, da $\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\partial \xi + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\partial \eta = 0$ ist,

$$(6.) \quad b\partial \xi + c \partial \eta = 0.$$

Eben so gelangt man für die zweite Grenzcurve zu der Gleichung

$$(7.) \quad b\partial \xi' + (l + c)\partial \eta' = 0.$$

Aus (2. und 3.) ist aber

$$b \partial \eta = (s + c)\partial x,$$

also $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_0 = \frac{c}{b} = -\frac{\partial \xi}{\partial \eta}$ und $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)' = \frac{l+c}{b} = -\frac{\partial \xi}{\partial \eta'}$, so dafs also die Kettenlinie auf den beiden Grenzcurven senkrecht stehen mufs; was auch ohne

Rechnung ersichtlich ist. Für $s=0$ verwandelt sich x in ξ und y in η, und für $s=l$ geht x in ξ' und y in η' über, daher erhält man aus (5. und 4.) die Gleichungen

$$(8.)\quad \xi'-\xi = b\log\frac{l+c\sqrt{(b^2+(l+c)^2)}}{c+\sqrt{(b^2+c^2)}} \quad \text{und}$$

$$(9.)\quad \eta'-\eta = \sqrt{(b^2+(l+c)^2)}-\sqrt{(b^2+c^2)}.$$

Aus den 4 letzten Ausdrücken und den Gleichungen $\varphi(\xi,\eta)=0$ und $\varphi'(\xi',\eta')=0$ lassen sich die 6 Unbekannten $b, c, \xi, \eta, \xi', \eta'$ leicht berechnen. Wären die Endpuncte der Kettenlinie fest, so fielen die beiden Gleichungen (6. und 7.) weg und man müfste b und c aus den beiden Gleichungen (8. und 9.) suchen; was eine etwas mühsamere Rechnung erfordert.

In ähnlicher Weise läfst sich auch die Aufgabe lösen, wenn die Grenzcurven, auf denen sich die Endpuncte des Fadens l befinden, selbst wieder bewegliche schwere Fäden sind.

Ist der schwere Faden l auf einer *krummen Fläche* beweglich, deren Gleichung $u=0$ ist, und sein Schwerpunct soll eine *möglichst hohe oder tiefe* Stelle einnehmen, so ist, wenn die Schwere im Sinne der z wirkt, das Integral $\frac{\int z\partial s}{\int \partial s}=g$ zu einem Maximum oder Minimum zu machen, während das Integral $\int\partial s$ einen constanten Werth behält. Sind die Endpuncte des Fadens aufserdem auch auf Linien beweglich, die auf der krummen Oberfläche gezeichnet sind und deren Gleichungen $\varphi(\xi,\eta,\zeta)=0$ und $\varphi'(\xi',\eta',\zeta')=0$ sein mögen, so erhält man für U, ganz wie in (§. 19.), den Ausdruck

$$U=\frac{\int z\partial s}{\int\partial s}+\lambda\int\partial s+\mu\varphi+\mu'\varphi'+\nu u+\nu'u'+\nu_1u_1+\nu_2u_2+\nu_3u_3+\dots+\nu_{n-1}u_{n-1};$$

wo unter u, u' und u_m die Functionen $u(\xi,\eta,\zeta)$, $u(\xi',\eta',\zeta')$ und $u(x_m,y_m,z_m)$ verstanden werden und die $\lambda, \mu, \nu, \dots$ Constanten sind.

Bezeichnet man wieder, wie vorher, $\frac{\int z\partial s}{\int\partial s}-\lambda\int\partial s$ durch a, so erhält man, wenn nach x_1, y_1, z_1 differentiirt wird,

$$(10.)\quad \partial.(z-a)\frac{\partial x}{\partial s}=\nu_1 l\frac{\partial u}{\partial x};\quad \partial.(z-a)\frac{\partial y}{\partial s}=\nu_1 l\frac{\partial u}{\partial y};\quad \partial.(z-a)\frac{\partial z}{\partial s}=\nu_1 l\frac{\partial u}{\partial z}+\partial s.$$

Wie in der vorigen Aufgabe zeigt sich auch hier, dafs die Gröfse a als eine Constante betrachtet werden kann. Eliminirt man aus diesen Gleichungen $\nu_1 l$, so erhält man

$$(11.)\quad \frac{\partial.(z-a)\frac{\partial x}{\partial s}}{\frac{\partial u}{\partial x}}=\frac{\partial.(z-a)\frac{\partial y}{\partial s}}{\frac{\partial u}{\partial y}}=\frac{\partial.(z-a)\frac{\partial z}{\partial s}-\partial s}{\frac{\partial u}{\partial z}}.$$

Ist die Fläche eine cylindrische oder Umdrehungsfläche, so kann man, um das Problem auf Quadraturen zu bringen, ganz wie oben verfahren. Auch die Grenzbedingungen werden auf eine ähnliche Weise gefunden.

§. 22.

Aufgabe. Der Linie *BB'* (Fig. 2), von gegebener Länge *l*, eine solche Gestalt zu geben, dafs der *Schwerpunct des Flächenstücks ABB'A'*, dessen Gröfse *f* ist, *möglichst tief* fällt.

Auflösung. Die Entfernung des Schwerpuncts *g* dieser Figur von der Axe *AA'* der *x* ist $\frac{\int y^2 \partial x}{2\int y\,\partial x} = g$, während $\int y\,\partial x = f$ und $\int \partial s = l$ ist. Man hat daher

$$U = \frac{\int y^2 \partial x}{\int y \partial x} + \lambda \int \partial s + \mu \int y\,\partial x.$$

Nimmt man hieraus $\frac{\partial U}{\partial x_1} = 0$, so erhält man

$$\frac{y^2 - y_1^2}{\int y \partial x} - \frac{\int y^2 \partial x}{(\int y \partial x)^2}(y - y_1) + \lambda\left(\frac{\partial x}{\partial s} - \frac{\partial x_1}{\partial s_1}\right) + \mu(y - y_1) = 0$$

oder

$$(1.) \quad \partial . y^2 - (g - \mu f)\partial y + \lambda f \partial \cdot \frac{\partial x}{\partial s} = 0.$$

Solcher Gleichungen ergeben sich nun so viele als man Abscissen auf *AA'* angenommen hat; daher ist die Gröfse $g - \mu f$ als Constante zu betrachten und das Integral von (1.) wird

$$(2.) \quad y^2 - (g - \mu f) y + \lambda f \frac{\partial x}{\partial s} = a;$$

was bekanntlich die Differentialgleichung einer *elastischen Curve* ist.

§. 23.

Die folgenden Betrachtungen werden besonders geeignet sein, zu einer leichten und elementaren Lösung vieler Aufgaben über *Maxima* und *Minima* zu führen, und ich empfehle sie daher vorzüglich der Beachtung der Lehrer an den höheren Lehr-Anstalten, da sie mit dem besten Erfolge auch auf die allereinfachsten Fälle angewandt werden können und die Lehre vom Gröfsten und Kleinsten die Theilnahme der Schüler im höchsten Maafse in Anspruch nimmt.

Es sei, in (Fig. 6) *LMX* eine Curve, deren Puncte auf irgend eine Weise auf den Punct *P* in ihrer Ebene *einwirken*, z. B. ihn *anziehen, magnetisiren, erleuchten,* oder *erwärmen.* Diese Wirkung kann etwa blofs von der *Entfernung MP, AP,* ... oder auch von dem *Winkel* abhangen, den diese

Linien mit den Tangenten der Curve an M, A, ... bilden; sie kann überhaupt auf die mannigfaltigste Weise modificirt sein.

In allen diesen Fällen wird sich stets für einen beliebigen Punct M auf PM ein Stück P_m willkürlich annehmen lassen, welches die Stärke der Einwirkung von M auf P darstellt, und wenn nun dieselbe Construction für alle Puncte der Linie $MXLN$ nach dem Maafse MP ausgeführt wird, so erhält man eine zweite Linie $mxln$, welche die *Kraftlinie* der ersten genannt werden mag. Man kann sich stets vorstellen, dafs die Polargleichung der Linie MXN in Bezug auf den Punct P als Pol gegeben ist, oder doch leicht gefunden werden kann. Bezeichnet man nun durch r die Vectoren PM und durch θ den Winkel, den r mit irgend einer festen Geraden bildet, und stellt $r = f(\theta)$ die Gleichung der Linie MXN vor, so kann offenbar $F(r) = f(\theta)$ als die Gleichung der *Kraftlinie* angesehen werden, wenn man durch $F(r)$ irgend eine Function von r bezeichnet; die fast immer sehr leicht sich bestimmen läfst. Nähme man z. B. an, die Puncte der Linie MXN zögen den Punct P nach irgend einem Gesetze an, etwa nach dem *Newton*schen, und man sollte auf dieser Linie die Puncte bestimmen, welche P nach einer vorgeschriebenen Richtung hin, etwa nach PQ, am *stärksten* oder *schwächsten* anziehen, so brauchte man offenbar nur die Kraftlinie zu construiren und an diese die beiden Tangenten at und iq zu ziehen, welche auf PQ senkrecht stehen, und dann durch die Berührungspuncte a und i die Vectoren Pa und Pi bis A und I zu verlängern; denn wenn Pa die Kraft des Puncts A darstellt, so ist Pt die Componente dieser Kraft in der Richtung PQ, und diese Componente ist von allen die gröfste; so wie Pq die kleinste derselben darstellt. Sollte aber bestimmt werden, an welcher Stelle ein Stück der Curve von gegebener Länge l wirken müsse, um P am *stärksten* oder *schwächsten* nach Q hinzuziehen, so müfste man die Senkrechten mxs oder nlr so legen, dafs die Vectoren Pm und Px, oder Pn und Pl, auf der gegebenen Curve die Bogen MAX oder NIL der Länge l gleich machen: denn offenbar sind die Componenten der Kräfte, mit welchen die Puncte des Bogens MAX auf P einwirken, sämmtlich gröfser als die der übrigen Puncte der Curve; so wie die Componenten der Kräfte, mit denen die Puncte im Bogen NIL auf P einwirken, sämmtlich zwischen Pq und Pr fallen, also kleiner sind als alle übrigen.

Ganz dieselben Betrachtungen lassen sich auch auf den Fall ausdehnen, wenn MXL eine gegebene *krumme Fläche* ist. Man wird leicht die ihr und dem Puncte P zugehörige *Kraftfläche* mxl construiren können. Sollen

nun auf der Fläche etwa die Gestalt und Lage eines Stücks von gegebenem Flächen-Inhalt so bestimmt werden, daſs es auf P in der Richtung PQ die *stärkste* oder *schwächste* Kraft ausübt, so braucht man nur die Kraftfläche mit einer auf PQ senkrechte Ebene mxs oder nlr zu durchschneiden und durch die ebene Curve, welche durch den Durchschnitt beider entsteht und deren Gleichung unmittelbar aus der der Kraftfläche gefunden wird, eine *Kegelfläche* $MmPxX$ oder $NnPlL$ zu legen, deren Spitze P bildet, so schneidet diese auf der gegebenen Fläche ein Stück von der verlangten Eigenschaft aus. Die unbekannten Gröſsen sind hier nur die Entfernungen Ps und Pr, in welche die Ebenen mxs und nlr zu legen sind. Da aber die Gröſsen der Flächentheile MAX und NIL gegeben sind, so erhält man durch eine einzige Integration eine Gleichung, aus welcher sich die Werthe von Ps oder Pr bestimmen lassen. Die Aufgabe lieſse sich offenbar auf dieselbe Art lösen, wenn etwa die Flächentheile MAX und NIL statt eines gegebenen *Inhalts* einen gegebenen *Umfang* haben sollten, oder auch noch andern Bedingungen unterworfen wären. Sollten nur die Puncte A und I der stärksten und schwächsten Einwirkung auf P nach Q hin bestimmt werden, so müſste man die Berührungs-Ebenen at und iq an die *Kraftfläche* legen; wodurch sogleich die Puncte a und i, also auch A und I, auf der gegebenen Fläche bestimmt würden. Solcher Puncte kann es offenbar auch eine gröſsere Anzahl geben.

Ich werde jetzt das Verfahren an einem einfachen Beispiele erläutern.

§. 24.

Aufgabe. Wenn die gerade Linie $MX = l$ (Fig. 7), welche auf der Geraden BZ verschiebbar ist, als *leuchtend* angenommen wird: in welcher Höhe muſs sich dann diese Linie l befinden, damit sie im Puncte P ein Flächen-Element w, auf dessen Ebene BZ senkrecht steht, am *stärksten erleuchtet.*

Auflösung. Einen leuchtenden Punct stelle man sich als Mittelpunct einer Kugel vor, deren Radius 1, also deren Oberfläche 4π ist. Die Menge Licht, welche auf die Fläche 1 dieser Kugel fällt, sei λ. Wird um den leuchtenden Punct eine zweite Kugel vom Radius r beschrieben, so ist deren Oberfläche $4\pi r^2$: also empfängt die Flächen-Einheit dieser Kugel nur die Lichtmenge $\frac{\lambda}{r^2}$. Ein Flächen-Element w erhält also die Lichtmenge $\frac{\lambda w}{r^2}$, und bildet es mit dem Radius dieser Kugel den Winkel θ, so empfängt es nur die Lichtmenge $\frac{\lambda w}{r^2}\sin\theta$. Es sei nun $BP = b$, so erhält P oder das Flächen-

Element w, wenn es senkrecht von den Strahlen des Puncts B getroffen wird, die Menge Licht $\frac{\lambda w}{b^2}$, welche durch $PC = a$ dargestellt werden mag. In derselben Weise würde es von irgend einem andern Puncte M, wenn $PM = r$ ist, die Lichtmenge $\frac{\lambda w}{r^2} = Pm = \varrho$, oder, da für λw auch ab^2 gesetzt werden kann, die Lichtmenge $\frac{ab^2}{r^2} = \varrho$ erhalten. Bezeichnet man aber den Winkel BPM durch θ, so ist $\cos\theta = \frac{b}{r}$, also

$$(1.)\quad \varrho = a\cos^2\theta$$

die Polargleichung der Curve $CmaxP$.

Da nun w senkrecht auf PQ steht, so erhält das Element, z. B. von M, nicht die Lichtmenge $Pm = \varrho$, sondern nur die Menge $Ps = \varrho\sin\theta = a\cos^2\theta\sin\theta$. Ist der Winkel $BPX = \theta'$ und $Px\sin\theta'$ ebenfalls gleich Ps, so beleuchten alle Puncte der Linie BZ zwischen MX das Element w stärker, als die aufserhalb liegenden, und man hat daher zur Bestimmung der Lage der Linie l die Gleichungen

$$b\,\mathrm{tg}\,\theta' - b\,\mathrm{tg}\,\theta = l \quad\text{und}\quad \cos^2\theta\sin\theta = \cos^2\theta'\sin\theta'.$$

Die zweite Gleichung läfst sich durch $\sin\theta - \sin\theta'$ dividiren und man erhält dann, wenn man noch $l = bc$ setzt, zur Bestimmung von θ und θ' die beiden Gleichungen

$$(2.)\quad \sin^2\theta + \sin\theta\sin\theta' + \sin^2\theta' = l \quad\text{und}$$

$$(3.)\quad \mathrm{tg}\,\theta' - \mathrm{tg}\,\theta = c.$$

Sollte blofs der Punct A gefunden werden, welcher P am stärksten erhellet, so müfste man in (1.) $\theta' = \theta$ setzen, woraus sich

$$\sin\theta = \sqrt{\tfrac{1}{3}} = \sin 35^\circ\, 15'\, 52''$$

für den Winkel BPA ergäbe. Ein sehr kleines Fenster müfste man also in einem dunkeln Zimmer in dieser Höhe in der Wand BZ anbringen, um die Stelle P am stärksten zu erleuchten.

Im allgemeinen Falle setze man $\cot\theta = x$, $\cot\theta' = y$, so erhält man leicht zur Bestimmung von x und y aus (2. und 3.) die beiden Gleichungen

$$x - y = cxy \quad\text{und}\quad x^3y^3 - 3(1 + \tfrac{1}{3}c^2)xy = 2.$$

Für $xy = 2\sqrt{(1+\frac{1}{3}c^2)}.z$ verwandelt sich die letzte in

$$z^3 - \tfrac{3}{4}z = \frac{1}{4(1+\frac{1}{3}c^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Es ist aber

$$\cos\tfrac{1}{3}\alpha^3 - \tfrac{3}{4}\cos\tfrac{1}{3}\alpha = \tfrac{1}{4}\cos\alpha;$$

setzt man also

$$\cos\alpha = \frac{1}{(1+\frac{1}{3}c^2)^{\frac{3}{2}}},$$

so wird $z = \cos\frac{1}{3}\alpha$, wenn man nämlich die andern beiden Wurzeln $-\cos\frac{1}{3}(\pi+\alpha)$ und $-\cos\frac{1}{3}(\pi-\alpha)$ unberücksichtigt läfst. Man erhält demnach

$$xy = 2\sqrt{(1+\tfrac{1}{3}c^2)}\cos\tfrac{1}{3}\alpha$$

und kann nun aus dieser und der Gleichung $x-y=cxy$ die Winkel θ und θ' finden, also die Lage der Linie l auf BZ so bestimmen, dafs sie den Punct P am stärksten erhellet.

§. 25.

Man könnte die Aufgabe auch etwas allgemeiner fassen und in der Linie DZ (Fig. 8), welche auf der Ebene des bei C rechtwinkligen Dreiecks ABC in der Verlängerung der Seite BC senkrecht steht, den Punct AE suchen, welcher dieses Dreieck am stärksten erleuchtet. Legt man durch einen leuchtenden Punct M und durch die Seiten des Dreiecks ABC Ebenen, so bestimmen diese auf der mit dem Radius 1 um M beschriebenen Kugel-Oberfläche ein sphärisches Dreieck $A'B'C'$, welches, wenn man sich den Punct von D nach Z hin fortschreitend vorstellt, in irgend einer Lage desselben einen gröfsten Werth annehmen, also die gröfste Menge Licht vom leuchtenden Puncte nach ABC gelangen lassen wird.

Bezeichnet man die Winkel BMC und CMA durch μ und ν und den Überschufs der Summe der Winkel des Dreiecks $A'B'C'$ über zwei rechte durch δ, so ist bekanntlich der Flächen-Inhalt δ dieses Dreiecks durch die Formel

$$(1.)\qquad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\delta = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\mu\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\nu$$

gegeben. Setzt man $BC=a$, $AC=b$, $DC=c$, $MC=r$ und bezeichnet den Inhalt des Dreiecks ABC durch Δ, so findet sich leicht

$$(2.)\qquad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\delta = \frac{2\Delta\sqrt{(r^2-c^2)}}{(r+\sqrt{(r^2+b^2)})(ac+r^2+r\sqrt{(r^2+2ac+a^2)})} = f(r).$$

Für sehr kleine a und b wird δ selbst sehr klein und man erhält dann annähernd die Formel

$$\delta = \frac{\Delta\sqrt{(r^2-c^2)}}{r^3};$$

welche die Betrachtungsweise im vorigen Paragraphen auch gab. Bezeichnet

man nun die Entfernung des Puncts X von C durch r' und nimmt an, dafs für den Punct X das sphärische Dreieck denselben Werth hat wie für den Punct M, so erhält man die Gleichung

$$f(r) = f(r').$$

Nimmt man zu dieser Gleichung noch $DX - DM = l$ oder

$$(4.)\qquad \sqrt{(r'^2-c^2)} - \sqrt{(r^2-c^2)} = l$$

hinzu, so würde man aus diesen beiden Gleichungen die Werthe von r und r' finden, von denen irgend einer die Lage der Linie $MX = l$ so bestimmt, dafs sie das Dreieck ABC am stärksten erhellet. Die Differenz $f(r) - f(r')$ hat einen gemeinschaftlichen Factor, den bekanntlich die Differentialrechnung finden lehrt, der aber häufig auch durch einfache Transformationen ermittelt werden kann. Ist dieser Factor aus der Gleichung $f(r) = f(r')$ entfernt, so kann man in dem Quotienten $r' = r$ setzen und so zu der Gleichung gelangen, welche den Werth von r giebt, durch welchen der Punct E gefunden wird, der das Dreieck ABC am stärksten beleuchtet.

Darauf, dafs der Factor der Differenz $f(r) - f(r')$ häufig auch durch einfache algebraische Operationen gefunden werden kann, beruht es eben, dafs sich viele Aufgaben über Maxima und Minima ganz elementar lösen lassen und höchst zweckmäfsig beim Unterrichte in den Schulen benutzt werden können.

Für den Fall eines unendlich kleinen Dreiecks ABC erhält man nun aus (3.), für $\frac{1}{r^2} = x$ und $\frac{1}{r'^2} = y$, $x\sqrt{(1-c^2x^2)} = y\sqrt{(1-c^2y^2)}$, oder wenn man quadrirt und mit $x-y$ dividirt, $x+y = c^2(x^2+xy+y^2)$; was für $x=y$ $r = c\sqrt{\tfrac{3}{2}}$ giebt; übereinstimmend mit dem früheren Resultate.

Es läfst sich auch noch elementar und ohne viele Rechnung der Fall behandeln, wenn in einer geraden Linie die Stellung einer Linie l angegeben werden soll, von wo aus sie nicht einen blofsen Punct, sondern eine andere begrenzte gerade Linie am hellsten beleuchtet; indessen würden die dazu nöthigen Rechnungen mich von meinem Ziele zu weit entfernen, und auch von jedem Lehrer der Mathematik an den Gymnasien, für welche zum gröfsten Theil diese Paragraphen bestimmt sind, leicht selbst ausgeführt werden können.

§. 26.

Wir kehren jetzt zu unserer allgemeineren Aufgabe zurück. In (§. 24.) ergab sich für die Gleichung der Curve *CaP* (Fig. 7) $\varrho = a\cos^2\theta$, oder, wenn man durch ξ die Abscisse *PD* des Punctes *m* bezeichnet:

$$(1.)\quad \varrho^3 = a\xi^2.$$

Stellt man sich jetzt vor, die Puncte einer Ebene, deren Axe *BP* und deren Durchschnitt mit der Ebene der Figur *BZ* ist, beleuchten den Punct *P*, so wird die ***Kraftfläche*** durch Umdrehung der Curve *CaP* um die Axe *CP* erzeugt. Bezeichnet man die Ordinaten *mD* durch ζ und die auf ξ und ζ senkrechten durch η, so wird

$$\varrho^2 = \xi^2+\eta^2+\zeta^2,$$

und (1.) stellt dann die Gleichung dieser Umdrehungsfläche vor. Eine Ebene, parallel mit der Ebene der $\xi\eta$, in der Höhe $\zeta = Ps$, schneidet diese Fläche in einer Curve, und wenn man die Coordinaten der Puncte der leuchtenden Ebene durch $PB = x$, $BM = z$ und eine auf beiden Ordinaten senkrechte Linie durch y bezeichnet, so ist die Gleichung einer durch *P* und den Punct xyz gehenden Geraden:

$$(2.)\quad \frac{\xi}{x} = \frac{\eta}{y} = \frac{\zeta}{z},$$

die, wenn sie sich an der erwähnten Curve hinbewegt, auf der leuchtenden Fläche eine andere Curve durchläuft, deren Gleichung man findet, wenn die Werthe von ξ, η, ζ aus (2.) in (1.) gesetzt werden. Man erhält auf diese Weise

$$\zeta(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}} = ax^2z.$$

Oder, wenn man der Einfachheit wegen $x = a$ setzt (was hier offenbar erlaubt ist, da x constant und a ganz willkürlich ist), so erhält man, als Gleichung der auf der leuchtenden Fläche bestimmten Curve:

$$(3.)\quad a^2+y^2+z^2 = \frac{a^2z^{\frac{2}{3}}}{\zeta^{\frac{2}{3}}}.$$

Die innerhalb dieser Curve liegenden Puncte der Ebene beleuchten also die unendlich kleine Fläche w, auf welcher *PQ* senkrecht steht, im Puncte *P* stärker, als die aufserhalb befindlichen. Soll nun dieses so begrenzte Stück der Ebene einen gegebenen Inhalt f haben, so mufs aus der Gleichung

$$(4.)\quad f = \int y\,\partial z = \int \partial z\sqrt{\left(\frac{a^2z^{\frac{2}{3}}}{\zeta^{\frac{2}{3}}} - z^2 - a^2\right)}$$

der Werth von ζ gefunden werden. Die Grenzen des Integrals erhält man

aber selbst erst aus (3.), wenn man in dieser Gleichung $y=0$ gesetzt hat. Sind a und f in Zahlen gegeben, so berechne man, für einige willkürlich angenommene Werthe von ζ, aus der zuletzt gefundenen Gleichung die Grenzwerthe von z, und so das Integral (4.), durch mechanische Quadratur. Aus diesen Integralwerthen suche man dann durch Interpolation, welchen Werth ζ annehmen mufs, damit das Integral die Gröfse f erreicht.

Auf diese Weise wäre also die Aufgabe: zu sagen, welche Gestalt und Lage eine leuchtende Fläche oder Flamme von gegebener Gröfse auf einer Ebene annehmen mufs, damit sie die nächste Umgebung eines Puncts auf einer gegen die erste senkrechten Ebene am hellsten beleuchte, gelöset.

Offenbar könnten statt des Inhalts des leuchtenden Flächenstücks auch die Gröfse des *Umfangs* oder *andere* Bedingungen gegeben sein, denen die Curve (3.) unterworfen sein soll. Es ist kaum zu erwähnen nöthig, dafs die so eben gelösete Aufgabe zugleich für den Fall gilt, wenn das gegebene Flächenstück (dasselbe als schwer gedacht) den Punct P am stärksten nach der Richtung PQ anziehen soll.

Befände sich in der auf PQ senkrechten Ebene statt eines Flächen-Elements etwa ein Kreis, dessen Mittelpunct P ist, und man sollte die Gestalt des Flächentheils in der Ebene BZ finden, welcher diesen Kreis am hellsten beleuchtet, oder am stärksten nach PQ zieht, so müfste man für jeden Punct der Ebene BZ die nach PQ gerichtete Componente der Kräfte berechnen, oder auch um den leuchtenden oder anziehenden Punct eine Kugel vom Radius 1 beschreiben und den Theil ihrer Oberfläche berechnen, welchen ein elliptischer Kegel ausschneidet, dessen Basis der gegebene Kreis ist und dessen Spitze im wirkenden Puncte liegt. Dieser Theil der Kugelfläche läfst sich durch ein elliptisches Integral dritter Gattung ausdrücken. Wie man dann weiter zu verfahren hat, erhellet hinlänglich aus Dem, was bereits mitgetheilt wurde.

§. 27.

Wenn die Wirkung der Puncte einer Oberfläche oder eines Körpers auf einen Punct P (Fig. 9) blofs von ihrer Entfernung von diesem Puncte abhangt, oder wenigstens nicht durch ihren Ort in dem Körper bedingt wird, so lassen sich die bisher behandelten und ähnliche Aufgaben leichter durch folgende Betrachtungen lösen.

Die Puncte der Curve BFA, welche auf den Punct P einwirken, ihn z. B. anziehen, mögen so gewählt sein, dafs die nach PQ gerichteten Com-

ponenten der Anziehung sämmtlich einander gleich sind und durch **PB** dargestellt werden können. Die Kraft also, mit welcher z. B. **F** auf **P** einwirkt, mufs dann durch die Linie **PE** dargestellt werden, deren Endpunct **E** in einer auf **PB** senkrechten Linie **BD** liegt; das heifst also: die Kraftlinie der Curve **BFAP** ist in diesem Falle eine Gerade. Diese Linie **BFAP** sondert demnach alle Puncte der Ebene der Figur, welche eine gröfsere, nach **PQ** gerichtete Componente haben, von denen ab, bei welchen diese Componente kleiner ist. Dreht sich diese Curve um **PB** als Axe herum, so beschreibt sie eine Umdrehungsfläche, innerhalb welcher alle Puncte des Raums den Punct **P** stärker nach **PQ** hinziehen, als die aufserhalb befindlichen. Wenn man **PF** mit r, **PB** mit z und den Winkel **FPB** mit φ bezeichnet, so erhält man, als Polargleichung der Curve, wenn die Kraft der $n$ten Potenz der Entfernung umgekehrt proportional ist:

$$r = z\cos\varphi^{\frac{1}{n}}.$$

Für den Inhalt K des ganzen, durch Drehung von **BAP** um **BP** erzeugten Körpers findet man leicht:

$$K = \frac{2n\pi z^3}{3(3+n)},$$

und für die Anziehung A desselben auf den Punct **P** die Formel

$$A = \frac{3K}{(3-n)z^n};$$

wobei die Kraft der Anziehung für die Einheit der Entfernung gleich 1 gesetzt ist. Diese Formel gilt aber nur, so lange n kleiner als 3 ist; denn für $n=3$, oder gröfser als 3, wird der Punct **P** mit unendlicher Kraft nach Q hingezogen.

Für $n=1$ verwandelt sich die Polargleichung der Curve in die Gleichung eines *Kreises*. Wüchse also die Kraft der Anziehung umgekehrt proportional mit der Entfernung, so müfste eine Masse in die Form einer Kugel gebracht werden, wenn sie einen Punct ihrer Oberfläche mit der gröfsten Gewalt anziehen sollte.

Für $n=2$, oder für das *Newtonsche Attractionsgesetz*, läfst sich die Erzeugungscurve sehr leicht construiren. Der Inhalt des Körpers und die Gröfse der Anziehung sind dann

$$K = \frac{4\pi z^3}{15} \quad \text{und} \quad A = \frac{3K}{z^2}.$$

Für eine Kugel vom Radius r und derselben Masse ist aber

$$K = \frac{4\pi r^3}{3} \quad \text{und} \quad A' = \frac{K}{r^2}.$$

Also ist $z = r\sqrt[3]{5}$ und

$$A:A' = \frac{3r^2}{z^2} = 3:\sqrt[3]{25}$$

oder

$$A = A'.1{,}02598;$$

so dafs also die Anziehung einer kugelförmigen Masse auf einen Punct ihrer Oberfläche, selbst wenn man ihr die passendste Gestalt giebt, doch nur um wenig mehr als $\frac{1}{39}$ ihres Gesammtbetrages vermehrt werden kann.

Dieses Resultats erwähnt *Gaufs* in einer Note zu seiner Abhandlung über die Capillarität; und diese Bemerkung ist es gerade, was mich veranlafst hat, ähnliche Aufgaben etwas weiter zu verfolgen.

§. 28.

Stellt man sich jetzt einen beliebig gestalteten Körper $MAXLIN = T$ vor, dessen Masse der Punct P anzieht, so kann PB, oder z, so bestimmt werden, dafs die Umdrehungs-Oberfläche BAP den Körper T entweder in A, oder in I berührt, oder von ihm ein Stück von gegebener Gröfse $MAXC$, oder auch $ILDN$ abschneidet. Im ersten Falle werden die Puncte A und I des Körpers T gefunden, welche den Punct P am *stärksten* und am *schwächsten* nach Q hinziehen; im zweiten Falle werden solche Theile von ihm begrenzt, die bei einem gegebenen Inhalte die stärkste oder die schwächste Anziehung auf P ausüben. Zugleich werden aber hierdurch auch auf der Oberfläche des Körpers T die Flächentheile MAX und NIL bestimmt, welche auf den Punct P am *stärksten* oder am *schwächsten* im Sinne der Linie PQ einwirken.

Hiernach läfst sich nun z. B. die Aufgabe in (§. 24.) auf eine leichtere Weise lösen. Denn beschreibt man in (Fig. 10) über PQ, als Axe, die Umdrehungsfläche, deren Erzeugungscurve nach (§. 24.), wenn man die Axe a nennt, die Polargleichung

$$r^2 = a^2 \cos\varphi.$$

hat, so erhält man, nach den Bezeichnungen in dem erwähnten Paragraphen, $r\cos\varphi = z$, also

$$r^3 = a^2 z;$$

was offenbar nichts anderes als die Gleichung (1.) in (§. 26) ist. Diese Auseinandersetzungen der Methode werden genügen, um sie in andern, zusammengesetzteren Fällen anwenden zu können.

§. 29.

Wenn man sich die Puncte einer krummen Fläche auf gewisse Puncte des Raums nach besondern Gesetzen wirkend vorstellt und die diesen Gesetzen entsprechenden ***Kraftflächen*** construirt, so kommt man leicht zu eigenthümlichen Mitteln, geometrische Eigenschaften solcher Flächen zu entdecken.

Ich will hier nur noch zeigen, wie man z. B. durch solche Betrachtungen die Axen einer Fläche zweiten Grades finden kann. Zu dem Ende erwäge man, dafs eine Linie zweiten Grades

$$(1.)\quad Ax^2+By^2+C+2A'y+2B'x+2C'xy = 0$$

einen Punct, oder zwei sich schneidende gerade Linien darstellt, wenn

$$(2.)\quad ABC-AA'^2-BB'^2-CC'^2+2A'B'C' = 0$$

ist, die Coordinaten mögen rechtwinklige, oder auch schiefwinklige sein. Aus der Fläche zweiten Grades

$$(3.)\quad ax^2+by^2+cz^2+2a'yz+2b'zx+2c'xy = 1,$$

die auf schiefwinklige Coordinaten bezogen sein soll, deren Anfangspunct im Mittelpuncte der Fläche liegt, leite man auf folgende Weise eine zweite Fläche ab. In (Fig. 12) sei C ein Punct der Oberfläche zweiten Grades; $OA=x$, $AB=y$, $BC=z$ seien seine Coordinaten. Man verlängere den Radiusvector $OC=r$ bis C', so dafs die Ordinate $C'B'=\zeta$ des Puncts C' dem Radiusvector r gleich wird: so ergiebt sich aus den ähnlichen Dreiecken OBC und $OB'C'$, wenn man $OC'=\varrho$ setzt, $z=\frac{rr}{\varrho}$; und wenn die Abscissen $OA'=\xi$ und $A'B'=\eta$ genannt werden, so findet man vermöge der ähnlichen Dreiecke OAB und $OA'B'$:

$$x=\frac{r\xi}{\varrho} \quad \text{und} \quad y=\frac{r\eta}{\varrho}.$$

Setzt man diese Werthe von x, y, z in (3.), so erhält man die Gleichung einer neuen Fläche, in welcher die Ordinate ζ jedes Punctes stets dem Radiusvector der Fläche zweiten Grades, welcher diesem Puncte entspricht, gleich ist. Bildet nun jede der Axen der x, y, z oder ξ, η, ζ mit den beiden übrigen, entsprechend, die Winkel λ, μ, ν, so geben die erwähnten Dreiecke sehr leicht die Gleichung

$$(4.)\quad \varrho^2 = \xi^2+\eta^2+\zeta^2+2\eta\zeta\cos\lambda+2\zeta\xi\cos\mu+2\xi\eta\cos\nu.$$

Multiplicirt man daher (3.) mit ϱ^2 und setzt für x, y, z die gefundenen Werthe, so erhält man, als Gleichung der neuen Fläche, wenn auch für ϱ^2 sein

Werth aus (4.) geschrieben wird, und wenn man berücksichtigt, dafs $\zeta = r$ ist:

$$(5.)\quad (1-ar^2)\xi^2+(1-br^2)\eta^2+(1-cr^2)r^2+2(\cos\lambda-a'r^2)r\eta \\ +2(\cos\mu-b'r^2)r\xi+2(\cos\nu-c'r^2)\xi\eta = 0.$$

Der Durchschnitt dieser Fläche mit einer der $\xi\eta$ parallelen Ebene giebt offenbar eine Curve zweiten Grades, die sich in einen Punct verwandelt, wenn die schneidende Ebene in einer solchen Höhe liegt, dafs sie auf der Axe der ζ den gröfsten Radiusvector r abschneidet. Dafs dieser Durchschnitt nicht zwei sich schneidende gerade Linien giebt, lehrt die blofse Anschauung auf der Stelle. Nach (2.) ist aber die Bedingung dafür, dafs (5.) nur einen Punct darstellt, wenn man der Kürze wegen $\frac{1}{r^2} = u$ setzt:

$$(6.)\quad (u-a)(u-b)(u-c)-(u-a)(u\cos\lambda-a')^2-(u-b)(u\cos\mu-b')^2 \\ -(u-c)(u\cos\nu-c')^2+2(u\cos\lambda-a')(u\cos\mu-b')(u\cos\nu-c') = 0.$$

Die Auflösung dieser cubischen Gleichung führt, wie leicht zu sehen, zur Kenntnifs der Gröfse der drei Axen der Fläche zweiten Grades.

Sind die Coordinaten rechtwinklige, so verschwinden die Cosinus aus dieser Gleichung und man erhält zur Bestimmung der Axen die mehr bekannte Gleichung

$$(7.)\quad (u-a)(u-b)(u-c)-(u-a)a'^2-(u-b)b'^2-(u-c)c'^2+2a'b'c'=0.$$

Es ist leicht zu sehen, dafs sich ähnliche Betrachtungen auch auf die Untersuchung der Eigenschaften von Curven anwenden lassen.

§. 30.

Die folgenden Paragraphen sind noch dazu bestimmt, die Anwendbarkeit meiner Methode auf *vielfache Integrale* zu zeigen; zu deren Behandlung sie sich als vorzüglich geeignet ergiebt. Ich werde zunächst das bekannte Beispiel abhandeln: durch einen gegebenen *Umring* die kleinste *Fläche* zu legen.

Die Projection des Umringes auf die Ebene der xy stelle die krumme Linie (Fig. 11) dar. Auf der Axe der x nehme man willkürlich die Abscissen $\dots x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots$ an, und auf der Axe der y die Abscissen $\dots y_{-1}, y_0, y_1, y_2, \dots$ Dadurch werden in der Ebene der xy die Puncte $\dots x_0y_0, x_0y_1, x_1y_0, x_1y_1, x_1y_2, x_2y_1, x_2y_2, \dots$ bestimmt, zu denen, entsprechend, die auf dieser Ebene senkrechten Ordinaten $\dots z_{00}, z_{01}, z_{10}, z_{11}, z_{12}, z_{21}, z_{22}, \dots$ gehören mögen. Die Endpuncte dieser Ordinaten bilden die Ecken von ebenen Dreiecken, aus welchen die kleinste Fläche bestehen soll und von deren Pro-

jection auf die Ebene der $\xi\eta$ die eine Hälfte dieser Dreiecke in der Figur schraffirt sich zeigt. Das durch die Ordinaten $z_{m,n}$, $z_{m+1,n}$, $z_{m+1,n+1}$ bestimmte Dreieck werde mit $\nu_{m,n}$ bezeichnet, so dafs die drei, deren Projectionen die Figur doppelt schraffirt zeigt, ν_{00}, ν_{01}, ν_{11} sind. Diese Dreiecke sind

$$\begin{aligned}
\nu_{00} &= \tfrac{1}{2}\{(x_1-x_0)^2(y_1-y_0)^2+(x_1-x_0)^2(z_{11}-z_{10})^2+(y_1-y_0)^2(z_{10}-z_{00})^2\}^{\frac{1}{2}},\\
\nu_{01} &= \tfrac{1}{2}\{(x_1-x_0)^2(y_2-y_1)^2+(x_1-x_0)^2(z_{12}-z_{11})^2+(y_2-y_1)^2(z_{11}-z_{01})^2\}^{\frac{1}{2}},\\
\nu_{11} &= \tfrac{1}{2}\{(x_2-x_1)^2(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2(z_{22}-z_{21})^2+(y_2-y_1)^2(z_{21}-z_{11})^2\}^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Aus ν_{00} erhält man ν_{01}, wenn man die Zeiger von y um 1 erhöht, und aus ν_{01} erhält man ν_{11} durch Erhöhung der Zeiger von x um 1. Man berechnet nun den Inhalt einer krummen Oberfläche am besten so, dafs man erst die eine Hälfte dieser Dreiecke addirt, also etwa die schraffirten, und dann die Summe der andern Hälfte nimmt, die sich offenbar der ersten als gleich ergiebt. Man vermeidet auf diese Weise die weniger einfache Vorstellung von parallelogrammatischen Oberflächen-Elementen, die sehr leicht zu der Ansicht führen könnte, dafs eine krumme Oberfläche, von parallelen Ebenen durchschnitten, lauter parallele Durchschnittscurven geben müfste; oder wenigstens bleibt es sonst stets etwas unklar, wie sich diese viereckigen Flächen-Elemente mit ihren vier Ecken sämmtlich an einander anschliefsen sollen, und man mufs schon bei der Bildung des Elements die höheren Ordnungen der Differentiale vernachlässigen; was hier wenigstens nicht der Fall ist. Zu gleicher Zeit erreicht man den Vortheil, dafs jede Ordinate nur in drei Flächen-Elementen zugleich vorkommt, bei der andern Betrachtungsweise aber in vier solchen Elementen liegen würde.

Der Ausdruck für U ist offenbar nur, da der Umring nicht selbst noch als veränderlich angenommen wird:

$$U = \cdots \nu_{00}+\nu_{01}+\nu_{11}+\cdots$$

Die unbekannten Gröfsen, welche gefunden werden sollen, sind hier die Ordinaten $\ldots z_{00}, z_{01}, z_{10}, z_{11}, \ldots$, von denen jede im Allgemeinen in drei Flächen-Elementen vorkommt; z. B. z_{11} nur in den drei Elementen ν_{00}, ν_{01}, ν_{11}. Differentiirt man also U nach z_{11}, so gelangt man zu der Gleichung

$$(1.)\quad \frac{(x_1-x_0)^2(z_{11}-z_{10})}{\nu_{00}}-\frac{(x_1-x_0)^2(z_{12}-z_{11})}{\nu_{01}} + \frac{(y_2-y_1)^2(z_{11}-z_{01})}{\nu_{01}}-\frac{(y_2-y_1)^2(z_{21}-z_{11})}{\nu_{11}} = 0.$$

Solcher Gleichungen erhält man bekanntlich so viele, als Ordinaten zu bestimmen

sind, und da die x und y willkürlich angenommen wurden, so reichen die Gleichungen zur Lösung des Problems hin.

Geht man nun zu unendlich kleinen Differenzen über und bezeichnet z_{00} durch $\varphi(x,y)$, so wird

$$z_{01} = \varphi(x, y+\partial y), \quad z_{10} = \varphi(x+\partial x, y), \quad z_{11} = \varphi(x+\partial x, y+\partial y),$$

$$z_{12} = \varphi(x+\partial x, y+2\partial y), \quad z_{21} = \varphi(x+2\partial x, y+\partial y) \text{ und}$$

$$z_{11}-z_{10} = \varphi(x+\partial x, y+\partial y)-\varphi(x+\partial x, y) = \frac{\partial\varphi(x+\partial x, y)\partial y}{\partial y},$$

$$z_{12}-z_{11} = \varphi(x+\partial x, y+2\partial y)-\varphi(x+\partial x, y+\partial y) = \frac{\partial\varphi(x+\partial x, y+\partial y)\partial y}{\partial y},$$

$$z_{11}-z_{01} = \varphi(x+\partial x, y+\partial y)-\varphi(x, y+\partial y) = \frac{\partial\varphi(x, y+\partial y)\partial x}{\partial x},$$

$$z_{21}-z_{11} = \varphi(x+2\partial x, y+\partial y)-\varphi(x+\partial x, y+\partial y) = \frac{\partial\varphi(x+\partial x, y+\partial y)\partial x}{\partial x}.$$

Setzt man noch $\nu_{00} = \psi(x, y)$, also

$$\nu_{01} = \psi(x, y+\partial y) \quad \text{und} \quad \nu_{11} = \psi(x+\partial x, y+\partial y),$$

so verwandelt sich durch diese Werthe (1.) in

$$\partial x^2 \left\{ \frac{\frac{\partial}{\partial y}\varphi(x+\partial x, y)\partial y}{\psi(x, y)} - \frac{\frac{\partial}{\partial y}\varphi(x+\partial x, y+\partial y)\partial y}{\psi(x, y+\partial y)} \right\}$$
$$+\partial y^2 \left\{ \frac{\frac{\partial}{\partial x}\partial\varphi(x, y+\partial y)\partial x}{\psi(x, y+\partial y)} - \frac{\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x+\partial x, y+\partial y)\partial x}{\psi(x+\partial x, y+\partial y)} \right\} = 0,$$

oder in

$$\partial x^2\partial y^2 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\frac{\partial}{\partial y}\varphi(x+\partial x, y)}{\psi(x, y)}\right) + \partial y^2\partial x^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x, y+\partial y)}{\psi(x, y+\partial y)}\right) = 0,$$

oder in

$$(2.) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x, y)}{\psi(x, y)}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\frac{\partial}{\partial y}\varphi(x, y)}{\psi(x, y)}\right) = 0;$$

was man, wenn für $\varphi(x, y)$ wieder z geschrieben wird, kurz durch

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\psi}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\psi}\right) = 0$ bezeichnen kann.

Es ist aber

$$4\psi^2 = \partial x^2\partial y^2 + \partial x^2\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\partial y^2 + \partial y^2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\partial x^2 = \partial x^2\partial y^2\left(1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right),$$

also

$$4\psi\frac{\partial\psi}{\partial x} = \partial x^2\partial y^2\Big(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big) \quad \text{und}$$

$$4\psi\frac{\partial\psi}{\partial y} = \partial x^2\partial y^2\Big(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big).$$

Demnach erhält man aus (2.), wenn man noch, wie gewöhnlich geschieht, die Bezeichnungen $\frac{\partial z}{\partial x}=p$, $\frac{\partial z}{\partial y}=q$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=r$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=s$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=t$ einführt:

$$(3.)\qquad (1+p^2)t+(1+q^2)r-2pqs = 0;$$

welches die bekannte Gleichung ist, die *Lagrange* zur Lösung des vorgelegten Problems gefunden hat.

§. 31.

Es sei nun allgemein für ein *zweifaches Integral* z_{mn} die Ordinate, welche den Abscissen x_m und y_n entpricht, also $z_{00}=\varphi(x,y)$ und $z_{mn}=\varphi(x+m\partial x,\ y+n\partial y)$, und die Function unter dem Integralzeichen enthalte selbst noch die dritten Differentialquotienten von z, so dafs die Function die Form

$$f\Big(z_{00},\quad \frac{\partial z_{00}}{\partial x}\partial x,\quad \frac{\partial z_{10}}{\partial y}\partial y,\quad \frac{\partial^2 z_{00}}{\partial x^2}\partial x^2,\quad \frac{\partial^2 z_{10}}{\partial x\partial y}\partial x\partial y,$$
$$\frac{\partial^2 z_{20}}{\partial y^2}\partial y^2,\ \frac{\partial^3 z_{00}}{\partial x^3}\partial x^3,\ \frac{\partial^3 z_{10}}{\partial x^2\partial y}\partial x^2\partial y,\ \frac{\partial^3 z_{20}}{\partial x\partial y^2}\partial x\partial y^2,\ \frac{\partial^3 z_{30}}{\partial y^3}\partial y^3\Big) = V_{00}$$

hat, aus welcher alle übrigen unter dem Integralzeichen befindlichen Elemente durch gehörige Erhöhung der Zeiger gefunden werden. So z. B. erhält man hieraus V_{mn}, wenn man die ersten Zeiger um m und die zweiten um n erhöht. Die Elemente, welche das Integral zusammenfafst, sind

$$\begin{array}{l} V_{00},\ V_{10},\ V_{20},\ V_{30},\ \ldots \\ V_{01},\ V_{11},\ V_{21},\ V_{31},\ \ldots \\ V_{02},\ V_{12},\ V_{22},\ V_{32},\ \ldots \\ V_{03},\ V_{13},\ V_{23},\ V_{33},\ \ldots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}$$

und die Ordinaten, welche V_{00} enthält, sind in folgender Weise zusammengestellt:

$$\frac{\partial z_{00}}{\partial x}\partial x = z_{10}-z_{00};\quad \frac{\partial z_{10}}{\partial y}\partial y = z_{11}-z_{10};\quad \frac{\partial^2 z_{10}}{\partial x^2}\partial x^2 = z_{20}-2z_{10}+z_{00};$$

$$\frac{\partial^2 z_{10}}{\partial x\partial y}\partial x\partial y = z_{21}-z_{20}-z_{11}+z_{10};\quad \frac{\partial^2 z_{20}}{\partial y^2}\partial y^2 = z_{22}-2z_{21}+z_{20};$$

$$\frac{\partial^3 z_{00}}{\partial x^3}\partial x^3 = z_{30}-3z_{20}+3z_{10}-z_{00};\quad \frac{\partial^3 z_{10}}{\partial x^2\partial y}\partial x^2\partial y = z_{31}-2z_{21}+z_{11}-z_{30}+2z_{20}-z_{10};$$

$$\frac{\partial^3 z_{20}}{\partial x\partial y^2}\partial x\partial y^2 = z_{32}-2z_{31}+z_{30}-z_{22}+2z_{21}-z_{20};\quad \frac{\partial^3 z_{30}}{\partial y^3}\partial y^3 = z_{33}-3z_{32}+3z_{31}-z_{30}.$$

Die Ordinate, welche in allen Elementen

$$\begin{array}{llll} V_{00} & & & \\ V_{01}, & V_{11} & & \\ V_{02}, & V_{12}, & V_{22} & \\ V_{03}, & V_{13}, & V_{23}, & V_{33} \end{array}$$

vorkommt, ist z_{33}; Ordinaten mit niedrigeren Zeigern kommen nicht in allen diesen Functionen vor, und die mit höheren kommen erst in späteren, aber auch nur in 10 Elementen des Integrals vor. Also braucht man hier nur nach z_{33} zu differentiiren, wenn man den vollständigen Differential-Ausdruck haben will.

Bei der Differentiation nach z_{33} bilde man nach und nach die Glieder der nullten, ersten, zweiten, dritten Ordnung; das ganze Geschäft besteht nur darin, die Elemente aufzuführen, in denen diese Ordinate vorkommt.

Glieder der nullten Ordnung sind: $\dfrac{\partial V_{33}}{\partial z_{33}}$.

Glieder der ersten Ordnung: $-\dfrac{\partial V_{33}}{\partial x\,\partial\cdot\frac{\partial z_{33}}{\partial x}}+\dfrac{\partial V_{23}}{\partial x\,\partial\cdot\frac{\partial z_{23}}{\partial x}}-\dfrac{\partial V_{23}}{\partial y\,\partial\cdot\frac{\partial z_{33}}{\partial y}}+\dfrac{\partial V_{22}}{\partial y\,\partial\cdot\frac{\partial z_{32}}{\partial y}}$

$$= -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V_{23}}{\partial\cdot\frac{\partial z_{23}}{\partial x}}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V_{22}}{\partial\cdot\frac{\partial z_{32}}{\partial y}}\right).$$

Glieder der zweiten Ordnung:

$$\frac{\partial V_{33}}{\partial x^2\partial\cdot\frac{\partial^2 z_{33}}{\partial x^2}}-\frac{2\partial V_{23}}{\partial x^2\partial\cdot\frac{\partial^2 z_{23}}{\partial x^2}}+\frac{\partial V_{23}}{\partial x\,\partial y\,\partial\cdot\frac{\partial^2 z_{33}}{\partial x\partial y}}+\frac{\partial V_{13}}{\partial x^2\partial\cdot\frac{\partial^2 z_{13}}{\partial x^2}}-\frac{\partial V_{13}}{\partial x\,\partial y\,\partial\cdot\frac{\partial^2 z_{23}}{\partial x\partial y}}$$

$$+\frac{\partial V_{13}}{\partial y^2\partial\cdot\frac{\partial^2 z_{33}}{\partial y^2}}-\frac{\partial V_{22}}{\partial x\,\partial y\,\partial\cdot\frac{\partial^2 z_{32}}{\partial x\partial y}}+\frac{\partial V_{12}}{\partial x\,\partial y\,\partial\cdot\frac{\partial^2 z_{22}}{\partial x\partial y}}-2\frac{\partial V_{12}}{\partial y^2\partial\cdot\frac{\partial^2 z_{32}}{\partial y^2}}+\frac{\partial V_{11}}{\partial y^2\partial\cdot\frac{\partial^2 z_{31}}{\partial y^2}}$$

$$=\frac{1}{\partial x^2}\left\{\frac{\partial V_{33}}{\partial\cdot\frac{\partial^2 z_{33}}{\partial x^2}}-2\frac{\partial V_{23}}{\partial\cdot\frac{\partial^2 z_{23}}{\partial x^2}}+\frac{\partial V_{13}}{\partial\cdot\frac{\partial^2 z_{13}}{\partial x^2}}\right\}+\frac{1}{\partial y^2}\left\{\frac{\partial V_{13}}{\partial\cdot\frac{\partial^2 z_{33}}{\partial y^2}}-2\frac{\partial V_{12}}{\partial\cdot\frac{\partial^2 z_{32}}{\partial y^2}}+\frac{\partial V_{11}}{\partial\cdot\frac{\partial^2 z_{31}}{\partial y^2}}\right\}$$

$$+\frac{1}{\partial x\partial y}\left\{\frac{\partial V_{23}}{\partial\cdot\frac{\partial^2 z_{33}}{\partial x\partial y}}-\frac{\partial V_{13}}{\partial\cdot\frac{\partial^2 z_{23}}{\partial x\partial y}}-\frac{\partial V_{22}}{\partial\cdot\frac{\partial^2 z_{32}}{\partial x\partial y}}+\frac{\partial V_{12}}{\partial\cdot\frac{\partial^2 z_{22}}{\partial x\partial y}}\right\}$$

$$=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial V_{13}}{\partial\cdot\frac{\partial^2 z_{13}}{\partial x^2}}\right)+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial V_{12}}{\partial\cdot\frac{\partial^2 z_{22}}{\partial x\partial y}}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial V_{11}}{\partial\cdot\frac{\partial^2 z_{31}}{\partial y^2}}\right).$$

Glieder der dritten Ordnung:

$$-\frac{\partial V_{33}}{\partial x^3 \partial \cdot \frac{\partial^3 z_{33}}{\partial x^3}}$$

$$+3\frac{\partial V_{23}}{\partial x^3 \partial \cdot \frac{\partial^3 z_{33}}{\partial x^3}} - \frac{\partial V_{33}}{\partial x^2 \partial y \partial \cdot \frac{\partial^3 z_{33}}{\partial x^2 \partial y}}$$

$$-3\frac{\partial V_{13}}{\partial x^3 \partial \cdot \frac{\partial^3 z_{13}}{\partial x^3}} + 2\frac{\partial V_{13}}{\partial x^2 \partial y \partial \cdot \frac{\partial^3 z_{23}}{\partial x^2 \partial y}} - \frac{\partial V_{13}}{\partial x \partial y^2 \partial \cdot \frac{\partial^3 z_{33}}{\partial x \partial^2 y}}$$

$$+\frac{\partial V_{03}}{\partial x^3 \partial \cdot \frac{\partial^3 z_{03}}{\partial x^3}} - \frac{\partial V_{03}}{\partial x^2 \partial y \partial \cdot \frac{\partial^3 z_{13}}{\partial x^2 \partial y}} + \frac{\partial V_{03}}{\partial x \partial y^2 \partial \cdot \frac{\partial^3 z_{23}}{\partial x \partial y^2}} - \frac{\partial V_{03}}{\partial y^3 \partial \cdot \frac{\partial^3 z_{33}}{\partial y^3}}$$

$$+\frac{\partial V_{22}}{\partial x^2 \partial y \partial \cdot \frac{\partial^3 z_{22}}{\partial x^2 \partial y}}$$

$$-2\frac{\partial V_{12}}{\partial x^2 \partial y \partial \cdot \frac{\partial^3 z_{22}}{\partial x^2 \partial y}} + \frac{\partial V_{12}}{\partial x \partial y^2 \partial \cdot \frac{\partial^3 z_{22}}{\partial x \partial y^2}}$$

$$+\frac{\partial V_{02}}{\partial x^2 \partial y \partial \cdot \frac{\partial^3 z_{12}}{\partial x^2 \partial y}} - 2\frac{\partial V_{02}}{\partial x \partial y^2 \partial \cdot \frac{\partial^3 z_{22}}{\partial x \partial y^2}} + 3\frac{\partial V_{02}}{\partial y^3 \partial \cdot \frac{\partial^3 z_{32}}{\partial y^3}}$$

$$-\frac{\partial V_{11}}{\partial x \partial y^2 \partial \cdot \frac{\partial^3 z_{21}}{\partial x \partial y^2}}$$

$$+\frac{\partial V_{01}}{\partial x \partial y^2 \partial \cdot \frac{\partial^3 z_{21}}{\partial x \partial y^2}} - 3\frac{\partial V_{01}}{\partial y^3 \partial \cdot \frac{\partial^3 z_{31}}{\partial y^3}}$$

$$+\frac{\partial V_{00}}{\partial y^3 \partial \cdot \frac{\partial^3 z_{00}}{\partial y^3}}$$

$$= -\frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(\frac{\partial V_{03}}{\partial \cdot \frac{\partial^3 z_{03}}{\partial x^3}}\right) - \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y}\left(\frac{\partial V_{02}}{\partial \cdot \frac{\partial^3 z_{12}}{\partial x \partial y^2}}\right) - \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2}\left(\frac{\partial V_{01}}{\partial \cdot \frac{\partial^3 z_{21}}{\partial x \partial y^2}}\right)$$

$$-\frac{\partial^3}{\partial y^3}\left(\frac{\partial V_{00}}{\partial \cdot \frac{\partial^3 z_{30}}{\partial y^3}}\right).$$

Eine der Gleichungen für das Maximum oder Minimum einer solchen Function ist also

$$\frac{\partial V_{33}}{\partial z_{33}}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V_{23}}{\partial\cdot\frac{\partial z_{33}}{\partial x}}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V_{32}}{\partial\cdot\frac{\partial z_{32}}{\partial y}}\right)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial V_{13}}{\partial\cdot\frac{\partial^2 z_{13}}{\partial x^2}}\right)+\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{\partial V_{12}}{\partial\cdot\frac{\partial^2 z_{22}}{\partial x\,\partial y}}\right)$$
$$+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial V_{11}}{\partial\cdot\frac{\partial^2 z_{31}}{\partial y^2}}\right)-\frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(\frac{\partial V_{03}}{\partial\cdot\frac{\partial^3 z_{03}}{\partial x^3}}\right)-\frac{\partial^3}{\partial x^2\,\partial y}\left(\frac{\partial V_{02}}{\partial\cdot\frac{\partial^3 z_{12}}{\partial x^2\,\partial y}}\right)$$
$$-\frac{\partial^3}{\partial x\,\partial y^2}\left(\frac{\partial V_{01}}{\partial\cdot\frac{\partial^3 z_{21}}{\partial x\,\partial y^2}}\right)-\frac{\partial^3}{\partial y^3}\left(\frac{\partial V_{00}}{\partial\cdot\frac{\partial^3 z_{30}}{\partial y^3}}\right)=0.$$

Solcher Gleichungen erhält man so viele, als Ordinaten zu bestimmen sind; sie werden aber offenbar alle durch die einzige

$$\frac{\partial V}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial\cdot\frac{\partial z}{\partial x}}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial\cdot\frac{\partial z}{\partial y}}\right)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial V}{\partial\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}}\right)+\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}}\right)$$
$$+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial V}{\partial\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}}\right)-\frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(\frac{\partial V}{\partial\cdot\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}}\right)-\frac{\partial^3}{\partial x^2\,\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial\cdot\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}}\right)$$
$$-\frac{\partial^3}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial\cdot\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}}\right)-\frac{\partial^3}{\partial y^3}\left(\frac{\partial V}{\partial\cdot\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}}\right)=0$$

repräsentirt. Das Gesetz des Fortschritts dieser Formel ist hinlänglich klar.

§. 32.

Bei einem *dreifachen* Integrale möge u eine Function von x, y, z sein, also $u=\varphi(x,y,z)$ und $u_{m,n,p}=\varphi(x+m\partial x,\ y+n\partial y,\ z+p\partial z)$; die Function unter dem Integralzeichen enthalte der Einfachheit wegen nur $u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$. Es sei also

$$f\left(u_{000},\ \frac{\partial u_{000}}{\partial x}\partial x,\ \frac{\partial u_{100}}{\partial y}\partial y,\ \frac{\partial u_{110}}{\partial z}\partial z\right)\ \text{oder}$$
$$f(u_{000},\ u_{100}-u_{000},\ u_{110}-u_{100},\ u_{111}-u_{110})=V_{000}.$$

Die Elemente, welche das Integral zusammenfafst, sind hier

$$\left.\begin{matrix}
V_{000}V_{100}V_{200}V_{300}\ldots & V_{001}V_{101}V_{201}V_{301}\ldots & V_{002}V_{102}V_{202}V_{302}\ldots & V_{003}V_{103}V_{203}V_{303}\ldots\\
V_{010}V_{110}V_{210}V_{310}\ldots & V_{011}V_{111}V_{211}V_{311}\ldots & V_{012}V_{112}V_{212}V_{312}\ldots & V_{013}V_{113}V_{213}V_{313}\ldots\\
V_{020}V_{120}V_{220}V_{320}\ldots & V_{021}V_{121}V_{221}V_{321}\ldots & V_{022}V_{122}V_{222}V_{322}\ldots & V_{023}V_{123}V_{223}V_{323}\ldots\\
V_{030}V_{130}V_{230}V_{330}\ldots & V_{031}V_{131}V_{231}V_{331}\ldots & V_{032}V_{132}V_{232}V_{332}\ldots & V_{033}V_{133}V_{233}V_{333}\ldots\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{matrix}\right\}\text{etc.}$$

Man braucht nur nach u_{111} zu differentiiren, welches Element in den Functionen V_{000}, V_{001}, V_{011}, V_{111} vorkommt; denn höhere Elemente als u_{111} kommen auch nur in 4 Functionen vor und die niedrigern erscheinen nicht vollständig in vier solchen Functionen. Es ergiebt sich auf diese Weise

$$\frac{\partial V_{111}}{\partial u_{111}} - \frac{\partial V_{111}}{\partial x \partial \cdot \frac{\partial u_{111}}{\partial x}} + \frac{\partial V_{011}}{\partial x \partial \cdot \frac{\partial u_{011}}{\partial x}} - \frac{\partial V_{011}}{\partial y \partial \cdot \frac{\partial u_{111}}{\partial y}} + \frac{\partial V_{001}}{\partial y \partial \cdot \frac{\partial u_{101}}{\partial y}} - \frac{\partial V_{001}}{\partial z \partial \cdot \frac{\partial u_{111}}{\partial z}} + \frac{\partial V_{000}}{\partial z \partial \cdot \frac{\partial u_{110}}{\partial z}}$$

$$= \frac{\partial V_{111}}{\partial u_{111}} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V_{011}}{\partial \cdot \frac{\partial u_{011}}{\partial x}}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V_{001}}{\partial \cdot \frac{\partial u_{101}}{\partial y}}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V_{000}}{\partial \cdot \frac{\partial u_{110}}{\partial z}}\right) = 0;$$

und solcher Gleichungen erhält man so viele als Functionen u zu bestimmen sind. Diese Gleichungen werden durch die eine repräsentirt:

$$\frac{\partial V}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial \cdot \frac{\partial u}{\partial x}}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial \cdot \frac{\partial u}{\partial y}}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V}{\partial \cdot \frac{\partial u}{\partial z}}\right) = 0.$$

Die in den zwei letzten Paragraphen behandelten Beispiele werden vollständig genügen, um die Methode in allen, selbst den verwickeltsten Fällen, anwenden zu können. Auch die Grenzbedingungen mit in Rechnung zu bringen, wird keine Schwierigkeiten haben.

§. 33.

Als zweites Beispiel will ich nur noch kurz die Aufgabe berühren, welche sich *Poisson* am Ende seiner Abhandlung über die Variationsrechnung im 12ten Bande der Memoiren der Pariser Akademie gestellt hat. *Euler* behandelt nämlich im Anhang zu seinem bekannten Werke „Methodus inveniendi etc." die *elastische* Curve; wobei er erzählt, dafs er durch *Daniel Bernoulli* auf diese Aufgabe geführt worden sei, der die ganze Kraft, welche in einer gekrümmten Feder liegt, durch eine einzige Formel ausgedrückt habe, die er die *vis potentialis* nenne. Dieses *Potential* ist nach *Bernoulli* das Integral

$$\int \frac{\partial s}{\varrho^2},$$

wo ∂s das Bogen-Element und ϱ den Krümmungshalbmesser vorstellt. Es mufs für die elastische Curve ein Minimum sein. Man hat also, da $\frac{1}{\varrho} = \frac{\partial x \partial^2 y - \partial y \partial^2 x}{\partial s^3}$ ist,

$$U = \int \frac{(\partial x \partial^2 y - \partial y \partial^2 x)^2}{\partial s^6}.$$

Da hier weder x noch y vorkommt, so erhält man nach dem allgemeinen

Formeln in (§. 10.) sogleich die beiden Integrale

$$\frac{\partial f}{\partial.\partial x} - \partial\cdot\frac{\partial f}{\partial.\partial^2 x} = a,$$

$$\frac{\partial f}{\partial.\partial y} - \partial\cdot\frac{\partial f}{\partial.\partial^2 y} = b,$$

oder

$$\frac{2}{\varrho}\frac{\partial^2 y}{\partial s^2} - \frac{5}{\varrho^2}\frac{\partial x}{\partial s} + 2\partial\cdot\frac{1}{\varrho}\frac{\partial y}{\partial s^2} = a \quad \text{und} \quad \frac{2}{\varrho}\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + \frac{5}{\varrho^2}\frac{\partial y}{\partial s} + 2\partial\cdot\frac{1}{\varrho}\frac{\partial x}{\partial s^2} = b.$$

Nimmt man ∂s constant an, so wird $\partial x\,\partial^2 x + \partial y\,\partial^2 y = 0$, und daher folgt aus den beiden letzten Gleichungen auf der Stelle:

$$2\,\partial x\,\partial\cdot\frac{1}{\varrho}\frac{\partial x}{\partial s^2} + 2\,\partial y\,\partial\cdot\frac{1}{\varrho}\frac{\partial y}{\partial s^2} = a\,\partial y + b\,\partial x$$

oder

$$2\partial\cdot\frac{1}{\varrho} = a\,\partial y + b\,\partial x$$

Aus dem Integrale dieser Gleichung

$$(1.)\qquad \frac{1}{\varrho} = ay + bx + c,$$

in welchem $2a$ und $2b$ an die Stelle von a und b gesetzt worden sind, erkennt man schon die ***elastische Linie.*** Um noch weiter zu integriren, setze man

$$\begin{aligned} ay + bx + c &= \xi, \\ ax - by \quad &= \eta, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} a\,\partial y + b\,\partial x &= \partial\xi \quad \text{und} \quad a\,\partial^2 y + b\,\partial^2 x = \partial^2\xi, \\ a\,\partial x - b\,\partial y &= \partial\eta \quad \text{und} \quad a\,\partial^2 x - b\,\partial^2 y = \partial^2\eta, \end{aligned}$$

folglich

$$(a^2+b^2)(\partial x^2 + \partial y^2) = \partial\xi^2 + \partial\eta^2 \quad \text{und} \quad (a^2+b^2)(\partial^2 x^2 + \partial^2 y^2) = \partial^2\xi^2 + \partial^2\eta^2.$$

Bezeichnet man also $\partial\xi^2 + \partial\eta^2$ durch $\partial\sigma^2$, so ist

$$(2.)\qquad \partial s\sqrt{(a^2+b^2)} = \partial\sigma.$$

Es ist aber

$$\partial x\,\partial^2 y - \partial y\,\partial^2 x = \frac{\partial s^2}{\varrho} \quad \text{und} \quad \partial x\,\partial^2 x + \partial y\,\partial^2 y = 0.$$

Die Summe der Quadrate dieser beiden Gleichungen giebt

$$(3.)\qquad \partial^2 x^2 + \partial^2 y^2 = \frac{\partial s^4}{\varrho^2}, \quad \text{also} \quad \frac{1}{\varrho^2} = (a^2+b^2)\frac{\partial^2\xi^2 + \partial^2\eta^2}{\partial\sigma^4}.$$

Da ∂s constant angenommen worden ist, so ist auch aus (2.)

$$\partial\xi\,\partial^2\xi + \partial\eta\,\partial^2\eta = 0, \quad \text{also} \quad \partial^2\xi^2 + \partial^2\eta^2 = \frac{\partial\sigma^2\,\partial^2\xi^2}{\partial\eta^2};$$

daher ist endlich aus (1.) und (3.)

$$\frac{\partial^2 \xi \sqrt{(a^2+b^2)}}{\partial \eta \partial \sigma} = \xi,$$

also

$$\frac{\partial \xi \partial^2 \xi \sqrt{(a^2+b^2)}}{\partial \sigma \sqrt{(\partial \sigma^2 - \partial \xi^2)}} = \xi \partial \xi.$$

Von dieser Gleichung ist das Integral, wenn man $2\sqrt{(a^2+b^2)} = \frac{1}{f}$ setzt,

$$\frac{1}{f}\sqrt{\left(1-\frac{\partial \xi^2}{\partial \sigma^2}\right)} + \xi^2 = g^2.$$

Daher wird

$$\sigma = \int \frac{\partial \xi}{\sqrt{(1-f^2(g^2-\xi^2)^2)}} \quad \text{und} \quad \eta = f\int \frac{(g^2-\xi^2)\partial \xi}{\sqrt{(1-f^2(g^2-\xi^2)^2)}},$$

oder für $fg^2 = e$ und $\xi = g \sin \varphi$:

$$\sigma = g\int \frac{\cos \varphi \partial \varphi}{\sqrt{(1-e^2 \cos^4 \varphi)}} \quad \text{und} \quad \eta = e\int \frac{\cos^2 \varphi \partial \varphi}{\sqrt{(1-e^2 \cos^4 \varphi)}}$$

Hätte man der elastischen Feder eine bestimmte Länge gegeben, also

$$U = \int \frac{\partial s}{\varrho^2} + \lambda \int \partial s$$

angenommen, so wäre die Rechnung dadurch nicht wesentlich geändert worden.

Poisson geht nun einen Schritt weiter und betrachtet eine elastische *Scheibe* als eine krumme Fläche, für welche, bei einem gegebenen Inhalte, das Integral

$$\iint \left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'}\right)^2 \partial x \partial y$$

ein Minimum wird. Er versteht dabei unter ϱ und ϱ' die beiden auf einander senkrechten Hauptkrümmungshalbmesser eines Puncts der krummen Fläche. Bezeichnet man demnach, wie gewöhnlich, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ entsprechend durch p, q, r, s, t, so wird

$$U = \iint \frac{\{(1+p^2)t - 2pqs + (1+q^2)r\}^2}{(1+p^2+q^2)^2} \partial x \partial y + \lambda \iint \sqrt{(1+p^2+q^2)} \partial x \partial y.$$

Nachdem *Poisson* hier die höheren Potenzen der Gröfsen $p, q, \ldots$ vernachlässigt hat, behält er für U den Ausdruck

$$U = \iint \partial x \partial y \left\{\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)^2 + 2\lambda + \lambda\left(\frac{\partial z^2}{\partial x^2} + \frac{\partial z^2}{\partial y^2}\right)\right\},$$

der nach Anwendung der oben entwickelten allgemeinen Formel

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial\cdot\frac{\partial z}{\partial x}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial\cdot\frac{\partial z}{\partial y}}\right)-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial V}{\partial\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}}\right)-\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}}\right)-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial V}{\partial\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}}\right)=0$$

zu der Gleichung

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 z}{\partial y^4}-\lambda\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)=0$$

führt. Die in der *Poisson*'schen Abhandlung vorkommenden Untersuchungen über die Grenzbedingungen bei solchen Aufgaben lassen sich nach unserer Weise durch sehr einfache Betrachtungen ersetzen.

§. 34.

Um die Rechnung weiter zu führen setzt *Poisson*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\zeta;$$

wodurch sich die letzte Gleichung in

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}=\lambda\zeta$$

verwandelt. Er wendet dann Polarcoordinaten an, indem er $x=r\cos\theta$ und $y=r\sin\theta$ setzt und kommt nach einer ziemlich unbequemen Rechnung zu der Gleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}=\zeta,$$

aus welcher dann eben so

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\zeta}{\partial r}=\lambda\zeta$$

folgt. Diese Rechnungen lassen sich aber nach einer schönen Arbeit *Jacobi's*: „Über eine particuläre Lösung der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$" im 36ten Bande dieses Journals, durch ganz einfache Operationen ersetzen. Ist nämlich in dem Integrale $\iiint G\partial x\,\partial y\,\partial z$ die Gröfse v eine Function von x, y, z und G eine Function von $x, y, z, v, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z}$, und man drückt x, y, z durch neue Veränderliche λ, μ, ν so aus, dafs

$$x=\pi(\lambda,\mu,\nu),\quad y=\varrho(\lambda,\mu,\nu),\quad z=\sigma(\lambda,\mu,\nu)$$

gesetzt wird, so verwandeln sich dadurch v in φ und G in Γ, wo Γ eine

Function von λ, μ, ν, φ, $\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}$ ist. Die Determinante $\Sigma\pm\frac{\partial x}{\partial\lambda}\frac{\partial y}{\partial\mu}\frac{\partial z}{\partial\nu}$ $=\Sigma\pm\frac{\partial\pi}{\partial\lambda}\frac{\partial\varrho}{\partial\mu}\frac{\partial\sigma}{\partial\nu}$ werde durch $\varDelta$ bezeichnet, so erhält man

$$\iiint G\,\partial x\,\partial y\,\partial z = \iiint \Gamma\varDelta\,\partial\lambda\,\partial\mu\,\partial\nu.$$

Differentiirt man diese Gleichung nach der Gröfse v, oder, was Dasselbe ist, nach φ, so erhält man, wenn statt $\partial x\partial y\partial z$ sein Werth $\varDelta\partial\lambda\partial\mu\partial\nu$ gesetzt und der Factor $\partial\lambda\partial\mu\partial\nu$ weggelassen wird:

$$(1.)\quad \varDelta\left\{\frac{\partial G}{\partial v}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial G}{\partial\cdot\frac{\partial v}{\partial x}}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial G}{\partial\cdot\frac{\partial v}{\partial y}}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial G}{\partial\cdot\frac{\partial v}{\partial z}}\right)\right\}$$
$$=\varDelta\frac{\partial\Gamma}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{\varDelta\partial\Gamma}{\partial\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}}\right)-\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{\varDelta\partial\Gamma}{\partial\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}}\right)-\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{\varDelta\partial\Gamma}{\partial\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}}\right)$$

Statt eines dreifachen Integrals hätte offenbar auch ein $n$faches der Betrachtung zum Grunde gelegt werden können.

Wir wollen diese nützliche Formel zunächst auf die Transformation des Ausdrucks

$$S=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

anwenden, der so häufig in der mathematischen Physik vorkommt Setzt man nemlich $x=\lambda\cos\mu$, $y=\lambda\sin\mu\cos\nu$, $z=\lambda\sin\mu\sin\nu$, so wird

$$\frac{\partial v}{\partial\lambda}=\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\lambda}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\lambda}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial\lambda}=\frac{\partial v}{\partial x}\cos\mu+\frac{\partial v}{\partial y}\sin\mu\cos\nu+\frac{\partial v}{\partial z}\sin\mu\sin\nu,$$
$$\frac{\partial v}{\partial\mu}=\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\mu}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\mu}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial\mu}=-\frac{\partial v}{\partial x}\lambda\sin\mu+\frac{\partial v}{\partial y}\lambda\cos\mu\cos\nu+\frac{\partial v}{\partial z}\lambda\cos\mu\sin\nu,$$
$$\frac{\partial v}{\partial\nu}=\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\nu}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\nu}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial\nu}=-\frac{\partial v}{\partial y}\lambda\sin\mu\sin\nu+\frac{\partial v}{\partial z}\lambda\sin\mu\cos\nu.$$

Hieraus ergiebt sich sogleich

$$\left(\frac{\partial v}{\partial\lambda}\right)^2+\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{\partial v}{\partial\mu}\right)^2+\frac{1}{\lambda^2\sin^2\mu}\left(\frac{\partial v}{\partial\nu}\right)^2=\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2$$

also

$$(2.)\quad \iiint\left\{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right\}\partial x\,\partial y\,\partial z$$
$$=\iiint\left\{\left(\frac{\partial v}{\partial\lambda}\right)^2+\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{\partial v}{\partial\mu}\right)^2+\frac{1}{\lambda^2\sin^2\mu}\left(\frac{\partial v}{\partial\nu}\right)^2\right\}\lambda^2\sin\mu\,\partial\lambda\,\partial\mu\,\partial\nu,$$

da nämlich das Element $\partial x\partial y\partial z$ bei der Transformation durch $\lambda^2\sin\mu\,\partial\lambda\,\partial\mu\,\partial\nu$ ersetzt werden mufs, also $\varDelta=\lambda^2\sin\mu$ ist. Nach der Formel (1.) erhält man

daher aus (2.), wenn man auf beiden Seiten mit $\lambda^2\sin\mu$ dividirt:

$$S = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

$$= \frac{1}{\lambda^2\sin\mu}\left\{\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\lambda^2\sin\mu\frac{\partial v}{\partial\lambda}\right)+\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\sin\mu\frac{\partial v}{\partial\mu}\right)+\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{\sin\mu}\frac{\partial v}{\partial\nu}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\lambda^2\frac{\partial v}{\partial\lambda}\right)+\frac{1}{\lambda^2\sin\mu}\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\sin\mu\frac{\partial v}{\partial\mu}\right)+\frac{1}{\lambda^2\sin^2\mu}\frac{\partial^2 v}{\partial\nu^2}$$

$$= \frac{1}{\lambda}\frac{\partial^2(\lambda v)}{\partial\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^2\sin\mu}\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\sin\mu\frac{\partial v}{\partial\mu}\right)+\frac{1}{\lambda^2\sin^2\mu}\frac{\partial^2 v}{\partial\nu^2}.$$

Wäre demnach etwa der Ausdruck links in dieser Gleichung Null, so hätte man auch

$$\sin\mu\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\lambda^2\frac{\partial v}{\partial\lambda}\right)+\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\sin\mu\frac{\partial v}{\partial\mu}\right)+\frac{1}{\sin\mu}\frac{\partial^2 v}{\partial\nu^2} = 0;$$

was die bekannte, zuerst von *Laplace* gefundene Gleichung ist, die sonst nur durch beschwerliche Rechnungen entwickelt werden kann. *Cauchy* hat im ersten Bande seiner „Exercices d'analyse et de physique mathématique" pag. 26 dieser Transformation eine etwas veränderte Gestalt gegeben, deren ich hier gedenken will. Setzt man nämlich

$$\sin\mu = \frac{1}{\cos\psi},\quad \text{also}\quad \cos\mu = i\,\text{tg}\,\psi \quad\text{und}\quad \sin\mu\,\partial\mu = -\frac{i\partial\psi}{\cos^2\psi},$$

so erhält man, ganz wie oben verfahrend,

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial\lambda}\right)^2+\frac{\cos^2\psi}{\lambda^2}\left(\left(\frac{\partial v}{\partial\nu}\right)^2-\left(\frac{\partial v}{\partial\psi}\right)^2\right),$$

also, da $\varDelta = -\frac{i\lambda^2}{\cos^2\psi}$ ist,

$$\iiint\left\{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right\}\partial x\,\partial y\,\partial z$$

$$= -\iiint\left\{\frac{\lambda^2}{\cos^2\psi}\left(\frac{\partial v}{\partial\lambda}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial\psi}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial\nu}\right)^2\right\}i\,\partial\lambda\,\partial\psi\,\partial\nu.$$

Daher ist

$$S = \frac{\cos^2\psi}{\lambda^2}\left\{\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{\lambda^2}{\cos^2\psi}\frac{\partial v}{\partial\lambda}\right)-\frac{\partial^2 v}{\partial\psi^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial\nu^2}\right\} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial^2(\lambda v)}{\partial\lambda^2}+\frac{\cos^2\psi}{\lambda^2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial\nu^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial\psi^2}\right).$$

Für $i\psi$ statt ψ wird

$$\text{tg}\,\tfrac{1}{2}\mu = e^{\psi}$$

und

$$\lambda S = \frac{\partial^2(\lambda v)}{\partial\lambda^2}+\left(\frac{e^{\psi}+e^{-\psi}}{2\lambda}\right)^2\left\{\frac{\partial^2(\lambda v)}{\partial\psi^2}+\frac{\partial^2(\lambda v)}{\partial\nu^2}\right\};$$

so, wie *Cauchy* die Formel aufstellt. Das Weitere über diesen Gegenstand ist bei *Jacobi* am angeführten Orte nachzusehen.

Wir wollen nun dieselbe Formel auf unsern einfacheren Fall anwenden, wo $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ durch Einführung von $x=r\cos\theta$ und $y=r\sin\theta$ transformirt werden soll. Hier ist

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta,$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta}=-\frac{\partial z}{\partial x}r\sin\theta+\frac{\partial z}{\partial y}r\cos\theta,$$

also

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.$$

Da das Flächen-Element $\partial x\,\partial y$ durch $r\,\partial r\,\partial\theta$ ersetzt werden mufs, so ist $\varDelta=r$, also

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial z}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)\right\}=\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2};$$

so wie es oben angegeben wurde.

Die weitere Lösung der Aufgabe gehört nicht zu unserem Zwecke.

§. 35.

Wie wenig noch die Kenntnifs der Variationsrechnung *verbreitet* sein dürfte und von ausgezeichneten Mathematikern für verbreitet gehalten wird, sieht man daraus, dafs z. B. *Poisson* in seinem Lehrbuche der Mechanik, um nur die einfachsten mechanischen Eigenschaften der *Cykloïde* nachweisen zu können, es für nöthig hält, den Leser erst mit den Elementen der Variationsrechnung bekannt zu machen. Aus demselben Grunde sind auch die schönen Transformationsformeln der Bewegungsgleichungen, welche *Lagrange* in der analytischen Mechanik entwickelt, weder in das *Poisson*'sche, noch in ein anderes der bekannteren Lehrbücher der Mechanik übergegangen. Da diese Formeln ein besonderes Interesse haben, und sich durch die von uns benutzten Vorstellungen leicht ergeben, so will ich sie zum Schlusse hier berühren.

Man habe die drei Veränderlichen x, y, z durch drei andere ξ, η, ζ auf die Weise ersetzt, dafs

$$(1.)\quad x=\varphi(\xi,\eta,\zeta),\quad y=\chi(\xi,\eta,\zeta),\quad z=\psi(\xi,\eta,\zeta).$$

Den willkürlichen Werthen

$$\xi,\ \eta,\ \zeta;\quad \xi_1,\ \eta_1,\ \zeta_1;\quad \xi_2,\ \eta_2,\ \zeta_2$$

mögen die Werthe

$$x,\ y,\ z;\quad x_1,\ y_1,\ z_1;\quad x_2,\ y_2,\ z_2$$

entsprechen. Eine Function F von x, y, z, Δx, Δy, Δz verwandele sich durch Einsetzen dieser Werthe in eine andere Function Φ der Gröfsen ξ, η, ζ, $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, $\Delta\zeta$, so dafs sich also die Gleichungen

$$(2.)\quad F(x,\ y,\ z,\ \Delta x,\ \Delta y,\ \Delta z) = \Phi(\xi,\ \eta,\ \zeta,\ \Delta\xi,\ \Delta\eta,\ \Delta\zeta)$$

oder kurz $F = \Phi$,

$$(3.)\quad F(x_1, \eta_1, z_1, \Delta x_1, \Delta y_1, \Delta z_1) = \Phi(\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \Delta\xi_1, \Delta\eta_1, \Delta\zeta_1)$$

oder kurz $F_1 = \Phi_1$

ergeben. Läfst man nun x, y, z um die unendlich kleinen Gröfsen a, b, c wachsen, so mögen dadurch ξ_1, η_1, ζ_1 um die unendlich kleinen Gröfsen α, β, γ zunehmen. Man erhält dann aus (2.) und (3.):

$$(4.)\quad \frac{\partial F}{\partial\Delta x}a+\frac{\partial F}{\partial\Delta y}b+\frac{\partial F}{\partial\Delta z}c = \frac{\partial\Phi}{\partial\Delta\xi}\alpha+\frac{\partial\Phi}{\partial\Delta\eta}\beta+\frac{\partial\Phi}{\partial\Delta\zeta}\gamma \quad\text{und}$$

$$(5.)\quad \Big(\frac{\partial F_1}{\partial x_1}-\frac{\partial F_1}{\partial\Delta x_1}\Big)a+\Big(\frac{\partial F_1}{\partial y_1}-\frac{\partial F_1}{\partial\Delta y_1}\Big)b+\Big(\frac{\partial F_1}{\partial z_1}-\frac{\partial F_1}{\partial\Delta z_1}\Big)c$$

$$= \Big(\frac{\partial\Phi_1}{\partial\xi_1}-\frac{\partial\Phi_1}{\partial\Delta\xi_1}\Big)\alpha+\Big(\frac{\partial\Phi_1}{\partial\eta_1}-\frac{\partial\Phi_1}{\partial\Delta\eta_1}\Big)\beta+\Big(\frac{\partial\Phi_1}{\partial\zeta_1}-\frac{\partial\Phi_1}{\partial\Delta\zeta_1}\Big)\gamma.$$

Zieht man (5.) von (4.) ab, so ergiebt sich

$$\Big(\partial\cdot\frac{\partial F}{\partial\Delta x}-\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\Big)a+\Big(\partial\cdot\frac{\partial F}{\partial\Delta y}-\frac{\partial F_1}{\partial y_1}\Big)b+\Big(\partial\cdot\frac{\partial F}{\partial\Delta z}-\frac{\partial F_1}{\partial z_1}\Big)c$$

$$= \Big(\partial\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial\Delta\xi}-\frac{\partial\Phi_1}{\partial\xi_1}\Big)\alpha+\Big(\partial\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial\Delta\eta}-\frac{\partial\Phi_1}{\partial\eta_1}\Big)\beta+\Big(\partial\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial\Delta\zeta}-\frac{\partial\Phi_1}{\partial\zeta_1}\Big)\gamma.$$

Nimmt man nun x_1, y_1, z_1 unendlich wenig von x, y, z verschieden an, also auch ξ_1, η_1, ζ_1 unendlich nahe dem ξ, η, ζ und bezeichnet die Gröfsen a, b, c und α, β, γ lieber durch δx, δy, δz und $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$, um gleich zu sehen von welchen Elementen sie die Zunahmen sind, so verwandelt sich die letzte Gleichung in

$$(6.)\quad \Big(\partial\cdot\frac{\partial F}{\partial.\partial x}-\frac{\partial F}{\partial x}\Big)\delta x+\Big(\partial\cdot\frac{\partial F}{\partial.\partial y}-\frac{\partial F}{\partial y}\Big)\delta y+\Big(\partial\cdot\frac{\partial F}{\partial.\partial z}-\frac{\partial F}{\partial z}\Big)\delta z$$

$$= \Big(\partial\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial.\partial\xi}-\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\Big)\delta\xi+\Big(\partial\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial.\partial\eta}-\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\Big)\delta\eta+\Big(\partial\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial.\partial\zeta}-\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}\Big)\delta\zeta$$

Wäre z. B.

$$F = T(\partial x, \partial y, \partial z) - G(x, y, z) = T - G$$

und es verwandelte sich durch die erwähnten Substitutionen

T in $\mathrm{T}(\xi,\eta,\zeta,\partial\xi,\partial\eta,\partial\zeta)$ und G in $\Gamma(\xi,\eta,\zeta)$, also Φ in $\mathrm{T}-\Gamma$,

so erhält man in diesem Falle aus (6.):

$$(7.)\quad \Big(\partial\cdot\frac{\partial T}{\partial.\partial x}+\frac{\partial G}{\partial x}\Big)\delta x+\Big(\partial\cdot\frac{\partial T}{\partial.\partial y}+\frac{\partial G}{\partial y}\Big)\delta y+\Big(\partial\cdot\frac{\partial T}{\partial.\partial z}+\frac{\partial G}{\partial z}\Big)\delta z$$
$$=\Big(\partial\cdot\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial.\partial\xi}-\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial\xi}+\frac{\partial\Gamma}{\partial\xi}\Big)\delta\xi+\Big(\partial\cdot\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial.\partial\eta}-\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial\eta}+\frac{\partial\Gamma}{\partial\eta}\Big)\delta\eta$$
$$+\Big(\partial\cdot\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial.\partial\zeta}-\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial\zeta}+\frac{\partial\Gamma}{\partial\zeta}\Big)\delta\zeta.$$

Diese Formel läfst sich nun unmittelbar auf die ***Bewegungsgleichungen*** anwenden, die für einen materiellen Punct Statt finden, der von einem andern festen Puncte angezogen wird. Die Gleichungen sind bekanntlich, wenn R eine Function der gegenseitigen Entfernung r der beiden Puncte ist:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}+\frac{Rx}{r}=0;\quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\frac{Ry}{r}=0;\quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}+\frac{Rz}{r}=0,$$

oder, da $r^2=x^2+y^2+z^2$ und $r\partial r=x\partial x+y\partial y+z\partial z$ ist,

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}+\frac{R\partial r}{\partial x}=0;\quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\frac{R\partial r}{\partial y}=0;\quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}+\frac{R\partial r}{\partial z}=0.$$

Setzt man nun

$$R\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{\partial G}{\partial x},\quad R\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{\partial G}{\partial y},\quad R\frac{\partial r}{\partial z}=\frac{\partial G}{\partial z},\ \text{also}$$
$$R\Big(\frac{\partial r}{\partial x}\partial x+\frac{\partial r}{\partial y}\partial y+\frac{\partial r}{\partial z}\partial z\Big)=\frac{\partial G}{\partial x}\partial x+\frac{\partial G}{\partial y}\partial y+\frac{\partial G}{\partial z}\partial z$$

oder $R\partial r=\partial G$, also $\int R\partial r=G$ (wo G eine blofse Function von x, y, z ist), so werden die ***Bewegungsgleichungen*** zu folgenden:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}+\frac{\partial G}{\partial x}=0;\quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\frac{\partial G}{\partial y}=0;\quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}+\frac{\partial G}{\partial z}=0.$$

Setzt man endlich

$$\tfrac{1}{2}\Big(\frac{\partial x^2+\partial y^2+\partial z^2}{\partial t^2}\Big)=T,$$

so ist

$$\frac{\partial x}{\partial t^2}=\frac{\partial T}{\partial.\partial x},\quad \frac{\partial y}{\partial t^2}=\frac{\partial T}{\partial.\partial y},\quad \frac{\partial z}{\partial t^2}=\frac{\partial T}{\partial.\partial z},\ \text{also}$$
$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=\partial\cdot\frac{\partial T}{\partial.\partial x},\quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\partial\cdot\frac{\partial T}{\partial.\partial y},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=\partial\cdot\frac{\partial T}{\partial.\partial z},$$

und die Bewegungsgleichungen verwandeln sich in

$$(8.)\quad \partial\cdot\frac{\partial T}{\partial.\partial x}+\frac{\partial G}{\partial x}=0;\quad \partial\cdot\frac{\partial T}{\partial.\partial y}+\frac{\partial G}{\partial y}=0;\quad \partial\cdot\frac{\partial T}{\partial.\partial z}+\frac{\partial G}{\partial z}=0.$$

Vermöge dieser Gleichungen ist aus (7.) die Seite links verschwunden: also mufs die Seite rechts ebenfalls verschwinden; was nur möglich ist, wenn die Coëfficienten von $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ zu Null werden, da diese Gröfsen zwar unendlich klein, aber ihre Verhältnisse zu einander ganz willkürlich gesetzt sind, also auch nicht etwa durch eine Gleichung zwischen andern Gröfsen bestimmt werden können. Man erhält demnach statt (8.) die drei merkwürdigen Gleichungen

$$\partial\cdot\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial.\partial\xi}-\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial\xi}+\frac{\partial\Gamma}{\partial\xi}=0,$$
$$\partial\cdot\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial.\partial\eta}-\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial\eta}+\frac{\partial\Gamma}{\partial\eta}=0,$$
$$\partial\cdot\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial.\partial\zeta}-\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial\zeta}+\frac{\partial\Gamma}{\partial\zeta}=0,$$

deren Anwendung in der analytischen Mechanik von *Lagrange* nachzusehen ist.

Berlin, im Februar 1851.

22.

Berichtigung zu der Abhandlung No. 1. in diesem Bande.

(Vom Verfasser derselben*).)

1. Der in (§. 3.) enthaltene Satz: dafs der allgemeine Summen-Ausdruck einer $n$gliedrigen Reihe

$$\pm a + bx - cx + \cdots \pm px^{n-1}$$

die Form $S_n = f(x) \pm F(x, n)$ haben müsse, ist richtig; der dafür gegebene Beweis aber ist mangelhaft, und es kann der Satz einfacher auf folgende Weise begründet werden. Ist $f(x)$ der geschlossene Ausdruck, welcher die unend-

---

*) Der Herr Verfasser der genannten Abhandlung ist leider! bereits verstorben; und zwar so bald nach dem Niederschreiben des obigen Zusatzes zu derselben, dafs dieser Zusatz nicht mehr bei Lebzeiten des Verfassers gedruckt werden konnte.

Der frühe Hintritt dieses in mehr als einem Fach bewanderten Mannes ist gewifs zu bedauern; und für die Mathematik in der Hinsicht insbesondere, dafs hier einer der seltenen Fälle war, wo Jemand, der ganz verschiedenartigen Berufsgeschäften eifrig oblag, mit der Mathematik, aus blofsem Gefallen an derselben, nicht blofs oberflächlich, sondern tiefer eindringend sich beschäftigte. Dilettanten, welche mit Erfolg zu arbeiten vermögen, sind bekanntlich in der höhern Mathematik seltener, als in andern strengen Wissenschaften.

Dem Herausgeber dieses Journals sind auf seinen Wunsch einige nähere Nachrichten über den Lebenslauf des Herrn *Prehn* zu Theil geworden, und er glaubt nicht Unrecht zu thun, wenn er dieselben hier auszugsweise hersetzt. Sie gewähren zugleich einen Beitrag zu den Schilderungen der mannichfaltigen Entwicklungs-Arten der menschlichen geistigen Thätigkeit.

„*Jeppe Prehn* wurde zu Kopenhagen am 29ten August 1803 geboren. Sein „Vater, später Conferenzrath, war damals bei der deutschen Kanzlei angestellt. Bis zu „seinem 11ten Jahre blieb *Prehn* in seiner Geburtsstadt, und darauf bei seinen Ältern im „Schleswigschen (der Vater bekleidete daselbst eine Bürgermeisterstelle). Im Jahre 1816 „zog er mit seinem Vater nach Ratzeburg. Hier besuchte er die alte Domschule, darauf „1821 die Universität Göttingen und 1822 die Universität Kiel, um nach dem Wunsche „seiner Ältern die Rechte zu studiren; während ihn jedoch die eigene Neigung mehr zu „mathematischen Studien hintrieb. Er verfolgte indessen mit gewissenhaftem Eifer seine „Fachstudien, so dafs er 1825 das juristische Examen zu grofser Zufriedenheit in Kiel „bestand und bald darauf als Volontair an die Rentenkammer nach Kopenhagen gehen „konnte. 1828 ward er Bevollmächtigter an einem Comtoir dieser Behörde. Als solcher „nahm er Urlaub zu einer Reise nach Paris, um einerseits das Wesen der Geschwornen-„gerichte, andrerseits mathematische Wissenschaften und Wasserbaukunst zu studiren. „Letzteres Studium begann er durch einen mehrmonatlichen Aufenthalt in Holland. Am „1ten August 1829 befand er sich in Paris, zufolge eines über den Aufenthalt daselbst

liche Reihe mit wechselnden Zeichen

$$\pm a + bx - cx^2 + dx^3 - \cdots$$

nach den Regeln analytischer Rechnungen gleichzusetzen ist, und ist

$$S_n = \pm a + bx - cx^2 + \cdots \pm px^{n-1},$$

so erhält man

$$f(x) = S_n \mp [qx^n - rx^{n+1} + \cdots];$$

wo das obere oder das untere Zeichen gilt, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Setzt man die in Klammern eingeschlossene unendliche Reihe, die eine Function von x und n ist, $= F(x, n)$, so hat man

$$S_n = f(x) \pm F(x, n);$$

wo das obere oder das untere Zeichen gilt, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Aus der Gleichung (II. §. 3.) folgt, dafs $F(x, n)$ für alle Werthe von x, die in dem Intervall der Convergenz liegen, bei unendlichem Wachsen von n verschwinden mufs.

„geführten Tagebuchs. Dieses Tagebuch, mehr zu eigner gemüthlicher Erinnerung, als in „wissenschaftlicher Absicht geschrieben, enthält nur wenige genaue Angaben über den „Gang seiner mathematischen Studien. Er benutzte seinen Aufenthalt in Paris zugleich „zur socialen Ausbildung in den ersten Schichten der Pariser Gesellschaft. Die hierüber „niedergeschriebenen Bemerkungen, so wie zerstreute Bemerkungen über das Pariser „Volksleben, zeigen an *Prehn* eine feine Beobachtungsgabe. Ungeachtet der Mannig- „faltigkeit Dessen, wofür er sich lebhaft interessirte, mochte er doch keinesweges blofs „oberflächlich sich umsehen, sondern abwechselnd nahmen bald juristische, bald mathema- „tische Studien seine ganze Zeit in Anspruch; und dann wurde immer ein Thema ganz „abgemacht. Wiederum auch ergab er sich ganz der Geselligkeit. Die grofsen hydrau- „lischen Anlagen in und um Paris besuchte und untersuchte er. Vor Allem nahm seine „Aufmerksamkeit der damals im Bau begriffene Canal du centre in Anspruch, zu welchem „er eigends eine Reise von Paris aus machte. Der Bericht über diese Reise enthält in- „dessen nur feine Characterschilderungen des Volkslebens, und frische und lebendige „Schilderungen der Landschaft."

„Schon in Paris verhielt er sich aber bei seinen mathematischen Beschäftigungen „nicht blofs in sich aufnehmend, sondern er scheint schon mehrere Abhandlungen selbst- „ständig ausgearbeitet zu haben. Er erwähnt einer solchen, ohne Angabe des Themas, „welche er anfänglich habe veröffentlichen wollen. Da sei ihm aber auf der Bibliothek „ein Aufsatz von *Euler* zu Gesicht gekommen, der, wenn auch auf anderem Wege, die- „selben Resultate gewonnen habe, als er. Mit einem anderen Aufsatze, betitelt: „Méthode „générale analytique pour calculer le frottement dans les engrénages" wollte er den „längere Zeit unterbrochenen Verkehr mit *Poisson* wieder anknüpfen. *Poisson* übergab „den Aufsatz der Akademie in Paris, ungeachtet *Prehn* nicht daran dachte."

„Im October 1830 kehrte er nach Kopenhagen zurück und ward Comtoirchef bei „der Rentenkammer. Im Jahre 1834 wurde er aufgefordert, sich zu der damals erledigten „mathematischen Professur an der Universität zu Kiel zu melden. Er zog es aber vor, „die Amtmannstelle zu Steinhorst im Lauenburgischen anzunehmen. In demselben Jahre „verheirathete er sich und lebte bis 1848 in stiller ländlicher Zurückgezogenheit. In der „ganzen Zeit beschäftigte er sich in seinen Mufsestunden mit mathematischen und physi-

2. Die ganze Anordnung in der Abhandlung, namentlich in den Paragraphen (3. 6. 14. und 15.), zeigt, dafs ich nur solche divergente Reihen zu behandeln beabsichtigt habe, die für irgend ein Intervall der Variablen convergent sind. Ich habe aber unterlassen, dieser Beschränkung in (§. 1.) ausdrücklich zu erwähnen, weil ich es übersahe, dafs es auch unter den nach Potenzen einer Variabeln geordneten Reihen solche giebt, die für *jeden* Werth der Variabeln divergent sind. Wird diese *Beschränkung* hinzugefügt, so bleiben alle in der Abhandlung enthaltenen Ausführungen bestehen; nur mufs der in den Paragraphen (14. und 15.) begründeten Behauptung: dafs der Gebrauch solcher divergenten Reihen bei analytischen Rechnungen zuläfslich sei, die *Bedingung* hinzugefügt werden: dafs die Reihen, auf welche man im Laufe der Rechnungs-Operation geführt wird, so wie die Reihe, welche das Endresultat der Rechnung bildet, gleichfalls Reihen sein müssen, welche für irgend ein Intervall der Variabeln convergiren.

„calischen Studien. Jedoch begann er eine gröfsere selbstständige Untersuchung erst „im Jahre 1845, als er durch *Eisenlohrs* Lehrbuch der Physik auf die Wirkungen der „specifischen Wärme und die Expansivkraft der Luft besonders aufmerksam wurde. Die „hierüber gefertigte Arbeit gab seiner Thätigkeit in den letzten Jahren eine entschie- „denere Richtung."

„Nachdem er nämlich Steinhorst verlassen und nach Ratzeburg gegangen war, „wandte er sich ganz den mathematischen Studien zu. Um literarische Hülfsmittel zu „erlangen, war es ihm willkommen, von der damaligen Statthalterschaft des Herzogthums „Lauenburg mit einer länger dauernden Mission nach Berlin betraut zu werden, welche „ihm zugleich Zeit und Gelegenheit für seinen Wunsch gab. Das nächste Resultat seiner „Studien war hier die in diesem Journal Band 41 abgedruckte Abhandlung „Über die „Bedeutung der divergenten unendlichen Reihen etc." Doch eröffnete er seine schrift- „stellerische Laufbahn nicht mit dieser Abhandlung, um, wie er sagte, nicht sogleich mit „Etwas hervorzutreten, was die Analytiker von vorn herein mit mifstrauischen Augen an- „sehen würden, sondern liefs ihr zwei andere, kleinere Aufsätze im 40ten Bande des „Journals vorangehen („Remarques sur le calcul etc." und „Über die Aufhebung der „Ungleichmäfsigkeit etc.")."

„Sein Wunsch war eine Stellung mehr für das eigentliche Feld seines Wirkens. „Er sagt in einem Briefe, er habe es klar erkannt, dafs die Mathematik und deren An- „wendungen auf die Ausübung das eigentliche Feld seines Wirkens sei. Doch wurde ihm „dieser Wunsch nicht erfüllt."

„Ein altes Hals-Übel, das sich von Jahr zu Jahr verschlimmert hatte, nahm 1850 „einen gefährlichen Character an. Er reisete im Sommer 1850 nach Berlin, um einen „Arzt, der ihn daselbst schon früher behandelt hatte, zu consultiren. Auf Anrathen der „Berliner Ärzte trat er eine Reise nach dem südlichen Italien an, wo er durch längeren „Aufenthalt seine Gesundheit herzustellen hoffte. Doch ereilte ihn der Tod auf der Reise. „Am 28ten November 1850 starb er in *Reichenbach;* in den letzten Stunden gepflegt „von seiner ihn begleitenden Gattin und einer Tochter, fern von seinen andern fünf „Töchtern. Ein Sohn und zwei Töchter waren den Ältern schon im zarten Kindesalter „durch den Tod entrissen."

3. Es könnte scheinen, als wenn die hiernach eintretende Beschränkung des Resultats der Abhandlung von bedeutendem Umfange sei; dies ist aber nicht der Fall.

Die Reihen, welche nach Potenzen einer Variabeln fortschreiten, haben fast alle ein Intervall der Convergenz; nur die Reihen von der Form

$$f(0)+f(0)f(1).x+f(0)f(1)f(2).x^2+\cdots+f(0)f(1)f(2)\ldots$$
$$\ldots f(n-1)f(n).x^n+\cdots,$$

wo $f(n)$ eine Function von n bezeichnet, die bei unendlichem Wachsen von n unendlich grofs wird, sind für *jeden* Werth der Variabeln divergent; so z. B. die Reihe

$$1.x-1.2.x^2+1.2.3.x^3-\cdots,$$

welche in den Paragraphen (7. und 9.) irrthümlich als Beispiel gebraucht worden ist.

Reihen dieser Form kommen aber selten vor und sie können durch keine endliche Anzahl von analytischen Rechnungs-Operationen aus Reihen hervorgehen, die ein Intervall der Convergenz haben.

Ratzeburg, im September 1850.

Druckfehler in der Abhandlung.

Seite 5	letzte Zeile	statt $+px^{n-1}$	lies $\pm px^{n-1}$
- 11	Zeile 6 v. u.	st. $+\frac{1.1.3.5}{1.2.3.4}x^4$	l. $-\frac{1.1.3.5}{1.2.3.4}x^4$
- 19	- 7 v. u.	st. $+0{,}0013406$	l. $-0{,}0013406$
- —	- 6 v. u.	st. $-0{,}0010409$	l. $+0{,}0010409$
- —	- 5 v. u.	st. $-0{,}0004494$	l. $+0{,}0004494$
- 20	- 15 v. o.	st. $\frac{A_1}{(\alpha+\beta)\ldots(\alpha+\beta+p-1)}+\frac{A_2}{(\alpha+2\beta)\ldots(\alpha+2\beta+p-1)}$	l. $\frac{A_1 u}{(\alpha+\beta)\ldots(\alpha+\beta+p-1)}+\frac{A_2 u^2}{(\alpha+2\beta)\ldots(\alpha+2\beta+p-1)}$
- 21	- 16 v. u.	st. $\frac{n(n+1)}{1.2}x^n$	l. $\frac{n(n+1)}{1.2}x^{n-1}$
- 27	- 6 v. o.	st. $-ex^4$	l. $+ex^4$
- 43	- 7 v. u.	st. $m+(u+\frac{1}{2}x)$	l. $m+(u+\frac{1}{2})x$

23.

Über eine allgemeine Eigenschaft der rationalen Entwickelungscoëfficienten einer bestimmten Gattung analytischer Functionen.

(Von Herrn Dr. *E. F. Kummer*, Professor in Breslau.)

Als ich vor einiger Zeit eine bestimmte Aufgabe der Zahlentheorie nach zwei verschiedenen Methoden lösete, erhielt ich als Resultat der Vergleichung beider Auflösungen eine bisher unbekannte Eigenschaft der *Bernoullischen Zahlen*, welche durch folgende Congruenz ausgedrückt wird:

$$\frac{B_\nu}{\nu} \equiv (-1)^{\frac{1}{2}(\lambda-1)} \frac{B_{\nu+\frac{1}{2}(\lambda-1)}}{\nu+\frac{1}{2}(\lambda-1)}, \text{ Mod. } \lambda;$$

wo B_ν die νte *Bernoulli*sche Zahl, λ eine beliebige ungerade Primzahl und ν eine beliebige, nur der einen Bedingung unterworfene ganze Zahl ist, dafs sie nicht ein Vielfaches von $\frac{1}{2}(\lambda-1)$ sei. Als ich jetzt einen directen Beweis dieses Satzes suchte, fand ich, dafs diese Eigenschaft der *Bernoulli*schen Zahlen nur ein besonderer Fall von allgemeinen Eigenschaften der rationalen Entwickelungs-Coëfficienten einer sehr ausgebreiteten Gattung analytischer Functionen ist. Das von mir gefundene allgemeine Resultat läfst sich folgendermaafsen in Form eines Lehrsatzes aussprechen:

Lehrsatz. Wenn $\varphi(x)$ eine Function von x ist, welche in eine nach aufsteigenden ganzen Potenzen der Gröfse $z = e^{rx} - e^{sx}$ geordnete Reihe sich so entwickeln läfst, dafs die Coëfficienten dieser Entwickelung rationale Zahlen sind, in deren Nennern die Primzahl λ als Factor nicht vorkommt, und wobei r und s rationale Zahlen sind, deren Nenner ebenfalls den Primfactor λ nicht enthalten: wenn ferner dieselbe Function $\varphi(x)$, nach Potenzen von x entwickelt, folgende Reihe giebt:

$$\varphi(x) = A + \frac{A_1 x}{1} + \frac{A_2 x^2}{1.2} + \frac{A_3 x^3}{1.2.3} + \cdots,$$

so findet unter den Coëfficienten dieser Entwickelung folgende Congruenz Statt:

$$A_m - \frac{n}{1} A_{m+\lambda-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} A_{m+2\lambda-2} - \cdots (-1)^n A_{m+n\lambda-n} \equiv 0,$$

für den Modul λ^n. Die Zahlen m und n sind beliebige ganze Zahlen und nur der einen Bedingung unterworfen, dafs $m \geqq n$ ist. Die besonderen Fälle für $n = 1, 2, 3$ sind:

$A_m - A_{m+\lambda-1} \equiv 0$, Mod. λ, wenn $m \geqq 1$,

$A_m - 2A_{m+\lambda-1} + A_{m+2\lambda-2} \equiv 0$, Mod. λ^2, wenn $m \geqq 2$,

$A_m - 3A_{m+\lambda-1} + 3A_{m+2\lambda-2} - A_{m+3\lambda-3} \equiv 0$, Mod. λ^3, wenn $m \geqq 3$,

u. s. w.

Beweis. Nach der Voraussetzung des Lehrsatzes ist

$$\varphi(x) = a + a_1(e^{rx} - e^{sx}) + a_2(e^{rx} - e^{sx})^2 + a_3(e^{rx} - e^{sx})^3 + \cdots,$$

oder, wenn man das Summenzeichen Σ anwendet,

$$\varphi(x) = \Sigma a_k (e^{rx} - e^{sx})^k,$$

wo a_k, r und s rationale Zahlen sind, deren Nenner den Factor λ nicht enthalten. Wird nun $(e^{rx} - e^{sx})^k$ nach dem binomischen Lehrsatze entwickelt, wobei der $h$te Binomial-Coëfficient der $k$ten Potenz einfach durch $(k)_h$ bezeichnet werden möge, so ist

$$(e^{rx} - e^{sx})^k = \Sigma(-1)^h (k)_h e^{(r(k-h)+sh)x},$$

also

$$\varphi(x) = \Sigma\Sigma(-1)^h (k)_h a_k e^{(r(k-h)+sh)x}.$$

Wird der $m$te Differentialquotient dieses Ausdrucks des $\varphi(x)$ genommen, für den Werth $x = 0$, welcher nach dem *Maclaurin*schen Satze gleich dem Entwickelungs-Coëfficienten A_m ist, so ergiebt sich

$$A_m = \Sigma\Sigma(-1)^h (k)_h a_k (r(k-h) + sh)^m.$$

Wenn man nun m in $m+\lambda-1$, $m+2\lambda-2$, ... $m+n\lambda-n$ verwandelt, so erhält man mittels dieser Ausdrücke der Coëfficienten A_m, $A_{m+\lambda-1}$, $A_{m+2\lambda-2}$ etc. die Gleichung

$$A_m - \frac{n}{1} A_{m+\lambda-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} A_{m+2\lambda-1} - \cdots (-1)^n A_{m+n\lambda-n} =$$
$$\Sigma\Sigma(-1)^h (k)_h a_k (r(k-h) + sh)^m (1 - (r(k-h) + sh)^{\lambda-1})^n.$$

Der Ausdruck $1 - (r(k-h) + sh)^{\lambda-1}$ ist nach dem *Fermat*schen Satze durch λ theilbar; mit alleiniger Ausnahme des Falles, wo $r(k-h) + sh$ durch λ theilbar ist. Hieraus folgt, dafs, wenn $m \geqq n$ angenommen wird, immer der eine oder der andere der beiden Factoren des Products

$$(r(k-h) + sh)^m (1 - (r(k-h) + sh)^{\lambda-1})$$

durch λ^n theilbar ist, dafs also

$$A_m - \frac{n}{1} A_{m+\lambda-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} A_{m+2\lambda-2} - \cdots (-1)^n A_{m+n\lambda-n} \equiv 0, \text{ Mod. } \lambda^n,$$

ist. W. z. b. w.

Um den gefundenen und bewiesenen allgemeinen Satz zunächst auf die *Bernoulli*schen Zahlen anzuwenden, mache ich von der bekannten Reihen-Entwickelung

$$\frac{1}{e^x-1} = \frac{1}{x} - \tfrac{1}{2} + \frac{B_1 x}{1.2} - \frac{B_2 x^3}{1.2.3.4} + \frac{B_3 x^5}{1.2.3.4.5.6} - \cdots$$

Gebrauch, in welcher B_1, B_2 B_3, ... die *Bernoulli*schen Zahlen bedeuten. Ich setze γx statt x, multiplicire mit γ und ziehe die unveränderte Gleichung von dieser neuen ab, so ergiebt sich

$$\frac{\gamma}{e^{\gamma x}-1} - \frac{1}{e^x-1} = -\tfrac{1}{2}(\gamma-1) + \frac{B_1(\gamma^2-1)x}{1.2} - \frac{B_2(\gamma^4-1)x^3}{1.2.3.4} + \cdots$$

Wird nun

$$\frac{\gamma}{e^{\gamma x}-1} - \frac{1}{e^x-1} = \varphi(x) \text{ und } e^x-1 = z$$

gesetzt, so erhält man

$$\varphi(x) = \frac{\gamma}{(1+z)^\gamma-1} - \frac{1}{z},$$

welches, wie leicht zu sehen, in eine nach positiven ganzen Potenzen von $z = e^x-1$ geordnete Reihe sich entwickeln läfst, und zwar so, dafs die Coëfficienten rational sind und nur Potenzen von γ, also, wenn γ nicht durch λ theilbar ist, keinen Factor λ in ihren Nennern enthalten. Die Function $\varphi(x)$ ist also eine solche, wie der Lehrsatz sie verlangt; und zwar, wenn in demselben $r=1$ und $s=0$ angenommen wird.

Ferner ist für den vorliegenden Fall

$$A_2 = 0, \quad A_4 = 0, \quad A_6 = 0 \text{ etc.},$$

$$A_1 = +\tfrac{1}{2}(B_1(\gamma^2-1)), \quad A_3 = -\tfrac{1}{4}(B_2(\gamma^4-1)), \quad A_5 = +\tfrac{1}{6}(B_3(\gamma^6-1)) \text{ etc.},$$

also allgemein

$$A_{2\nu} = 0, \quad A_{2\nu-1} = -\frac{(-1)^\nu B_\nu(\gamma^{2\nu}-1)}{2\nu}.$$

Die erste der specielleren Congruenzen des Lehrsatzes, nämlich $A_m - A_{m+\lambda-1} \equiv 0$, Mod. λ, giebt daher, wenn $m = 2\nu-1$ angenommen wird:

$$-\frac{(-1)^\nu B_\nu(\gamma^{2\nu}-1)}{2\nu} \equiv -\frac{(-1)^{\nu+\frac{1}{2}(\lambda-1)} B_{\nu+\frac{1}{2}(\lambda-1)}(\gamma^{2\nu+\lambda-1}-1)}{2\nu+\lambda-1}, \text{ Mod. } \lambda.$$

Da nach dem *Fermat*schen Satze $\gamma^{2\nu+\lambda-1}-1\equiv\gamma^{2\nu}-1$, Mod. λ ist, so kann $\gamma^{2\nu}-1$ als gemeinschaftlicher Factor weggehoben werden, sobald diese Gröfse nicht durch λ theilbar ist. Man wähle nun die bisher unbestimmt gelassene Zahl γ so, dafs sie eine primitive Wurzel der Primzahl λ ist, dafs also $\gamma^{2\nu}-1$ nur dann durch λ theilbar ist, wenn ν ein Vielfaches von $\frac{1}{2}(\lambda-1)$ ist, welche Werthe des ν ich ausschliefse. Alsdann kann $\gamma^{2\nu}-1$ als gemeinschaftlicher Factor der Congruenz hinweggehoben werden und die gefundene Congruenz geht in folgende über:

$$\frac{B_\nu}{\nu}\equiv(-1)^{\frac{1}{2}(\lambda-1)}\frac{B_{\nu+\frac{1}{2}(\lambda-1)}}{\nu+\frac{1}{2}(\lambda-1)},\quad \text{Mod.}\,\lambda,$$

die für alle ganzzahligen positiven Werthe des ν gültig ist; mit Ausschlufs derer, welche Vielfache von $\frac{1}{2}(\lambda-1)$ sind. Eben so giebt die Congruenz $A_m-2A_{m+\lambda-1}+A_{m+2\lambda-2}\equiv 0$, Mod. λ^2, für den vorliegenden Fall:

$$-\frac{(-1)^\nu B_\nu(\gamma^{2\nu}-1)}{2\nu}+\frac{2(-1)^{\nu+\frac{1}{2}(\lambda-1)}B_{\nu+\frac{1}{2}(\lambda-1)}(\gamma^{2\nu+\lambda-1}-1)}{2\nu+\lambda-1}$$
$$-\frac{(-1)^\nu B_{\nu+\lambda-1}(\gamma^{2\nu+2\lambda-2}-1)}{2\nu+2\lambda-2}\equiv 0,$$

für den Modul λ^2; was mittels des *Fermat*schen Satzes und mit Hülfe der vorhergehenden Congruenz sich auf folgende einfachere Gestalt bringen läfst:

$$\frac{B_\nu}{\nu}-\frac{(-1)^{\frac{1}{2}(\lambda-1)}2B_{\nu+\frac{1}{2}(\lambda-1)}}{\nu+\frac{1}{2}(\lambda-1)}+\frac{B_{\nu+\lambda-1}}{\nu+\lambda-1}\equiv 0,\quad \text{Mod.}\,\lambda^2.$$

Die Zahl ν mufs in dieser Congruenz, aufser dafs sie nicht ein Vielfaches von $\frac{1}{2}(\lambda-1)$ sein darf, auch gröfser als 1 sein; wie aus der Bedingung $m\geqq 2$, also $2\nu-1\geqq 2$ hervorgeht. Die Congruenz $A_m-3A_{m+\lambda-1}+3A_{m+2\lambda-2}-A_{m+3\lambda-3}\equiv 0$, Mod. λ^3, giebt auf gleiche Weise

$$\frac{B_\nu}{\nu}-\frac{(-1)^{\frac{1}{2}(\lambda-1)}3B_{\nu+\frac{1}{2}(\lambda-1)}}{\nu+\frac{1}{2}(\lambda-1)}+\frac{3B_{\nu+\lambda-1}}{\nu+\lambda-1}-\frac{(-1)^{\frac{1}{2}(\lambda-1)}B_{\nu+\frac{3}{2}(\lambda-1)}}{\nu+\frac{3}{2}(\lambda-1)}\equiv 0,\quad \text{Mod.}\,\lambda^3,$$

wo ν gröfser als 1 sein mufs und nicht ein Vielfaches von $\frac{1}{2}(\lambda-1)$ sein darf. Auf diese Weise fortfahrend erhält man weiter die entsprechenden Congruenzen für die *Bernoulli*schen Zahlen für die Moduln λ^4, λ^5 u. s. w.; und allgemein

$$\frac{B_\nu}{\nu}-(-1)^\mu\frac{n}{1}\frac{B_{\nu+\mu}}{+\mu}+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{B_{\nu+2\mu}}{\nu+2\nu}-(-1)^\mu\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\frac{B_{\nu+3\mu}}{\nu+3\mu}+\cdots\equiv 0$$

für den Modul λ^n, wo $\nu\geqq\frac{1}{2}(n+1)$ sein mufs und kein Vielfaches von $\frac{1}{2}(\lambda-1)$ sein darf, und wo der Kürze wegen $\frac{1}{2}(\lambda-1)$ durch den Buchstaben μ bezeichnet ist.

Zu einem zweiten Beispiel der Anwendung des allgemeinen Lehrsatzes nehme ich die Coëfficienten der Secantenreihe

$$\sec(v) = 1 + \frac{C_1 v^2}{1.2} + \frac{C_2 v^4}{1.2.3.4} + \frac{C_3 v^6}{1.2.3.4.5.6} + \cdots,$$

wo $C_1 = 1$, $C_2 = 5$, $C_3 = 61$, $C_4 = 1385$ u. s. w. ist. Setzt man $v = x\sqrt{-1}$, so erhält man

$$\frac{2}{e^x + e^{-x}} = 1 - \frac{C_1 x^2}{1.2} + \frac{C_2 x^4}{1.2.3.4} - \frac{C_3 x^6}{1.2.3.4.5.6} + \cdots$$

Nimmt man nun

$$\varphi(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

und setzt $e^{\frac{1}{2}x} - e^{-\frac{1}{2}x} = z$, so wird $e^x + e^{-x} = z^2 + 2$, also

$$\varphi(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^2}.$$

Hieraus ist klar, dafs sich $\varphi(x)$ in eine nach Potenzen von $z = e^{\frac{1}{2}x} - e^{-\frac{1}{2}x}$ geordnete Reihe entwickeln läfst, deren rationale Coëfficienten in ihren Nennern nur Potenzen der Zahl 2, also keinen Factor λ enthalten. Nimmt man daher in dem allgemeinen Satze $r = \frac{1}{2}$, $s = -\frac{1}{2}$, so findet sich, dafs $\varphi(x)$ eine Function von x ist, von der Form, wie der Lehrsatz sie verlangt. Aufserdem ergiebt sich durch Vergleichung des vorliegenden Falles mit dem allgemeinen Satze:

$$A_{2\nu-1} = 0 \quad \text{und} \quad A_{2\nu} = (-1)^\nu C_\nu.$$

Die daselbst gefundenen Congruenzen geben also für die Secanten-Coëfficienten

$$C_\nu - (-1)^{\frac{1}{2}(\lambda-1)} C_{\nu+\frac{1}{2}(\lambda-1)} \equiv 0, \text{ Mod. } \lambda, \text{ wenn } \nu \geqq 1,$$

$$C_\nu - (-1)^{\frac{1}{2}(\lambda-1)} 2C_{\nu+\frac{1}{2}(\lambda-1)} + C_{\nu+\lambda-1} \equiv 0, \text{ Mod. } \lambda^2, \text{ wenn } \nu \geqq 0,$$

$$C_\nu - (-1)^{\frac{1}{2}(\lambda-1)} 3C_{\nu+\frac{1}{2}(\lambda-1)} + 3C_{\nu+\lambda-1} - (-1)^{\frac{1}{2}(\lambda-1)} C_{\nu+\frac{3}{2}(\lambda-1)} \equiv 0, \text{ Mod. } \lambda^3, \text{ wenn } \nu \geqq 2$$

und allgemein

$$C_\nu - (-1)^\mu \frac{n}{1} C_{\nu+\mu} + \frac{n(n-1)}{1.2} C_{\nu+2\mu} - (-1)^\mu \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} C_{\nu+3\mu} + \cdots \cdots \pm C_{\nu+n\mu} = 0,$$

für den Modul λ^n, wenn $\nu \geqq \frac{1}{2}n$ ist, und wo der Kürze wegen $\frac{1}{2}(\lambda-1)$ durch den Buchstaben μ bezeichnet ist.

Breslau, den 30ten Juli 1850.

3.

10 40 100 Centimetres

1.

B B, B, B, Y
O A A, A, A, X

4.

A' A B' B C

5.

E C A F B D

L
I
N
M
A

9.

Q K L H E B D G I C A F N M O P

O
Z C' C

12.

10.

A A' X B B'

1.

O A A, A₂ A₃ X
B B, B₂ B₃ Y

4.

A A' B' B C

5.

E C F A B D

9.

Q K L H D E B X G F C I A N M O P

Z C' C

12.

10.

O A A' X B B'

STORAGE ARE

11013

